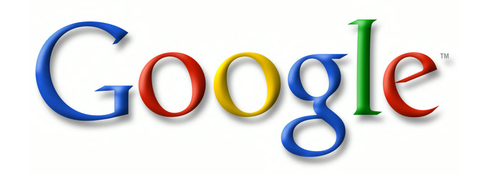






ABHANDLUNGEN
ÜBER THEORETISCHE PHYSIK

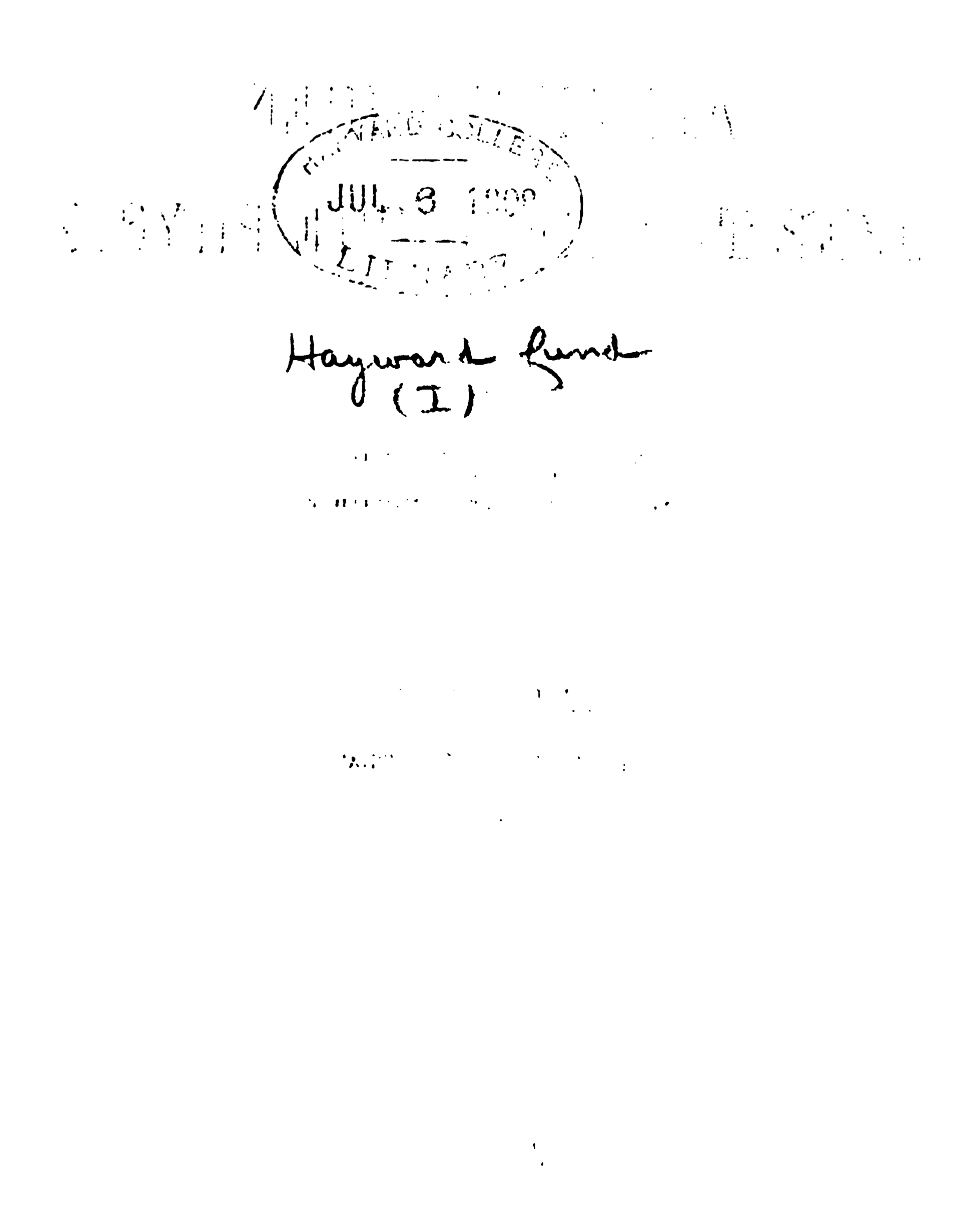
VON

H. A. LORENTZ
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LEIDEN

ERSTER BAND

MIT 40 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907


JUL 3 1900
Hayward Fund
(I)

Vorwort.

Auf den Vorschlag des Herrn Verlegers zu einem Neudruck meiner Abhandlungen über theoretische Physik bin ich gern, wenn auch nicht ohne Zögern eingegangen. Entscheidend war dabei für mich die Erwägung, daß ich hierin Anlaß finden würde, meine Arbeiten einer gründlichen Sichtung und Revision zu unterziehen, diejenigen, die mir wertlos scheinen, ganz wegzulassen, das Übrige aber von mancher Unvollständigkeit und sonstigen Mängeln zu befreien und so umzugestalten, daß der Zusammenhang besser hervortreten würde.

Indem ich mich nun bemüht habe, Inhalt und Form tunlichst zu verbessern, habe ich zu gleicher Zeit eine gewisse Einheit zu erreichen gesucht. Zu diesem letzteren Zwecke bin ich vielfach von der chronologischen Folge, in der die Abhandlungen erschienen sind, abgewichen, und habe ich an vielen Stellen die mathematische Bezeichnungsweise geändert; auch habe ich hie und da Neues hinzugefügt und einige Artikel aufgenommen, die von meinen Vorlesungen herrühren.

Das bunte Gewand der drei Sprachen bitte ich den Leser, gütigst zu entschuldigen. Wir Holländer sind nun einmal genötigt, wenn wir uns an der gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit der Völker beteiligen wollen, in fremden Sprachen zu schreiben, und so habe ich es eben, je nach Umständen, bald in der einen, bald in der anderen versucht. Zu der Übersetzungsarbeit, die der Gebrauch einer einzigen Sprache erfordert hätte, fehlte mir die Zeit; auch wäre die Mühe wohl überflüssig gewesen.

Der Verlagsbuchhandlung möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für die auf den Druck des Buches verwendete Sorgfalt aussprechen.

Leiden.

H. A. Lorentz.

Inhalt.

Vorwort.

Auf den Vorschlag des Herrn Verlegers zu einem Neudruck meiner Abhandlungen über theoretische Physik bin ich gern, wenn auch nicht ohne Zögern eingegangen. Entscheidend war dabei für mich die Erwägung, daß ich hierin Anlaß finden würde, meine Arbeiten einer gründlichen Sichtung und Revision zu unterziehen, diejenigen, die mir wertlos scheinen, ganz wegzulassen, das Übrige aber von mancher Unvollständigkeit und sonstigen Mängeln zu befreien und so umzugestalten, daß der Zusammenhang besser hervortreten würde.

Indem ich mich nun bemüht habe, Inhalt und Form tunlichst zu verbessern, habe ich zu gleicher Zeit eine gewisse Einheit zu erreichen gesucht. Zu diesem letzteren Zwecke bin ich vielfach von der chronologischen Folge, in der die Abhandlungen erschienen sind, abgewichen, und habe ich an vielen Stellen die mathematische Bezeichnungsweise geändert; auch habe ich hie und da Neues hinzugefügt und einige Artikel aufgenommen, die von meinen Vorlesungen herrühren.

Das bunte Gewand der drei Sprachen bitte ich den Leser, gütigst zu entschuldigen. Wir Holländer sind nun einmal genötigt, wenn wir uns an der gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit der Völker beteiligen wollen, in fremden Sprachen zu schreiben, und so habe ich es eben, je nach Umständen, bald in der einen, bald in der anderen versucht. Zu der Übersetzungsarbeit, die der Gebrauch einer einzigen Sprache erfordert hätte, fehlte mir die Zeit; auch wäre die Mühe wohl überflüssig gewesen.

Der Verlagsbuchhandlung möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für die auf den Druck des Buches verwendete Sorgfalt aussprechen.

Leiden.

H. A. Lorentz.

I.

Some considerations on the principles of dynamics, in connexion with Hertz's „Prinzipien der Mechanik".

(Amsterdam Zittingsverlag Akad. v. Wet., **10** [1902], p. 876; Amsterdam Proceedings, 1901—1902, p. 713.)

In his last work Hertz has founded the whole science of dynamics on a single fundamental principle, which by the simplicity of its form recalls Newton's first law of motion, being expressed in the words: that a material system moves with constant velocity in a path of least curvature ("geradeste Bahn"). By means of the hypothesis that in many cases the bodies whose motion is studied are connected to an invisible material system, moving with them, and by the aid of a terminology akin to that of more-dimensional geometry, Hertz was able to show that all natural motions that may be described by the rules of dynamics in their usual form, may be made to fall under his law.

From a physical point of view it is of the utmost interest to examine in how far the hypothesis of a hidden system, connected with the visible and tangible bodies, leads to a clear and satisfactory view of natural phenomena, a question which demands scrupulous examination, and on which physicists may in many cases disagree. On the contrary, it seems hardly possible to doubt the great advantage as to conciseness and clearness of expression that is gained by the mathematical form Hertz has chosen for his statements. I have therefore thought it advisable to consider in how far these advantages still exist, if, leaving aside the hypothesis of hidden motions, and without departing from the general use in dynamical investigations, one considers the motion of a system as governed by "forces" in the usual sense of the word.

In what follows there is much that may also be found in the book of Hertz. This seemed necessary in order to present the subject in a connected form.

As to the authors who have, before Hertz, published similar investigations, I need only mention Beltrami, Lipschitz and Darboux.

§ 1. We shall consider a system, consisting of n material points and we shall determine its position by the rectangular coordinates of

all these points. The coordinates of the first point will be represented by x_1, x_2, x_3, those of the second point by x_4, x_5, x_6, etc., and any one of the coordinates by x_ν, the index ν varying from 1 to $3n$. We shall write m for the mass of the system, and m_ν for that of the point to which the index ν belongs. This implies that any one of these quantities m_ν has the same meaning as two other ones.

§ 2. We shall determine an infinitely small *displacement* of the system by the increments dx_ν (or, as we shall write in some cases, δx_ν) of the several rectangular coordinates. We shall ascribe to such a displacement a definite *length*, to be denoted by ds, and defined as the positive value that satisfies the equation

$$m\,ds^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu m_\nu dx_\nu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

The displacement of the system may be considered as the *complex* of the displacements of the individual points, and the rectangular components of these last displacements, i. e. the differentials dx_ν, may be called the *elements* of the displacement of the system. We shall also call ds the *distance* between the positions of the system before and after the infinitely small displacement.

§ 3. Let P, P', P'' be three positions, infinitely near each other, ds, ds', ds'' the lengths of the displacements $P \to P'$, $P \to P''$, $P' \to P''$. It may be shown by (1) that any one of these lengths can never be greater than the sum of the other two[1]), so that we may construct a triangle,

---

1) Let $a_1, a_2, \cdots a_k$; $b_1, b_2, \cdots b_k$ be two series, each of k numbers. Then:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k)^2 + \\ + \Sigma (a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda)^2,$$

the last sum relating to all possible combinations of different suffixes λ, μ. The absolute value of

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k$$

can therefore never be greater than

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2)}.$$

Hence, even if Σab should be negative, the sum

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_k - b_k)^2$$

cannot be greater than

$$\left[\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2}\right]^2$$

and

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_k - b_k)^2}$$

cannot surpass the sum

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2}.$$

The assertion made in the text follows immediately from this.

having ds, ds', ds'' for its sides. By *the angle between the displacements* $P \to P'$ and $P \to P''$ we shall understand the angle between the sides ds and ds' of this triangle. If we denote it by (s, s'), the elements of the first displacement by dx_ν and those of the second by dx'_ν, we shall have

$$ds''^2 = ds^2 + ds'^2 - 2 ds\, ds' \cos(s, s'),$$

$$m ds^2 = \sum_1^{3n} m_\nu\, dx_\nu^2,$$

$$m ds'^2 = \sum_1^{3n} m_\nu\, dx'^2_\nu,$$

$$m ds''^2 = \sum_1^{3n} m_\nu (dx_\nu - dx'_\nu)^2,$$

whence it appears that

$$m ds\, ds' \cos(s, s') = \sum_1^{3n} m_\nu\, dx_\nu\, dx_\nu' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In special cases the angles of the triangle may be on a straight line, so that $(s, s') = 0$ or 180^0.

The above may be extended to two displacements, having the elements dx_ν and dx'_ν, the lengths ds and ds', whose initial positions do not coincide. In this case, just like in the former one, we calculate the angle between the displacements by the formula (2).

§ 4. If we have to do with a set of vector quantities of one kind or another — but all of the same kind — each belonging to one of the material points, we shall call the complex of all these quantities a *vector in the system* or simply a *vector*. The rectangular components of the several vector quantities will be called the *elements of the vector in the system*.

From this it follows that an infinitely small displacement is a vector in the system, and that any vector may be geometrically represented on an infinitely small scale by such a displacement. The *length* or *magnitude of a vector* and the *angle between two vectors* may be defined in a similar way as the corresponding quantities in the case of infinitely small displacements.

We shall often denote a vector by the letter $\mathfrak{S}$, its magnitude by S, its elements by X_ν. Accents or other suffixes will serve to distinguish one vector from another. Other Gothic letters for vectors, and the corresponding Latin ones for their magnitudes will likewise be used. If an infinitely small displacement is to be regarded as a vector, we shall denote it by $d\mathfrak{s}$ or $\delta\mathfrak{s}$.

The magnitude S of a vector, considered in most cases as a positive quantity, is given by the formula

$$mS^2 = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} m_\nu X_\nu^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

which shows that, if we multiply each element of a vector $\mathfrak{S}$ by the same positive number k, and take the products as the elements of a new vector, the magnitude of the latter will be kS. The new vector may be said to be obtained by multiplying the original one by k; it may be denoted by $k\mathfrak{S}$.

The angle $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ between two vectors is determined by the equation

$$m\,S S' \cos(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} m_\nu X_\nu X_\nu' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

If $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = 0$, the vectors are said to have the same direction. This will be the case if $\mathfrak{S}' = k\mathfrak{S}$, k being a positive number. Indeed, putting in (4) $X_\nu' = kX_\nu$, $S' = kS$, and comparing with (3), one finds

$$\cos(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = 1.$$

The converse of this proposition is also true. Starting from the last formula, and denoting by k the positive ratio S'/S, we conclude from (4), combined with (3) and with the corresponding equation for mS'^2,

$$0 = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} m_\nu (X'_\nu - kX_\nu)^2,$$

so that we must have, for every value of ν

$$X_\nu' = kX_\nu.$$

Hence, for two vectors having the same direction, the ratios between the elements and the magnitude will have equal values. It is natural to call these ratios the *direction-constants*. If these are α_ν, so that

$$\alpha_\nu = \frac{X_\nu}{S},$$

the equation (4) becomes

$$m \cos(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} m_\nu\, \alpha_\nu\, \alpha_\nu' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

The angle between two vectors depends therefore on their direction-constants, or, as we may say, on their directions.

The direction-constants of a vector must not be chosen independently from each another, the relation

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} m_\nu \alpha_\nu^2 = m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

which follows from (3), having always to be satisfied.

Two vectors are said to be perpendicular to each other, if $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = 90^0$.

If the angle is 180^0, the vectors have opposite directions. The direction-constants of the one are equal to those of the other with reversed signs, and the ratio between corresponding elements is a negative constant $-k$, so that, if one vector is $\mathfrak{S}$, the other may appropriately be denoted by $-k\mathfrak{S}$. In this case we may also say that the two vectors have the same direction-constants, but that the magnitude of one is positive and that of the other negative.

§ 5. Two vectors $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ are said to be compounded with each other, if any two corresponding elements are added algebraically, and the sums thus obtained are taken as the elements of a new vector. This is called the *resultant* or the *sum of the two vectors*, and represented by $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$; it may again be decomposed into the *components* $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$.

There are a number of theorems, closely corresponding to those in the theory of ordinary vectors. We need only mention some of them.

Let

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

and let h be an arbitrarily chosen direction in the system, i. e. the direction of some vector $\mathfrak{S}$ in the system. Writing down three times the equation (4), first for $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}_1$, then for $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}_2$ and lastly for $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}_3$, we shall find

$$S_1 \cos(\mathfrak{S}_1, h) + S_2 \cos(\mathfrak{S}_2, h) = S_3 \cos(\mathfrak{S}_3, h) \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

From this it appears that, as soon as two of the vectors $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ are perpendicular to the direction h, the third will likewise be so.

Instead of (7) we may also write

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_2,$$

defining in this way the *difference* of two vectors.

A given vector $\mathfrak{S}$ may always be decomposed into one component having a given direction h (or precisely the opposite direction) and a second component, perpendicular to h. This may be shown as follows. If $\mathfrak{S}_3$ is the given vector, we may take for the first component a vector $\mathfrak{S}_1$ having the direction h and the magnitude $S_3 \cos(\mathfrak{S}_3, h)$ and determine the second component $\mathfrak{S}_2$ so that (7) is satisfied. Then, by (7'), $\cos(\mathfrak{S}_2, h) = 0$, by which the second component is seen to be perpendicular to the direction h. We may add that the decomposition can be effected in only one way. The magnitude $S \cos(\mathfrak{S}, h)$ of the component of $\mathfrak{S}$ along h is also called the *projection* of $\mathfrak{S}$ on the direction h. It may be positive or negative; in one case the component has the direction h, in the other it has the opposite direction.

By the *scalar product* of the vectors $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ we understand the expression

$$S_1 S_2 \cos(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2),$$

for which the sign $(\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{S}_2)$ will be used.

This product has the properties expressed by

$$(\mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{S}_1) = (\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{S}_2),$$
$$(\mathfrak{S} \cdot \{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2\}) = (\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}_1) + (\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}_2),$$

the latter equation being got at once, if (7′) is multiplied by the magnitude of the vector $\mathfrak{S}$, whose direction is denoted by h.

It is further to be observed that we may deduce from (7)

$$(\mathfrak{S}_3 \cdot \mathfrak{S}_3) = (\{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2\} \cdot \{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2\}) = \\ = (\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{S}_1) + (\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{S}_2) + (\mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{S}_1) + (\mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{S}_2),$$

i. e.

$$S_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2(\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{S}_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

We shall speak of the sum and the difference of two vectors not only if these relate to the same position of the system, but likewise if they are given for different positions.

§ 6. The material points of the system are said to be *connected* with one another, if the system is, by its nature, only capable of such infinitely small displacements as satisfy certain conditions. We shall suppose that these may be expressed by i equations of the form

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} x_{\iota\nu}\, dx_\nu = 0, \ (\iota = 1, 2, \dots i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

in which the coefficients $x_{\iota\nu}$ are functions of the rectangular coordinates, but do not explicitly contain the time. Displacements agreeing with (9) are called *possible* displacements; displacements which violate the conditions are however equally *imaginable.*

A position of the system and a vector in it being given, we may examine whether or not the vector have the direction of a possible displacement. It will have such a direction if its elements or its direction-constants obey i equations, similar to (9).

If two of the three vectors in (7) have the direction of a possible displacement, the third will have the same property.

§ 7. There are *directions perpendicular to all possible displacements.* If a vector $\mathfrak{S}$, whose elements are X_ν, has such a direction, we shall have by (4)

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} m_\nu X_\nu\, dx_\nu = 0,$$

for all values of dx_ν agreeing with the equations (9). It will there-

fore be possible to express the elements X_ν in i quantities Ξ_ι by means of the equations

$$m_\nu X_\nu = \sum_1^i {}_\iota x_{\iota\nu} \Xi_\iota \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Any system of values for Ξ_ι will give a vector that has the property in question.

If, among the vectors occurring in (7), there are two that are perpendicular to all possible displacements, the same will be the case with the third vector.

A given vector may be decomposed into two components of which the one is perpendicular to all possible displacements, and the other has the direction of a possible displacement. There is only one such decomposition.

In order to show this, we may regard as unknown quantities the $3n$ elements of the second component and i quantities Ξ_ι, in which, by (10), the elements of the first component may be expressed. We have an equal number of linear equations, i of them expressing (§ 6) that the first component has the direction of a possible displacement, and the remaining $3n$ equations, that the elements of the given vector are the sums of the corresponding elements of the two components.

§ 8. The *path* of a moving system is determined by the positions it occupies one after the other. It may be considered as a succession of infinitely small displacements, which we shall call the *elements of the path*. The *length of any part of the path* is defined as the sum

$$\int ds$$

of the lengths ds of the elements of which it consists.

The *direction of a path* in one of its positions is given by the direction of an element.

We shall always think of the system as moving along a path in a definite direction. Then the coordinates x_ν, and all other quantities that have determinate values for every position in the path, may be regarded as functions of the length s of the path, reckoned from some fixed position. Accents will serve to indicate differentiation of such quantities with respect to s.

From what has been said in § 4 it follows that the quantities x'_ν are the direction-constants of the path; they will always satisfy the relation

$$\sum_1^{3n} {}_\nu m_\nu x'^2_\nu = m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

as appears from (6). Using (3), we see that a vector whose elements

are x'_ν has the magnitude 1. This vector of unit magnitude, in the direction of the path, may be called the *direction-vector*. We shall represent it by $\mathfrak{D}$.

§ 9. We define the *curvature of a path* as the vector $\mathfrak{c}$, given by

$$\mathfrak{c} = \frac{d\mathfrak{D}}{ds}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

the numerator being the difference between the vectors $\mathfrak{D}$ at the beginning and at the end of an element of the path of length ds. The elements of $\mathfrak{D}$ being x'_ν, we see at once that those of $\mathfrak{c}$ are x''_ν; accordingly, in virtue of (3), the magnitude c of the curvature is given by

$$mc^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu m_\nu x''^2_\nu. \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

By differentiating (11) one finds

$$\sum_1^{3n} {}_\nu m_\nu x'_\nu x''_\nu = 0, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

the meaning of which is that the curvature is perpendicular to the path.

Let P_1 and P_2 be two paths, having in common a position A and the direction in this position, so that the direction-vector $\mathfrak{D}$, in the position A, is likewise the same for the two paths, or

$$\mathfrak{D}_{1(a)} = \mathfrak{D}_{2(a)}.$$

Let us consider elements of the two paths, beginning in A, and of *equal* lengths ds. If $\mathfrak{D}_1$ and $\mathfrak{D}_2$ are the direction-vectors at the ends of these elements, the vector

$$\mathfrak{c}_r = \frac{\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

may appropriately be called the *relative curvature* of the path P_1 with respect to the path P_2. Now, we may replace the numerator in (15) by $[\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_{1(a)}] - [\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_{2(a)}]$; the relative curvature is therefore related as follows to the curvatures $\mathfrak{c}_1$ and $\mathfrak{c}_2$ of the two paths:

$$\mathfrak{c}_r = \mathfrak{c}_1 - \mathfrak{c}_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Like $\mathfrak{c}_1$ and $\mathfrak{c}_2$, the relative curvature is perpendicular to both paths.

§ 10. What has been said thus far holds for every imaginable path. We shall now consider *possible paths*, i. e. such as are composed of possible infinitely small displacements. The direction-constants of such a path satisfy the i conditions

$$\sum_1^{3n} {}_\nu x_{\iota\nu} x'_\nu = 0, \quad (\iota = 1, 2, \ldots i) \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

as may be deduced from (9).

Let there be given a position A and a direction in this position, so that the values of x_ν and x'_ν are known, and let us seek the values of x''_ν for a possible path, which make the curvature c a minimum.

In solving this problem, we have to take into account equation (14) and the conditions

$$\sum_1^{3n}{}_\nu x_{\iota\nu} x''_\nu + \sum_1^{3n}{}_\nu \sum_1^{3n}{}_\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} x'_\mu x'_\nu = 0, \quad (\iota = 1, 2, \ldots i) \quad . \quad (18)$$

which are got by differentiating (17). Now, the conditions for the minimum of (13) are got by expressing that the variation of this quantity, corresponding to variations of x''_ν that are compatible with (18) and (14), must be 0. Thus, for all values of $\delta x''_\nu$, satisfying the conditions

$$\sum_1^{3n}{}_\nu x_{\iota\nu} \delta x''_\nu = 0, \ (\iota = 1, 2, \cdots i)$$

and

$$\sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu x'_\nu \delta x''_\nu = 0,$$

we must have

$$\sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu x''_\nu \delta x''_\nu = 0.$$

We may therefore write for the values of x''_ν that make (13) a minimum

$$m_\nu x''_\nu = \sum_1^{i}{}_\iota x_{\iota\nu} P_\iota + m_\nu x'_\nu Q,$$

P_ι and Q being $i+1$ quantities whose values can be determined by means of (14) and (18). The first of these equations, combined with (17) and (11), gives $Q = 0$. The solution becomes therefore

$$m_\nu x''_\nu = \sum_1^{i}{}_\iota x_{\iota\nu} P_\iota, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

and the formulae (18) will serve to determine the quantities P_ι.

A possible path which, in each of the positions belonging to it, is less curved than any other possible path of the same direction, may be called a *path of least curvature.* In every position through which it passes it has the property expressed by (19) or, as we may also say, its curvature is perpendicular to all possible displacements.

A path of least curvature is determined by one position, and the direction in that position.

§ 11. We shall next consider a possible path P and the path P_0 of least curvature, having in common with P one position A and the

direction in that position. Let, in the position A, $\mathfrak{c}_o$ be the curvature of P_o, $x''_{\nu(o)}$ the elements of this curvature, $\mathfrak{c}$ and x''_ν the corresponding quantities for P, and let us fix our attention on the relative curvature of P, with respect to the least curved path P_o. We shall denote this relative curvature by $\mathfrak{c}_f$, and call it the *free curvature* of the possible path P. It may be shown to have the direction of a possible displacement.

Indeed, we have by definition

$$\mathfrak{c}_f = \mathfrak{c} - \mathfrak{c}_o, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

so that the elements of $\mathfrak{c}_f$ are $x''_\nu - x''_{\nu(o)}$. Now, if we write down two times the equations (18), first for P_o and then for P, we find by subtraction

$$\sum_1^{3n} {}_\nu x_{\iota\nu} \left[x''_\nu - x''_{\nu(o)}\right] = 0, \quad (\iota = 1, 2, \ldots i)$$

which proves the proposition. We may add that $\mathfrak{c}_o$ is perpendicular to $\mathfrak{c}_f$, being perpendicular to all possible displacements, and that therefore by (8)

$$c^2 = c_o^2 + c_f^2.$$

This shows that the curvature of the path determined by (19) is really a *minimum*.

It is easily seen that a possible path is wholly determined if one knows one position belonging to it, the direction in that position and the free curvature in all positions.

§ 12. Let P be a possible path. From every position A lying in it we make the system pass to a *varied position* A', by giving to it an infinitely small displacement $\delta\mathfrak{s}$, for whose elements we write δx_ν, these elements being supposed to be continuous functions of the length s of the path, reckoned along P.

The path P' that is determined by the succession of the new positions A' will be called the *varied path* and the letter δ will serve to indicate the difference between quantities relating to this path and the corresponding ones relating to the original path. We shall use the sign d, if we compare the values of some quantity at the beginning and at the end of an element ds of the path P.

It is easy to obtain an expression for the variation in the length of an element. Starting from (1), we find

$$m\, ds\, \delta\, ds = \sum_1^{3n} {}_\nu m_\nu\, dx_\nu\, \delta\, dx_\nu.$$

Hence, dividing by ds,

$$m\,\delta\,ds = \sum_1^{3n} m_\nu\, x'_\nu\, \delta\, dx_\nu = \sum_1^{3n} m_\nu\, x'_\nu\, d\,\delta\, x_\nu =$$
$$= d\sum_1^{3n} m_\nu\, x'_\nu\, \delta\, x_\nu - ds\,.\sum_1^{3n} m_\nu\, x''_\nu\, \delta\, x_\nu.$$

We may simplify this by introducing the notation for the scalar product of two vectors, and writing $(\delta\mathfrak{s})_s$ for the projection of $\delta\mathfrak{s}$ on the direction of the path. The sums on the right-hand side may then be replaced by

$$m(\mathfrak{D}\cdot\delta\mathfrak{s}) = m(\delta\mathfrak{s})_s$$

and

$$m(\mathfrak{c}\cdot\delta\mathfrak{s}).$$

In the last expression, in virtue of (20)

$$(\mathfrak{c}\cdot\delta\mathfrak{s}) = (\mathfrak{c}_o\cdot\delta\mathfrak{s}) + (\mathfrak{c}_{\prime}\cdot\delta\mathfrak{s}),$$

and this is reduced to the last term, if we confine ourselves to *possible* virtual displacements $\delta\mathfrak{s}$, these being perpendicular to $\mathfrak{c}_o$. Finally

$$\delta\,ds = d(\delta\mathfrak{s})_s - (\mathfrak{c}_{\prime}\cdot\delta\mathfrak{s})ds, \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

a result, which can be illustrated by simple geometrical examples.

§ 13. It is to be observed that the varied path of which we have spoken in the last § is not in general a possible path. This will however be the case, if the i equations (9) admit of complete integration, i. e. if the connexions may be expressed by i equations between the coordinates. Then we may speak of „possible positions“. All positions of the varied path will belong to this class, so that the varied path itself is to be considered a possible one.

Systems having the peculiar property just mentioned are called by Hertz *holonomic.* For these, the equation (21) gives the variation which arises if one possible path is changed into another, infinitely near it, and *likewise possible.*

If now the original path were one of least curvature, we should have $\mathfrak{c}_{\prime} = 0$, and by integration over some part of the original path, in the supposition that the initial and final positions are not varied,

$$\delta\int_1^2 ds = 0.$$

This shows that for holonomic systems the paths of least curvature are at the same time *geodetic* paths.

§ 14. In considering the motion in relation to the time t, we shall indicate differentiations with respect to this variable, either by the ordinary sign or by a dot. If some quantity φ may be conceived

as a function of t and likewise as one of the length of path s, we have the relation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \varphi' \frac{ds}{dt}.$$

We shall define the *velocity* $\mathfrak{v}$ of the system as the complex of the velocities of the individual points. Its elements are $\dot{x}_\nu = x'_\nu \cdot \frac{ds}{dt}$ and the vector itself is

$$\mathfrak{v} = \frac{ds}{dt}\mathfrak{D}.$$

The *direction of the velocity* is that of the path, so that we may write

$$\mathfrak{v} = v\mathfrak{D} \quad \text{. . . . .} \quad (22)$$

and the *magnitude* is

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

If the magnitude is determined by (3), the *kinetic energy* is easily found to be

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2.$$

By the *acceleration* $\mathfrak{f}$ of the system we understand the complex of the accelerations of all the material points. Thus the elements of $\mathfrak{f}$ are $\ddot{x}_\nu$, and

$$\mathfrak{f} = \dot{\mathfrak{v}},$$

as may be seen by observing that the elements of $d\mathfrak{v}$, the difference of the velocities at the beginning and at the end of the time dt, are $d\dot{x}_\nu$, and those of $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ or $\dot{\mathfrak{v}}$, $\frac{d\dot{x}_\nu}{dt}$ or $\ddot{x}_\nu$.

An interesting result is obtained if, in our last equation, we use (22), (12) and (20). Taking into account that

$$\frac{d(v\mathfrak{D})}{dt} = v\dot{\mathfrak{D}} + \dot{v}\mathfrak{D},$$

we are led to the following decomposition of the acceleration into three components:

$$\mathfrak{f} = v\dot{\mathfrak{D}} + \dot{v}\mathfrak{D} = v^2\frac{d\mathfrak{D}}{ds} + \dot{v}\mathfrak{D} = v^2\mathfrak{c} + \dot{v}\mathfrak{D} = v^2\mathfrak{c}_o + v^2\mathfrak{c}_f + \dot{v}\mathfrak{D}. \quad . \quad (23)$$

The first component is perpendicular to all possible displacements, the second has the direction of the free curvature and the third that of the path.

It is easily seen that a possible motion will be quite determined, if we know one position, the velocity in that position and, for every instant, the second and the third component of the acceleration. Indeed, the second component determines the free curvature, and by this the change in the direction of the path, and the third component determines the change in the value of the velocity.

§ 15. Let the material points of the system be acted on by forces, in the usual sense of the word, and let X_ν be the rectangular components of these. We shall take together all these forces, so that we may speak of them all as of one thing, but in doing so we shall slightly depart from the way in which we have defined the velocity and the acceleration. We begin by multiplying each individual force by $\frac{m}{m'}$, m' being the mass of the point on which it acts, and m the mass of the whole system, and we understand by *the force $\mathfrak{F}$ acting on the system* the complex of the new vectors thus obtained.

The elements of $\mathfrak{F}$ are therefore $\frac{m}{m_\nu} X_\nu$.

Assigning to $\mathfrak{F}$ a definite direction and a definite magnitude will of course imply that all the forces acting on the material points of the system are given in direction and magnitude.

The definition of the force $\mathfrak{F}$ has been so chosen that the work of the forces in an infinitely small displacement, i. e. the expression

$$\sum_1^{3n} X_\nu dx_\nu,$$

becomes equal to the scalar product $(\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{s})$.

§ 16. Every force $\mathfrak{F}$ may be decomposed into one component $\mathfrak{F}_0$, perpendicular to all possible displacements, a second component $\mathfrak{F}_1$, having the direction of a possible displacement and perpendicular to the path, and a third component $\mathfrak{F}_2$, in the direction of the path.

One can conduct this operation in two steps. Replace first (§ 7) $\mathfrak{F}$ by $\mathfrak{F}_0$, perpendicular to all possible displacements, and $\mathfrak{F}'$, in the direction of such a displacement. This being done, we have to decompose (§ 5) $\mathfrak{F}'$ into a force $\mathfrak{F}_2$, along the path, and a force $\mathfrak{F}_1$, perpendicular to it. The latter component will have the direction of a possible displacement, because $\mathfrak{F}'$ and $\mathfrak{F}_2$ have such directions.

For a given force the three components obtained in the above way are wholly determinate. We shall always denote them by the indices 0, 1, 2.

§ 17. We may imagine each material point to be acted on by a force in the direction of the acceleration of the point and equal to the product of the acceleration and the mass. Let $\mathfrak{G}$ be the force acting on the system in this special case.

Now we have in the supposition just made $X_\nu = m_\nu \ddot{x}_\nu$, from which we find $m\ddot{x}_\nu$ for the elements of $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = m\mathfrak{f}$ for the force itself, and, by (23),

$$\mathfrak{G}_0 = mv^2\mathfrak{c}_0, \quad \mathfrak{G}_1 = mv^2\mathfrak{c}_f, \quad \mathfrak{G}_2 = m\dot{v}\mathfrak{D}$$

for its three components.

§ 18. What precedes has prepared us for the consideration of the fundamental principles by which the motion of the system under the action of given forces is to be determined. We may in the first place start from the following assumptions:

a) The system will have the acceleration $\mathfrak{f}$, if the force is precisely $\mathfrak{G} = m\mathfrak{f}$.

b) Two forces $\mathfrak{F}_a$ and $\mathfrak{F}_b$ may have the same influence on the motion. For this it is necessary and sufficient that the force

$$\mathfrak{F}_a - \mathfrak{F}_b$$

should be perpendicular to all possible displacements.

Let the system be subject to the force $\mathfrak{F}$ with the components $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, and let the acceleration be $\mathfrak{f}$. Then, by the first principle, $\mathfrak{F}$ has the same influence as $\mathfrak{G} = m\mathfrak{f}$, and by the second principle $\mathfrak{F} - \mathfrak{G}$ must be perpendicular to all possible displacements. This amounts to the same thing as $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{G}_2$, or

$$\mathfrak{F}_1 = mv^2\mathfrak{c}_f, \quad \mathfrak{F}_2 = m\dot{v}\mathfrak{D}. \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

It will be immediately seen that the above assumptions are equivalent to d'Alembert's principle. We might also have replaced them by the following rule:

Decompose the acceleration into two components $\mathfrak{f}_0$ and $\mathfrak{f}'$, the first perpendicular to all possible displacements, and the second in the direction of such a displacement. Decompose the force $\mathfrak{F}$ in the same way into the components $\mathfrak{F}_0$ and $\mathfrak{F}'$. Then the equation of motion will be

$$\mathfrak{F}' = m\mathfrak{f}'.$$

This leads directly to the equations (24), by which it is clearly seen that the change in the direction of the path is determined by the component $\mathfrak{F}_1$, and the change in the value of the velocity by the component $\mathfrak{F}_2$. It is to be kept in mind that the first of the formulae (24) is a *vector equation*. In general the free curvature, as well as the force $\mathfrak{F}_1$, may have different directions, in some cases a great many of them. The equation does not only show us *to what amount* the path deviates from one of least curvature, but also *to which side* the deviation takes place.

If $\mathfrak{F} = 0$, we have $\mathfrak{c}_f = 0$ and $\dot{v} = 0$; we are then led back to the fundamental law of Hertz.

In connexion with the above decomposition of the force it may be noted that the work of the force, corresponding to an element of the path, is given by

$$(\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{s}) = (\mathfrak{F}_0 \cdot d\mathfrak{s}) + (\mathfrak{F}_1 \cdot d\mathfrak{s}) + (\mathfrak{F}_2 \cdot d\mathfrak{s}).$$

Since both $\mathfrak{F}_0$ and $\mathfrak{F}_1$ are perpendicular to the path, this reduces

to the last term. Hence, putting $d\mathfrak{s} = v\mathfrak{D}$ and using the last of the formulae (24), we may write

$$(\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{s}) = mv\dot{v} = dT.$$

If now the system is a *conservative* one with potential energy U, we have for the work $-dU$, so that the sum

$$T + U = E$$

remains constant.

§ 19. Let us now return to the equation (21), taking for the original path one that is described under the action of the existing forces. Attending to (24), we may write in (21)

$$(\mathfrak{c}_f \cdot \delta\mathfrak{s}) = \frac{1}{mv^2}(\mathfrak{F}_1 \cdot \delta\mathfrak{s}) = \frac{1}{mv^2}[(\mathfrak{F} \cdot \delta\mathfrak{s}) - (\mathfrak{F}_0 \cdot \delta\mathfrak{s}) - (\mathfrak{F}_2 \cdot \delta\mathfrak{s})].$$

Now we have $(\mathfrak{F}_0 \cdot \delta\mathfrak{s}) = 0$, because $\mathfrak{F}_0$ is perpendicular to the virtual displacement. Further:

$$(\mathfrak{F}_2 \cdot \delta\mathfrak{s}) = m\dot{v}(\mathfrak{D} \cdot \delta\mathfrak{s}) = m\dot{v}(\delta\mathfrak{s})_s = mv'v(\delta\mathfrak{s})_s = mv\frac{dv}{ds}(\delta\mathfrak{s})_s,$$

so that (21) becomes

$$\delta ds = d(\delta\mathfrak{s})_s + \frac{1}{v}dv(\delta\mathfrak{s})_s - \frac{1}{mv^2}(\mathfrak{F} \cdot \delta\mathfrak{s})ds,$$

or, multiplied by mv,

$$mv\delta ds + \frac{1}{v}(\mathfrak{F} \cdot \delta\mathfrak{s})ds = md[v(\delta\mathfrak{s})_s].$$

The scalar product $(\mathfrak{F} \cdot \delta\mathfrak{s})$ on the left is the work of the force for the virtual displacement; in the case of a conservative system, it may be denoted by $-\delta U$. The result therefore takes the form

$$mv\delta ds - \frac{1}{v}\delta U ds = md[v(\delta\mathfrak{s})_s]. \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

§ 20. Thus far, we have spoken only of a varied path, but not of a *varied motion*; we have said nothing about the instants at which we imagine the varied positions to be reached. In this respect we may make different assumptions, and among these there are two which lead to a simple result, if the equation (25) is integrated over a part of the path.

a) Let the varied positions A' be reached *at the same moments* as the corresponding positions A in the original motion. Then

$$mv\delta ds = mv\delta v \cdot dt = \delta T dt;$$

(25) becomes

$$\delta(T - U)dt = md[v(\delta\mathfrak{s})_s]$$

and, if integrated along the path which the system travels over between the instants t_1 and t_2, in the supposition that $\delta\mathfrak{s} = 0$ for $t = t_1$ and $t = t_2$,

$$\delta\int(T - U)dt = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

This is Hamilton's principle, which is in itself sufficient for the determination of the motion really taking place under the action of given forces.

b) In the second place we shall assume that *in the varied motion the energy $T + U$ has the same constant value E as in the original motion.* This value E being given, and U being known for every position, the value of the velocity is given by

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}.$$

This second assumption therefore, as well as the first, leaves no doubt as to the velocity with which the system is supposed to travel along its varied path.

The total energy remaining constant, we have now

$$\delta U = -\delta T = -mv\delta v,$$

and (25) becomes

$$\delta(vds) = d[v(\delta \mathfrak{s})_s],$$

or

$$\delta(\sqrt{E - U}ds) = \sqrt{\tfrac{1}{2}m}\,d[v(\delta \mathfrak{s})_s] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Hence, if we integrate along a certain part of the path, supposing again the extreme positions to remain unchanged,

$$\delta\int\sqrt{E - U}ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

This is the principle of least action in the form that has been given to it by Jacobi. Indeed we may define the action along a path of the system as the integral that occurs in the equation (28).[1]) Its value may be calculated for any path A_1A_2 whatsoever. For the sake of brevity we shall denote it by $V_{A_1}^{A_2}$.

Both the principle of Hamilton and that of Jacobi have been here obtained by the consideration of the variation in the length of an element of a curved path that is caused by virtual displacements of the system. It is clear that both principles hold for every system, be it *holonomic* or not, the only condition being that the virtual displacements do not violate the connexions. We must however keep in mind that it is only in the case of holonomic systems that the varied motion may be said to be, as well as the original one, a *possible* motion. Hence, if we wish to compare the motion taking place under the action of the given forces with another motion, differing infinitely little from it, and such as not to be excluded by the connexions, the two principles will only be true for holonomic systems.[2]) The variations of the integrals occurring in (26) and (28) will be 0, if the

1) The action is usually defined as the integral multiplied by $\sqrt{2m}$.

2) See O. Hölder, Gött. Nachr., Math. phys. Kl., 1896, p. 122.

original motion is not only a possible one, but such as may really take place under the influence of the acting forces. We shall call such a motion a *real* or a *natural* one.

§ 21. We shall conclude by briefly showing how some well known propositions may be presented in a form, agreeing with what precedes. These propositions relate to holonomic systems. Let us therefore assume that the connexions are expressed by i equations which must be satisfied, independently of the time, by the coordinates x_ν, and let us confine ourselves to *possible positions*, i. e. such as agree with these i conditions. We might determine these positions by $3n - i$ "free" coordinates, but, in what follows, it is not necessary to do so.

If, in addition to the equations expressing the connexions, we assume still one other equation

$$F(x_1, x_2, \cdots x_{3\nu}) = 0$$

between the coordinates, we shall call the totality of positions satisfying that equation a *surface of positions.*

In case one of these positions A is reached by a certain path — the other positions in this path not all of them belonging to the surface — the path may be said to *cut* the surface in the position A. For simplicity's sake it will be supposed in such a case that the surface and the path have only that one position in common.

Starting from a position A, which belongs to, or lies in a surface of positions S, we may give to the system infinitely small displacements, in such directions that by them the position does not cease to belong to the surface. Displacements of this kind may be said to *lie in the surface F.* For their elements δx_ν we have, in addition to the equations corresponding to (9), the condition

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = 0,$$

so that of the $3n$ elements δx_ν, $i + 1$ may be expressed in terms of the remaining $3n - i - 1$.

Again, we may subject an infinitely small possible displacement $\delta \mathfrak{s}'$, starting from a position A in the surface F, to the condition that it shall be perpendicular to *all* infinitely small displacements beginning in A and lying in the surface, a property which we shall express by saying that $\delta \mathfrak{s}'$ is *perpendicular to the surface itself.* The condition implies that

$$\sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \delta x_\nu \delta x'_\nu = 0$$

for all admissible values of δx_ν. This gives in all $3n - i - 1$ inde-

pendent relations between the elements $\delta x'_\nu$. To these are to be added i equations of the form (9); so that we have $3n - 1$ linear and homogeneous equations, just sufficient for the determination of the *ratios* of the elements $\delta x'_\nu$. Hence, a position A in the surface F having been chosen, there is always one, and only one direction of a possible displacement perpendicular to the surface.

Let S be a surface of positions, A a position that does not belong to it but is infinitely near others that do, B a position in the surface, such that the infinitely small displacement $A \rightarrow B$ is perpendicular to S, and C any position in S infinitely near B. Let ϑ be the angle between the displacements $A \rightarrow B$ and $A \rightarrow C$, and let us denote by $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ the lengths of these displacements. Then

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cos \vartheta.$$

This follows from what has been said in § 5, if we consider that $A \rightarrow C$ is the resultant of the displacements $A \rightarrow B$ and $B \rightarrow C$.

§ 22. Henceforth we shall treat only of *natural* motions, taking place with a fixed value E of the total energy, which we choose once for all. We shall suppose that, if O and A are any two positions, there is one and only one such a natural motion which leads from O to A. The action along the path of this motion,

$$V_O^A = \int_O^A \sqrt{E - U}\, ds,$$

will have a definite value, depending on the coordinates of O and A, and we shall examine the variations of this action, if we change the final position A, the initial one being fixed.

In the first place it is clear that, if we move A along a path issuing from O, V_O^A will be the greater, the farther A recedes from O. Indeed, V_O^A presents a certain analogy with the length of the path, the difference being that, in calculating the action, we must multiply each element ds by the factor $\sqrt{E - U}$, which changes with the position.

The increment of the action, corresponding to an element of the path, is obviously

$$\sqrt{E - U}\, ds.$$

In the second place we compare two paths, both issuing from O, but in directions that differ infinitely little from each other. We shall proceed along these so far, say till we have reached the positions A and A', that the action is equal in the two cases, i. e.

$$V_O^A = V_O^{A'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Now, the motion $O \rightarrow A'$ may be conceived as the result of an infinitely small variation of the motion $O \rightarrow A$; we may therefore

apply the equation we deduce from (27), if we integrate from O to A. On account of (29), we get 0 on the left-hand side; hence, the projection $(\delta \mathfrak{s})_s$, which vanishes for the position O, must likewise be 0 for the position A, and the infinitely small displacement $A \rightarrow A'$ is found to be perpendicular to the path OA.

We may next fix our attention on all paths that issue from a definite position O. In each of these we choose a position A at such a distance from O, that the action V_O between O and these positions has the same value for all of them. The positions A will belong to a certain surface, and, by what has just been found, this will be cut at right angles by all the paths. We may therefore call these latter the orthogonal trajectories of the surfaces

$$V_0^A = \text{const.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Let S be that one of these surfaces, to which a certain position A belongs, and let B be some position, infinitely near A, and further from O than the surface S. In order to find an expression for the difference $V_0^B - V_0^A$, we consider also the surface S', likewise belonging to the group (30), and containing the position B; this surface will be cut in a certain position C by the path OA prolonged. If ϑ is the angle between $A \rightarrow B$ and the direction of the path in A, we shall have

$$V_0^B - V_0^A = V_0^C - V_0^A = \sqrt{E-U} \cdot AC = \sqrt{E-U} \cdot AB \cos \vartheta \quad (31)$$

§ 23. Instead of considering the paths issuing from one and the same position O, we may also begin by choosing a surface of positions S_0, and think of all the motions in which the system starts from a position belonging to this surface, in a direction perpendicular to it. We shall suppose that any given position A may be reached by one and only one of these motions, and we shall write $V_{S_0}^A$ for the action along the path leading from S_0 to A.

This function has properties similar to those of the function we have studied in the preceding §. The paths are the orthogonal trajectories of the surfaces

$$V_{S_0}^A = \text{const.},$$

and the change in the action, caused by an infinitesimal variation of A is given by a formula of the same form as (31).

§ 24. The values of V_0^A and $V_{S_0}^A$ may depend in many different ways on the coordinates of the variable position A, according to the choice of the initial position O or the surface S_0 from which we start. All these different functions have however one common property, which follows immediately from what has been said, and for which a concise form of expression is obtained in the following way.

If Q is a function of the coordinates, we may, for every infinitely small possible displacement $d\mathfrak{s}$, beginning in a position A, calculate the ratio

$$\frac{dQ}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

The value of this will of course depend on the direction of $d\mathfrak{s}$, and the position A being chosen, there will be one definite direction n, for which the ratio takes the largest positive value. Considering the two surfaces for which the function has the values Q and $Q + dQ$, and remembering that the part intercepted by these surfaces is smaller for a path by A perpendicular to the surface Q, than for any other path through A (§ 21), we see that the direction n is perpendicular to the surface.

Now, if we denote the maximum value of (32) by DQ, the property in question of the functions V may be expressed by

$$DV_0 = \sqrt{E-U} \text{ and } DV_{s_0} = \sqrt{E-U}.$$

These formulae follow directly from the foregoing considerations. We may write them in the form of a partial differential equation which is satisfied by V_0 and by V_{s_0}.

§ 25. Let R be any solution of this differential equation, i. e. a function of the coordinates, such that

$$DR = \sqrt{E-U}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

then the orthogonal trajectories of the surfaces

$$R = \text{const.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

are natural paths of the system.

The proof of this is as follows: Imagine the infinitely small displacements $d\mathfrak{s}$, lying between the two consecutive surfaces

$$R = C \text{ and } R = C + dC,$$

that is to say, the displacements whose initial position belongs to the first and whose final position belongs to the second surface, and subject them to the further condition that they are to be perpendicular to the first surface. Then we have by (33)

$$\frac{dC}{ds} = \sqrt{E-U}, \quad \sqrt{E-U}\,ds = dC,$$

so that the action is the same for all these elements, whichever be the position in the surface from which they start.

On the contrary, if $d\mathfrak{s}'$ is another element of path between the two surfaces, not perpendicular to them, but making an angle ϑ with one of the first-named displacements $d\mathfrak{s}$ in the immediate vicinity, we

shall have

$$ds' = \frac{ds}{\cos \vartheta},$$

and for the action along ds'

$$\frac{dC}{\cos \vartheta}.$$

It appears from this that

$$\delta \{\sqrt{E-U}ds\} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

if we pass from an element ds, perpendicular to $R = C$, to an element ds', lying between the same two surfaces, and of such a direction that ϑ is infinitely small.

This being established, we may take an arbitrarily chosen part MN of an orthogonal trajectory of the surfaces (34), we may divide it into elements by means of surfaces belonging to the group, and infinitely near each other, and we may give to MN an infinitely small variation, without however changing the positions M and N. Then, applying what has just been said to every element of MN, and integrating, we find

$$\delta \int \sqrt{E-U}ds = 0,$$

showing that MN is a natural path.

At the same time the meaning of the function R becomes apparent. Its value in a certain position A is the action along a trajectory, ending in A and beginning at the surface

$$R = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

§ 26. We shall now assume that we know a function $R(c)$ of the coordinates, satisfying the differential equation (33) and containing an arbitrary constant c.

Then $\frac{\partial R}{\partial c}$, which is itself a function of the coordinates, will have the same value for all positions lying on a path P, perpendicular to the surface (36).

In order to show this, we consider the surfaces whose equations are

$$R(c) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

and

$$R(c+dc) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Let A_0 be the position in the first surface where the path P begins, A any position belonging to P. We shall suppose this path A_0A to cut the surface (38) in a position A_1, which is, of course, infinitely near A_0. We shall finally think of the path, such as there certainly is one, leaving the surface (38) in a perpendicular direction and terminating in A. It has a definite initial position in (38), infinitely near A_1, and which we shall call A'.

Since

$$V^A_{A_1} = V^A_{A'},$$

as may be deduced from (27), we have

$$V^A_{A'} - V^A_{A_0} = V^A_{A_1} - V^A_{A_0} = - V^{A_1}_{A_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Now, $V^A_{A_0}$ and $V^A_{A'}$ are the values of $R(c)$ and $R(c + dc)$ for the position A. Consequently, the first member of (39) is the value of $\frac{\partial R}{\partial c} dc$ for this position, and

$$\frac{\partial R}{\partial c} = - \frac{V^{A_1}_{A_0}}{dc} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

The right-hand member of this formula remaining the same if we move the system along the path P, the proposition is proved.

§ 27. A remarkable and well known theorem of Jacobi is a direct consequence of our last proposition. If we have found a function R of the coordinates, satisfying the differential equation (33) and containing, besides an additive constant, $3n - i - 1$ other arbitrary constants c_1, c_2, etc., the values of $\frac{\partial R}{\partial c_1}, \frac{\partial R}{\partial c_2}$ etc. will not change, while the system describes a path, perpendicular to the surface

$$R(c_1, c_2, c_3, \cdots) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

The $3n - i - 1$ equations of such a path will therefore be of the form

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = \gamma_1, \frac{\partial R}{\partial c_2} = \gamma_2, \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

where γ_1, γ_2, etc. are constants.

The total number of the constants c and γ is $2(3n - i - 1)$; this is just sufficient for the representation of every path that may be described with the chosen value of the energy. If we confine ourselves to fixed values of the constants c, and change those of the constants γ, we shall obtain all paths that are perpendicular to one and the same surface (41). One of these paths will be distinguished from the other by the value of the action along the parts of the path, lying between the surface (41) on one side, and each of the surfaces

$$R(c_1 + dc_1, c_2, c_3, \cdots) = 0,$$
$$R(c_1, c_2 + dc_2, c_3, \cdots) = 0,$$
$$R(c_1, c_2, c_3 + dc_3, \cdots) = 0,$$

on the other. Indeed, by (42) the action along these parts is $-\gamma_1 dc_1$, $-\gamma_2 dc_2$ etc.

By giving other values to the constants c, we shall change the surface (41) and we shall find the paths that are perpendicular to the new surface.

II.

Ein allgemeiner Satz, die Bewegung einer reibenden Flüssigkeit betreffend, nebst einigen Anwendungen desselben.

(Amsterdam, Zittingsverlag Akad. v. Wet., 5 [1896], p. 168.)[1])

§ 1. Wir betrachten eine inkompressible reibende Flüssigkeit und nennen ϱ die Dichte, u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, X, Y, Z die Komponenten der pro Volumeneinheit wirkenden äußeren Kraft $\mathfrak{F}$, X_x, X_y usw. die Spannungskomponenten für Flächenelemente, die senkrecht zu den Koordinatenachsen stehen, p den Druck und μ den Reibungskoeffizienten. In den allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \mathrm{X} + \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right), \\ \varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \mathrm{Y} + \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right), \\ \varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \mathrm{Z} + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ist dann

$$X_x = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ usw.} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ usw.} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Es sei weiter S ein mit der Flüssigkeit gefüllter Raum, der von einer Fläche σ begrenzt wird. Diese letztere kann aus verschiedenen voneinander getrennten Teilen bestehen; sie kann im Inneren der Flüssigkeit liegen, aber auch ganz oder zum Teil mit der Oberfläche fester Körper zusammenfallen. Wir nehmen ein für allemal an, daß die Flüssigkeit nirgendwo an eine zweite Flüssigkeit oder an einen leeren Raum grenzt, und daß an den festen Körpern keine Gleitung stattfindet. In jedem Punkte der Berührungsfläche stimmt demnach die Geschwindigkeit der Flüssigkeit mit der des festen Körpers überein.

---

1) Die Abhandlung erscheint hier zum größten Teil in neuer Bearbeitung.

Unter dS und $d\sigma$ verstehen wir ein Raum- und ein Flächenelement, unter n die in einem Punkte von σ, in Bezug auf den Raum S nach außen gezogene Normale, unter α, β, γ die Winkel, welche diese mit den Koordinatenachsen bildet, und unter X_n, Y_n, Z_n die Spannungskomponenten an der Fläche, so daß

$$X_n = X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma, \text{ usw.} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist.

Die im folgenden vorkommenden Integrale erstrecken sich über den ganzen Raum S, bzw. die ganze Fläche σ.

§ 2. Wir wollen einen Satz ableiten, zu dem man gelangt, wenn man zwei den Bewegungsgleichungen genügende Zustände ins Auge faßt. Für den einen wenden wir die oben eingeführten Bezeichnungen an, für den anderen dieselben Buchstaben, jedoch mit Strichen versehen, insofern es sich um veränderliche Größen handelt. Die mit (1)—(5) übereinstimmenden Gleichungen für den zweiten Zustand werden wir, ohne sie aufzuschreiben, als (1')—(5') zitieren.

Wir gehen nun aus von dem Oberflächenintegral

$$\Omega = \int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma.$$

Indem wir die Werte (5) darin einführen und beachten, daß für jede Funktion φ

$$\int \varphi \cos\alpha\, d\sigma = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS, \quad \text{usw.},$$

erhalten wir zunächst

$$\Omega = \int \left[\frac{\partial (u' X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u' X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u' X_z)}{\partial z} + \text{ usw.} \right] dS \quad . \quad . \quad (6)$$

Das „usw." bedeutet hier, und ebenso in anderen Fällen, daß den vorhergehenden Gliedern diejenigen, welche daraus durch zweimalige zyklische Vertauschung der Buchstaben entstehen, hinzuzufügen sind.

Wir zerlegen den Ausdruck (6) in

$$\Omega_1 = \int \left[u' \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + \text{ usw.} \right] dS,$$

$$\Omega_2 = \int \left[X_x \frac{\partial u'}{\partial x} + X_y \frac{\partial u'}{\partial y} + X_z \frac{\partial u'}{\partial z} + \text{ usw.} \right] dS$$

und bilden den letzten Teil durch Substitution der Werte (3) und (4) um. Wegen der Beziehung (1') verschwinden dabei die Glieder mit p, so daß

$$\Omega_2 = \mu \int \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \text{ usw.} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \text{ usw.} \right] dS$$

wird. Da sich nun dieser Ausdruck bei Vertauschung von u, v, w mit

u', v', w' nicht ändert, so gelangt man zu demselben Wert, wenn man von dem Integral

$$\Omega' = \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma$$

ausgeht, und in derselben Weise wie oben verfährt.

Es ergibt sich also, wenn man

$$\Omega_1' = \int \left[u\left(\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} \right) + \text{ usw.} \right] dS$$

setzt,

$$\Omega - \Omega' = \Omega_1 - \Omega_1'.$$

In die Glieder Ω_1 und Ω_1' führen wir jetzt die aus (2) und (2′) folgenden Werte von

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.}$$

$$\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z}, \quad \text{usw.}$$

ein. Wir erhalten dann den Satz

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma - \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma =$$

$$= \varrho \int \left[\left(u' \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u'}{dt} \right) + \text{ usw.} \right] dS - \int [(u' \mathrm{X} - u \mathrm{X}') + \text{ usw.}]\, dS +$$

$$+ \varrho \int \left[\left\{ u' \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - u \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \right\} + \text{usw.} \right] dS, \quad \text{(I)}$$

oder, wenn wir uns von jetzt ab auf unendlich kleine Werte der Geschwindigkeit und der äußeren Kräfte beschränken, wodurch das letzte Integral fortfällt,

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma - \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma =$$

$$= \varrho \int \left[\left(u' \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u'}{\partial t} \right) + \text{ usw.} \right] dS - \int [(u' \mathrm{X} - u \mathrm{X}') + \text{ usw.}]\, dS \quad \text{(I')}$$

Eine weitere Vereinfachung erreichen wir dadurch, daß wir die beiden Bewegungszustände als stationär voraussetzen. Dann wird

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma - \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma =$$

$$= - \int [(u' \mathrm{X} - u \mathrm{X}') + \text{ usw.}]\, dS \quad . \quad . \quad \text{(I'')}$$

§ 3. Die letzte Gleichung wenden wir zunächst in folgender Weise an. Es sei die Flüssigkeit von ruhenden Wänden eingeschlossen, und es mögen sich in derselben beliebige gleichfalls ruhende feste Körper befinden. Nehmen wir dann für S den ganzen von der Flüssigkeit ein-

genommenen Raum, so verschwinden u, v, w, u', v', w' in allen Punkten von σ. Unsere Gleichung reduziert sich daher auf

$$\int (u'X + v'Y + w'Z)\, dS = \int (uX' + vY' + wZ')\, dS \quad . \quad . \quad (I''')$$

Kürzer schreiben wir hierfür

$$\int (\mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{F})\, dS = \int (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{F}')\, dS,$$

wo $(\mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{F})$ und $(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{F}')$ die skalaren Produkte aus der im einen Fall bestehenden Geschwindigkeit mit der im anderen Fall wirkenden Kraft bedeuten.

Ein stationärer Bewegungszustand kann offenbar durch äußere Kräfte hervorgerufen werden, die an jeder Stelle konstant erhalten werden, und die wir uns in beliebiger Weise über den Raum verteilt denken können. Es mögen nun diese Kräfte im einen Fall auf einen unendlich kleinen Raum S am Punkte P, und im anderen Fall auf einen unendlich kleinen Raum S′ am Punkte P' beschränkt sein. Da in dieser Voraussetzung die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ an allen Stellen von S′ gleiche Größe und Richtung hat, und ebenso $\mathfrak{v}'$ in allen Punkten von S, so verwandelt sich die Gleichung in

$$\left(\mathfrak{v}'_P \cdot \int_S \mathfrak{F}\, dS\right) = \left(\mathfrak{v}_{P'} \cdot \int_{S'} \mathfrak{F}'\, dS\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo die Integrale Vektoren sind und die Indizes P, P', S, S′ wohl keiner Erklärung bedürfen.

Wir wollen nun

$$\int_S \mathfrak{F}\, dS = \mathfrak{K}, \qquad \int_{S'} \mathfrak{F}'\, dS = \mathfrak{K}'$$

setzen, und die Größen dieser Vektoren mit K und K', ihre Richtungen aber mit h und h' bezeichnen. Ferner sagen wir zur Abkürzung, daß im einen Falle im Punkte P eine „Stromerregung“ $\mathfrak{K}$ wirke und im anderen Falle im Punkte P' eine Stromerregung $\mathfrak{K}'$. Führen wir nun noch für die Komponente eines Vektors $\mathfrak{v}$ nach der Richtung h die Schreibweise $\mathfrak{v}_h$ ein, so wird

$$\mathfrak{v}'_{hP} K = \mathfrak{v}_{h'P'} K', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und, wenn wir $K = K'$ setzen,

$$\mathfrak{v}'_{hP} = \mathfrak{v}_{h'P'},$$

d. h.: Wenn eine unendlich kleine Stromerregung, die im Punkte P in der Richtung h wirkt, in einem Punkte P' eine Geschwindigkeit hervorruft, deren Komponente nach der beliebig gewählten Richtung h' die Größe a hat, so hat auch die nach h zerlegte Geschwindigkeit, die in P entsteht, falls in P' eine Stromerregung von derselben Größe wie die zuerst genannte und von der Richtung h' wirksam ist, eben dieselbe Größe a.

Aus diesem Satze, der auch dann gilt, wenn die Flüssigkeit sich bis ins Unendliche erstreckt (wobei noch beliebige feste Körper in dieselbe eingetaucht sein können), folgt, daß, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des Raumes S, für den durch die Stromerregung in P hervorgebrachten Zustand der Vektor $\mathfrak{K} = \int_S \mathfrak{F}\, dS$ maßgebend ist. Solange dieser bestimmte Richtung und Größe hat, kommt es weder auf die Größe des Raumes S, noch auf die Verteilung der Kraft $\mathfrak{F}$ über denselben an.

§ 4. Bevor wir uns weiteren Folgerungen aus der Gleichung (I) zuwenden, mögen einige Bewegungszustände erwähnt werden, die entweder zu den stationären gehören, oder nahe damit verwandt sind. Äußere auf das Innere der Flüssigkeit wirkende Kräfte schließen wir dabei aus, so daß, für unendlich kleine Geschwindigkeiten, die Bewegungsgleichungen die Gestalt annehmen

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \quad \text{usw.}$$

Ist der Zustand stationär, so lauten sie

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \quad \text{usw.} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

a) Ein ruhender fester Körper M befinde sich in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, die, wenn der Körper nicht da wäre, an allen Stellen mit der gleichen und gleichgerichteten Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ strömen würde. Dann kann ein wirklich stationärer Zustand bestehen, den wir als „ein durch den Körper M gestörtes, sonst homogenes Strömungsfeld“ bezeichnen können.

b) Wir geben dem ganzen soeben betrachteten System eine Geschwindigkeit, gleich und entgegengesetzt der mit $\mathfrak{c}$ bezeichneten. Dadurch kommt die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe, während der Körper M eine konstante Translation erhält. Der neue Zustand ist stationär in Bezug auf ein mit dem Körper verbundenes, nicht aber in Bezug auf ein unbewegliches Koordinatensystem.

c) In der Flüssigkeit befinde sich ein fester Körper M, der eine konstante Translation $\mathfrak{c}$ hat; überdies stehe sie mit beliebigen ruhenden Körpern in Berührung. Sie möge sich, wenn sie von letzteren nicht ganz eingeschlossen ist, ins Unendliche erstrecken. Unter diesen Umständen kann offenbar eine stationäre Bewegung nicht entstehen. Indes kann man, wenn man sich auf unendlich kleine Geschwindigkeiten beschränkt, den Bewegungsgleichungen genügen durch die Annahme, daß (Zustand A) zu jeder beliebigen Zeit t die Werte von u, v, w, p mit den Werten übereinstimmen, die bei einem gewissen wirklich stationären Zustand (B) vorkommen. Diesen letzteren erhalten wir, wenn

wir den Körper M durch Flüssigkeit ersetzen, uns eine ruhende Fläche σ denken, in der Lage, welche die Oberfläche von M soeben zur Zeit t erreicht hatte, und in irgend einer Weise dafür sorgen, daß die in σ liegenden Flüssigkeitsteilchen fortwährend die Geschwindigkeit c haben. Man sieht leicht, daß dann eine stationäre Bewegung möglich ist, und daß die Annahme über die Geschwindigkeit an der Fläche σ mit der Bedingung verträglich ist, daß die Flüssigkeitsmenge, welche den von σ eingeschlossenen Raum verläßt, ebenso groß sein muß wie die, welche in denselben hineintritt.

Daß nun der Zustand A, obgleich er für jeden neuen Zeitpunkt wieder mit einem anderen Zustande B übereinstimmt, dennoch den Bewegungsgleichungen genügt, geht daraus hervor, daß während die Differentialquotienten nach x, y, z bei A und B dieselben Werte haben, die Größen $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ für A unendlich klein zweiter Ordnung und für B Null sind.

d) Ähnliches wie von einer Translation gilt auch von einer gleichmäßigen Rotation eines Körpers um eine feste Achse. Welches auch die Gestalt des Körpers sei, und welche Lage derselbe gegen andere ruhende Körper einnehmen möge, man kann für jeden Augenblick die Bewegung der Flüssigkeit bestimmen, indem man sich denkt, daß die Oberfläche des Körpers in der dann erreichten Lage verharrt, und daß, nachdem der Körper durch Flüssigkeit ersetzt worden ist, an dieser Fläche fortwährend eine Flüssigkeitsbewegung unterhalten wird, die mit der Bewegung der Körperoberfläche im betreffenden Zeitpunkt übereinstimmt.

Wenn im folgenden von einem fortschreitenden oder rotierenden Körper die Rede ist, wollen wir immer an den Fall denken, daß an einer ruhenden Fläche in der Flüssigkeit fortwährend die der Bewegung des Körpers entsprechende Geschwindigkeit existiert.

§ 5. Wir werden uns der Formeln zu bedienen haben, welche die durch eine mit konstanter Geschwindigkeit c fortschreitende Kugel hervorgebrachte Bewegung darstellen. Dabei setzen wir die Flüssigkeit als unbegrenzt voraus. Wir legen den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt des Körpers, die x-Achse in die Richtung seiner Geschwindigkeit, und nennen R den Radius der Kugel und r die Entfernung eines äußeren Punktes vom Mittelpunkt. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4} R^3 c \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \frac{3}{4} Rc \left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right), \\ v &= -\frac{3}{4} R^3 c \frac{xy}{r^5} + \frac{3}{4} Rc \frac{xy}{r^3}, \\ w &= -\frac{3}{4} R^3 c \frac{xz}{r^5} + \frac{3}{4} Rc \frac{xz}{r^3}, \end{aligned}\right\} \quad . . . \quad (10)$$

$$p = \frac{3}{2}\mu Rc\frac{x}{r^3} + C, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

wo C eine unbestimmte Konstante bedeutet.

Der Beweis dieser Formeln findet sich z. B. in Kirchhoff's Mechanik, wo auch gezeigt wird, daß die Flüssigkeit auf die Kugel einen der Translation entgegengesetzt gerichteten Widerstand von der Größe

$$W = 6\pi\mu Rc$$

ausübt.

Dieser Ausdruck gibt auch die Kraft, mit welcher ein Flüssigkeitsstrom auf eine ruhende Kugel (§ 4, a) wirkt, und im allgemeinen gilt der Satz: Hat eine Kugel eine beliebige Translation in einem homogenen Strömungsfelde, dann ist die auf dieselbe wirkende Kraft

$$\mathfrak{W} = 6\pi\mu R\mathfrak{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

wenn der Vektor $\mathfrak{c}$ die relative Geschwindigkeit der entfernten Flüssigkeit gegen die Kugel bedeutet.

Es ist noch zu bemerken, daß, wenn r sehr groß gegen R ist, die Ausdrücke (10) sich auf die letzten Glieder reduzieren und daß dann, wie sich aus (3) und (4) ergibt, die Spannungskomponenten folgende Werte haben:

$$\left.\begin{array}{lll} X_x = x^2\xi, & Y_y = y^2\xi, & Z_z = z^2\xi, \\ X_y = Y_x = xy\xi, & Y_z = Z_y = yz\xi, & Z_x = X_z = zx\xi, \end{array}\right\} \quad . \quad (13)$$

wo

$$\xi = -\frac{9}{2}\mu Rc\frac{x}{r^5}$$

ist. Die in X_x, Y_y, Z_z auftretende additive Konstante haben wir hierbei fortgelassen.

§ 6. Der allgemeine Fall, daß in der Flüssigkeit eine Anzahl von Körpern mit gegebener Bewegung liegen, läßt sich wegen der linearen Gestalt der Gleichungen auf die Spezialfälle zurückführen, in welchen jedesmal nur ein Körper eine vorgeschriebene Bewegung hat, die übrigen aber in Ruhe erhalten werden. Was nun diese Spezialfälle anbelangt, so kann man sie in folgender Weise behandeln.

Es sei σ eine Fläche, an welcher die Geschwindigkeitskomponenten die gegebenen Werte

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1, \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

haben müssen, und σ' eine Fläche (die sich aus mehreren voneinander getrennten Teilen zusammensetzen kann), an welcher zugleicherzeit die Bedingungen

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

zu erfüllen sind. Wir bestimmen einen Bewegungszustand 1 so, daß an σ den Bedingungen (14) genügt wird, daß aber erst in unendlicher

Entfernung die Geschwindigkeit Null wird; es ist das der Zustand, der entstehen würde, wenn die Fläche σ' nicht da wäre und die Flüssigkeit sich ins Unendliche erstreckte. Die Geschwindigkeit, welche in diesem Falle an der Fläche σ' bestehen würde, bezeichnen wir mit (u'_1, v'_1, w'_1), und wir unterwerfen nun weiter einen Bewegungszustand 2 der Bedingung, daß in jedem Punkte von σ'

$$u = -u'_1, \quad v = -v'_1, \quad w = -w'_1$$

ist; dabei sehen wir von der Fläche σ ab. Wir erhalten dann an dieser eine von Null verschiedene Geschwindigkeit, etwa (u_2, v_2, w_2); dieser gleich und entgegengesetzt soll dann wieder die Geschwindigkeit bei einem Zustande 3 sein, bei dessen Ableitung wir uns um die Fläche σ' nicht kümmern.

Indem wir in dieser Weise fortfahren und uns alle die Zustände 1, 2, 3, usw. superponiert denken, erhalten wir für die Komponenten der Geschwindigkeit unendliche Reihen, die, wenn sie konvergent sind, offenbar allen Bedingungen der Aufgabe genügen. In einfachen Fällen könnte man die Rechnung wirklich durchführen; z. B. kann man die Störung oder, wie man auch sagen kann, die „Zurückwerfung" eines bekannten Bewegungszustandes durch eine ruhende Kugel immer bestimmen. Befindet sich diese in einem homogenen Strömungsfelde, so genügen die Formeln von § 5 zur Lösung der Aufgabe und für verwickeltere Fälle liefert die Theorie der Kugelfunktionen die nötigen Hilfsmittel.

Probleme wie die hier erwähnten vereinfachen sich erheblich, sobald die Dimensionen eines Körpers unendlich klein sind. Dann sind auch die Geschwindigkeiten, die er in endlicher Entfernung hervorruft, sei es dadurch, daß er selbst in Bewegung versetzt ist, oder indem er eine bereits vorhandene Bewegung reflektiert, unendlich klein. Somit darf man von jeder Bewegung absehen, die eine zweimalige, oder, wenn sie von dem Körper selbst ausging, eine einmalige Reflexion an diesem erlitten hat.

Eine weitere Vereinfachung besteht darin, daß jedes durch äußere Ursachen erregte Strömungsfeld in dem von dem unendlich kleinen Körper eingenommenen Raum als homogen gelten kann. Deswegen kann man z. B. die Störung, welche eine Kugel vom unendlich kleinen Radius R bewirkt, sofort angeben, sobald man die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ kennt, welche wegen des gegebenen Strömungszustandes bei Abwesenheit der Kugel am Orte ihres Mittelpunktes bestehen würde, und kann man schließen, daß die ruhende Kugel infolge jenes Bewegungszustandes eine Kraft erleidet, die, was Richtung und Größe betrifft, durch den Ausdruck $6\pi\mu R\mathfrak{v}$ gegeben ist. Hieran wird nichts geändert durch die Tatsache, daß, wenn die Flüssigkeit noch mit anderen Körpern in

Berührung steht, diese ihrerseits die von der Kugel ausgehende Störung wieder reflektieren. Die neue Geschwindigkeit, die sie in dieser Weise in der Nähe der Kugel hervorbringen, ist im Vergleich zu der oben mit $\mathfrak{v}$ bezeichneten unendlich klein, die entsprechende Änderung der genannten Kraft also dem Quadrat des Radius R proportional.

§ 7. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir die Betrachtung, die uns zu dem Reziprozitätssatze von § 3 geführt hat, in der Weise abändern, daß wir die eine Erregungsstelle durch eine sich verschiebende unendlich kleine Kugel ersetzen. Es bestehe also im ersten Fall im Punkte P eine Stromerregung $\mathfrak{K} = \int\limits_S \mathfrak{F} dS$ von der Intensität K und der Richtung h, während eine unendlich kleine Kugel A, deren Mittelpunkt in P' liegt, in Ruhe erhalten wird; $\mathfrak{v}_{P'}$ sei die Geschwindigkeit, welche, wenn die Kugel nicht da wäre, in P' bestehen würde, und habe also dieselbe Bedeutung wie in der Formel (7). Im zweiten Fall entstehe nur dadurch Bewegung, daß A sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ verschiebt; die Komponenten dieser letzteren nennen wir $\mathfrak{c}_x$, $\mathfrak{c}_y$, $\mathfrak{c}_z$. Übrigens kann die Flüssigkeit von beliebig gelagerten festen Körpern begrenzt sein.

Wir haben jetzt die Gleichung (I″) anzuwenden. Die linke Seite reduziert sich auf das für die Kugelfläche berechnete erste Glied und hat den Wert

$$\mathfrak{c}_x \int X_n d\sigma + \mathfrak{c}_y \int Y_n d\sigma + \mathfrak{c}_z \int Z_n d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wo sich die drei Integrale auf diese Fläche beziehen. Dieselben bedeuten, da wir die Normale n nach der Seite des festen Körpers gezogen haben, die mit umgekehrten Vorzeichen genommenen Komponenten der Kraft, welche im ersten Falle auf die Kugel wirkt. Mit Rücksicht auf die am Schluß des letzten Paragraphen gemachte Bemerkung dürfen wir daher für (15) schreiben

$$-6\pi\mu R(\mathfrak{c}_x \mathfrak{v}_{xP'} + \mathfrak{c}_y \mathfrak{v}_{yP'} + \mathfrak{c}_z \mathfrak{v}_{zP'}) = -6\pi\mu R(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v}_{P'}).$$

Das zweite Glied von (I″) verwandelt sich in

$$-(\mathfrak{v}'_P \cdot \mathfrak{K}),$$

so daß

$$6\pi\mu R(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v}_{P'}) = (\mathfrak{v}'_P \cdot \mathfrak{K})$$

wird. Hier ist $\mathfrak{v}'_P$ die Geschwindigkeit, die im Punkte P durch die Translation der Kugel hervorgerufen wird. Vergleicht man dieses Resultat mit der Gleichung (8), die wir schreiben können:

$$(\mathfrak{v}_{P'} \cdot \mathfrak{K}') = (\mathfrak{v}'_P \cdot \mathfrak{K}),$$

so ergibt sich, daß in dem früher und in dem jetzt betrachteten Fall

in dem beliebig gewählten Punkte P dieselbe Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ entstehen wird, wenn

$$\mathfrak{K}' = 6\pi\mu R\mathfrak{c}$$

ist.

Eine unendlich kleine Erregung ist also, was die entstehende Flüssigkeitsbewegung betrifft, einer unendlich kleinen Kugel äquivalent, wenn diese sich in der Richtung der Erregung verschiebt mit einer Geschwindigkeit, die der mit $6\pi\mu R$ dividierten Intensität der Erregung gleich ist.

Wendet man diesen Satz auf eine den ganzen Raum füllende Flüssigkeit an, so erhält man aus den Formeln von § 5 für die Bewegung infolge einer Erregung K, die im Anfangspunkt der Koordinaten in der Richtung der x-Achse stattfindet,

$$u = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)K, \qquad v = \frac{1}{8\pi\mu}\frac{xy}{r^3}K, \qquad w = \frac{1}{8\pi\mu}\frac{xz}{r^3}K,$$

$$p = \frac{1}{4\pi}\frac{x}{r^3}K + C.$$

Aus diesem Resultate, verbunden mit den entsprechenden Formeln für Erregungen, deren Richtung der y- oder z-Achse parallel läuft, lassen sich Gleichungen ableiten für die in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit durch konstante, beliebig verteilte äußere Kräfte verursachte Strömung. Wirkt im Elemente dS' am Punkte (x', y', z') die Kraft $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, so erhält man für den Punkt (x, y, z)

$$u = \frac{1}{8\pi\mu}\int\left[\frac{\mathrm{X}}{r} + \frac{x'-x}{r^3}\left\{(x'-x)\mathrm{X} + (y'-y)\mathrm{Y} + (z'-z)\mathrm{Z}\right\}\right]dS' \quad \text{usw.}$$

$$p = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r^3}\left\{(x'-x)\mathrm{X} + (y'-y)\mathrm{Y} + (z'-z)\mathrm{Z}\right\}dS' + C.$$

In diesen Formeln, in welchen nach x', y', z' zu integrieren ist, bedeutet r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z').

Wir können nun auch die erste der unendlich kleinen Erregungen, von welchen in § 3 die Rede war, durch eine sich verschiebende Kugel ersetzen. Dies führt zu dem Schluß: „Wenn, bei beliebiger Begrenzung der Flüssigkeit durch ruhende Körper, eine unendlich kleine Kugel, die sich im Punkte P befindet und sich mit der Geschwindigkeit c in der Richtung h verschiebt, im Punkte P' eine Strömungsgeschwindigkeit verursacht, deren Komponente nach der Richtung h' den Wert a hat, dann wird eine Kugel von derselben Größe im Punkte P', die mit der gleichen Geschwindigkeit c in der Richtung h' fortschreitet, in P eine Strömung veranlassen, bei der die Komponente der Geschwindigkeit nach der Richtung h eben denselben Wert a hat.

Sind die beiden Kugeln P und P' zugleicherzeit vorhanden, und läßt man jedesmal, während die eine sich bewegt, die andere in Ruhe,

so kann man auch sagen: Die Kraft, welche im einen Fall P' in der Richtung h' erleidet, ist der Kraft gleich, welche im anderen Fall auf P in der Richtung h wirkt.

§ 8. Dieses letztere folgt auch unmittelbar aus einem viel allgemeineren Satze, zu dessen Ableitung wir uns jetzt wenden. Dabei schließen wir, wie in allen weiteren Betrachtungen, äußere Kräfte X, Y, Z aus, so daß (I″) die Gestalt annimmt

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma = \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma, \qquad (\mathrm{I^{IV}})$$

wo über die gesamte Begrenzung zu integrieren ist. Wir nehmen an, daß, wenn die Flüssigkeit nicht vollständig von festen Wänden eingeschlossen ist, sondern sich nach allen Richtungen hin in die Unendlichkeit erstreckt, die Integrale über die „unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes" verschwinden. Die Gleichung, in der wir es dann nur mit den Oberflächen fester Körper zu tun haben, läßt nun eine einfache Deutung zu. Bezeichnet man nämlich mit W und W' in dem ersten, bzw. dem zweiten Fall die Gesamtheit aller durch die Flüssigkeit auf die Körper ausgeübten Kräfte, so drückt ($\mathrm{I^{IV}}$) die Gleichheit der pro Zeiteinheit stattfindenden Arbeitsleistungen aus, welche das eine Mal den Kräften W und den Geschwindigkeiten der Oberflächen u', v', w', das andere Mal den Kräften W' und den Geschwindigkeiten u, v, w entsprechen. Da wir uns auf Translationen und Rotationen der Körper beschränken, so hängt für jeden derselben die in Frage kommende Arbeit entweder mit der resultierenden Kraft in der Translationsrichtung, oder mit dem resultierenden Drehmoment in Bezug auf die Rotationsachse zusammen. Indem wir nun in einem System beliebiger in der Flüssigkeit gelagerter Körper verschiedene Bewegungen eines Körpers M mit Bewegungen eines zweiten Körpers M' kombinieren, wobei die übrigen vorhandenen Körper in beiden Fällen in Ruhe gelassen werden, so gewinnen wir mehrere Sätze, die sich in folgender Weise zusammenfassen lassen.

Eine Translation mit der Geschwindigkeit c in der Richtung h (oder eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse l) des Körpers M habe zur Folge, daß auf den ruhend gedachten Körper M' in der bei diesem willkürlich gewählten Richtung h' eine Kraft F und um die willkürlich gewählte Achse l' ein Drehmoment Q wirkt. Dann wird umgekehrt eine Translation c' von M' in der Richtung h' bewirken, daß der Körper M, wenn dieser ruht, in der Richtung h eine resultierende Kraft $\frac{c'}{c} F$ (oder in bezug auf die Achse l ein Drehmoment $\frac{c'}{\omega} F$) erleidet. Ebenso entsteht durch eine Winkelgeschwindigkeit ω' des Körpers M' um die Achse l' eine Wirkung auf M, die,

was die Richtung h anbelangt, in einer Kraft $\frac{\omega'}{c} Q$ (oder, was die Achse l betrifft, in einem Drehmoment $\frac{\omega'}{\omega} Q$) besteht.

Es ist übrigens nichts dagegen, hierbei unter M und M' einen und denselben Körper zu verstehen. Wenn z. B., was sehr gut möglich ist, eine Verschiebung dieses Körpers parallel der x-Achse ein Kräftepaar um die y-Achse hervorruft, dann wird umgekehrt eine Rotation um diese letztere eine Kraft in der Richtung der x-Achse zur Folge haben.

§ 9. Aus der Gleichung (I^{IV}) läßt sich auch ein Satz ableiten, der dem Huygens'schen Prinzip in der Optik einigermaßen ähnlich ist. Wir verstehen dieses Mal unter σ eine beliebige Fläche, die ganz oder teilweise im Inneren der Flüssigkeit liegen kann. Für den ersten Zustand (u, v, w) nehmen wir irgend eine in Wirklichkeit bestehende Bewegung, für den zweiten (u', v', w'), der uns nur ein mathematisches Hilfsmittel sein soll, die Bewegung, die entsteht, wenn eine unendlich kleine, im Punkte P des Raumes S liegende Kugel A sich in der x-Richtung mit der Geschwindigkeit c verschiebt, während die Flüssigkeit in allen Punkten von σ gezwungen wird, in Ruhe zu bleiben. Wir wenden unseren Satz auf den Raum zwischen der Fläche σ und der Kugel A an und müssen also erwarten, daß sowohl Integrale über jene Fläche, wie auch solche über die Kugelfläche, deren Elemente wir zur Unterscheidung dA nennen wollen, auftreten werden. Was den ersten Fall betrifft, auf welchen sich die ungestrichenen Buchstaben beziehen, so können wir noch zweierlei Annahmen machen, entweder daß in diesem Fall die Flüssigkeit sich auch über den Kugelraum erstreckt, so daß im Punkte P wirklich die der untersuchten Bewegung entsprechende Geschwindigkeit (u_P, v_P, w_P) existiert, oder daß auch jetzt schon die feste Kugel, und zwar ohne sich zu bewegen, vorhanden ist. Beide Auffassungen führen zu demselben Resultat. Um indes die Rechnung möglichst einfach zu halten, bedienen wir uns der zweiten und verstehen also in unserer Gleichung unter (u, v, w) den zu untersuchenden Bewegungszustand, nachdem er durch die feste Kugel modifiziert ist. Trotzdem enthält die abzuleitende Formel, wie sich sogleich zeigen wird, die Geschwindigkeit u_P, welche bei Abwesenheit der Kugel bestehen würde.

Wegen der gemachten Annahmen erhalten wir nun zunächst aus (I^{IV})

$$c\int X_n dA = \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n) d\sigma,$$

und dann weiter, mit Rücksicht darauf, daß $-\int X_n dA$ die Kraft ist, welche die Kugel in der Richtung der x-Achse von dem Strome

(u_p, v_p, w_p) erleidet, und also nach (12) und § 6 den Wert $6\pi\mu R u_p$ hat,

$$u_p = -\frac{1}{6\pi\mu c R}\int(uX'_n + vY'_n + wZ'_n)d\sigma.$$

Man sieht aus dieser Gleichung und den beiden ähnlichen Formeln für v_p und w_p, daß die Kenntnis der Geschwindigkeit in allen Punkten von σ für die Bestimmung der Bewegung in allen Punkten innerhalb dieser Fläche ausreicht. Allerdings würde man u_p, v_p, w_p nur dann wirklich berechnen können, wenn man die bei dem eingeführten fiktiven Zustande bestehenden Spannungskomponenten X'_n, Y'_n, Z'_n angeben könnte, was in der Regel unmöglich ist.

Man vermeidet diese Schwierigkeit, wenn man in der oben mitgeteilten Betrachtung den zweiten Zustand durch denjenigen ersetzt, der bestehen würde, wenn die Flüssigkeit sich rings um die bewegte Kugel A in die Unendlichkeit ausdehnte. Die Spannungen X'_n, Y'_n, Z'_n sind dann bekannt; dafür tritt aber ein neues Integral über die Fläche σ auf, da an dieser u', v', w' nicht mehr verschwinden.

In die Formel

$$u_p = -\frac{1}{6\pi\mu c R}\left\{\int(uX'_n + vY'_n + wZ'_n)\,d\sigma - \int(u'X_n + v'Y_n + w'Z_n)\,d\sigma\right\},$$

die sich jetzt aus ($\mathrm{I^{IV}}$) ergibt, führen wir, indem wir P zum Anfangspunkt der Koordinaten wählen, und die Winkel, welche n mit den Achsen bildet, α, β, γ nennen, die aus (13) folgenden Werte ein:

$$X'_n = x(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\xi,$$
$$Y'_n = y(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\xi,$$
$$Z'_n = z(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\xi.$$

Dadurch erhalten wir schließlich

$$u_p = \frac{3}{4\pi}\int\frac{x}{r^5}(ux + vy + wz)(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\sigma +$$
$$+\frac{1}{8\pi\mu}\int\left\{\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)X_n + \frac{xy}{r^3}Y_n + \frac{xz}{r^3}Z_n\right\}d\sigma, \quad (16)$$

mit entsprechenden Formeln für v_p und w_p.

§ 10. Wir wollen die Rechnung weiterführen für eine Flüssigkeit, die den Raum an der positiven Seite der yz-Ebene ohne Unterbrechung füllt; das Resultat wird uns in den Stand setzen, die Zurückwerfung einer Bewegung durch eine unbegrenzte ebene Wand zu behandeln.

Indem wir unter P einen beliebigen Punkt mit positivem x verstehen, können wir nun zunächst die denselben umschließende Fläche σ zusammensetzen aus einem Teil der yz-Ebene und einer um O beschriebenen Halbkugel, deren Radius wir nachher unendlich groß wer-

den lassen. Es soll angenommen werden, daß die Integrale über die Kugelfläche den Grenzwert Null haben, und daß wir es also am Ende in (16) nur mit Integralen über die yz-Ebene in ihrer vollen Ausdehnung zu tun haben. Da nun $\cos\alpha = -1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$, so erhalten wir, wenn wir die Koordinaten von P mit x, y, z und die eines Elementes $d\sigma$ der yz-Ebene mit y_0, z_0 bezeichnen,

$$u = \frac{3}{4\pi}\int \frac{x^2}{r^5}\left\{u_0 x + v_0(y-y_0) + w_0(z-z_0)\right\}d\sigma -$$
$$-\frac{1}{8\pi\mu}\int\left\{\left(\frac{x^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right)X_{x0} + \frac{x(y-y_0)}{r^3}Y_{x0} + \frac{x(z-z_0)}{r^3}Z_{x0}\right\}d\sigma. \quad (17)$$

Wir haben hier auf der linken Seite den Index P fortgelassen, dagegen zur Unterscheidung die an der yz-Ebene bestehenden Werte von u, v, w, X_x, Y_x, Z_x mit dem Index 0 versehen.

Die entsprechende Gleichung für die zweite Geschwindigkeitskomponente lautet

$$v = \frac{3}{4\pi}\int \frac{x(y-y_0)}{r^5}\left\{u_0 x + v_0(y-y_0) + w_0(z-z_0)\right\}d\sigma -$$
$$-\frac{1}{8\pi\mu}\int\left\{\frac{x(y-y_0)}{r^3}X_{x0} + \left[\frac{(y-y_0)^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right]Y_{x0} + \frac{(y-y_0)(z-z_0)}{r^3}Z_{x0}\right\}d\sigma. \quad (18)$$

Es gelingt nun, mittels geeigneter Kunstgriffe in diesen Formeln verschiedene Glieder auf der rechten Seite verschwinden zu lassen. Man kann nämlich Differentiationen nach den Koordinaten x, y, z des Punktes P in der Weise ausführen, daß man die Faktoren, mit welchen $u_0, v_0, w_0, X_{x0}, Y_{x0}, Z_{x0}$ multipliziert sind, differenziert, und es stellt sich nach einigem Suchen heraus, daß die Operation

$$x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}x^2\Delta,$$

auf (17) angewandt, die Koeffizienten von u_0 und X_{x0} zum Verschwinden bringt, die übrigen Glieder aber ungeändert läßt. Wir erhalten daher

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}x^2\Delta u = \frac{3}{4\pi}\int\frac{x^2}{r^5}\{v_0(y-y_0) + w_0(z-z_0)\}\,d\sigma -$$
$$-\frac{1}{8\pi\mu}\int\left\{\frac{x(y-y_0)}{r^3}Y_{x0} + \frac{x(z-z_0)}{r^3}Z_{x0}\right\}d\sigma, \quad (19)$$

und wenn wir dieses von (17) subtrahieren,

$$u - x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\Delta u = \frac{3}{4\pi}\int\frac{x^3}{r^5}u_0\,d\sigma - \frac{1}{8\pi\mu}\int\left(\frac{x^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right)X_{x0}\,d\sigma. \quad (20)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich, wenn man auch die Gleichung (18) heranzieht,

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}x^2\Delta v = -\frac{3}{4\pi}\int\frac{x^2(y-y_0)}{r^5}u_0\,d\sigma + \frac{1}{8\pi\mu}\int\frac{x(y-y_0)}{r^3}X_{x0}\,d\sigma \quad (21)$$

und

$$v + x\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}x^2 \Delta v = \frac{3}{4\pi}\int \frac{x(y-y_0)}{r^5}\{v_0(y-y_0) + w_0(z-z_0)\}\,d\sigma -$$

$$-\frac{1}{8\pi\mu}\int\left\{\left[\frac{(y-y_0)^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right]Y_{x0} + \frac{(y-y_0)(z-z_0)}{r^3}Z_{x0}\right\}d\sigma. \quad (22)$$

Den vorstehenden Formeln fügen wir noch zwei Beziehungen hinzu, die uns weiter nützlich sein werden. Die erste erhält man aus (20), wenn man sich vorstellt, daß der Punkt P sich einem Punkte P_0 der yz-Ebene nähert. Links kommt dann der Wert von u_0 an dieser Stelle. Auf der rechten Seite hat das erste Glied, wie man ohne Mühe nachweisen kann, den Grenzwert $\frac{1}{2}u_0$, wo u_0 sich ebenfalls auf den Punkt P_0 bezieht, während $\int \frac{x^2}{r^3} X_{x0} d\sigma$ verschwindet. Es ist also für jeden Punkt der yz-Ebene

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi\mu}\int \frac{1}{r} X_{x0} d\sigma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Um zu der zweiten Beziehung zu gelangen, differenzieren wir (19) nach y, (22) nach x, subtrahieren dann die erste Gleichung von der zweiten, und lassen schließlich P in die yz-Ebene, nach P_0 hin rücken. Auf der linken Seite erscheint dann der Wert, den $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ oder $\frac{1}{\mu} Y_x$ in P_0 hat. Rechts heben sich die Glieder mit Z_{x0}, und erhält man also neben Größen, die v_0 und w_0 enthalten, den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi\mu}\int \frac{x}{r^3} Y_{x0} d\sigma,$$

dessen Grenzwert der mit 2μ dividierte Wert von Y_{x0} im Punkte P_0 ist. Folglich gilt für jeden Punkt der yz-Ebene, wenn wir mit $g(v_0, w_0)$ ein Integral bezeichnen, in welchem v_0 und w_0 linear und homogen vorkommen, und das wir nicht näher anzugeben brauchen,

$$Y_{x0} = g(v_0, w_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

§ 11. Es sei eine stationäre Bewegung in der oben betrachteten Flüssigkeitsmasse, also auf der positiven Seite der yz-Ebene gegeben, und es soll ein zweiter den Bewegungsgleichungen genügender Zustand in solcher Weise bestimmt werden, daß in jedem Punkte der yz-Ebene

$$u_{(2)0} = u_{(1)0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$v_{2(0)} = -v_{(1)0}, \quad w_{(2)0} = -w_{(1)0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Die Indizes (1) und (2) dienen hier, und ebenso in den folgenden Gleichungen, um die bei den beiden Bewegungen in Betracht kommenden Größen voneinander zu unterscheiden, während das 0 bedeutet, daß es sich um die Werte in der yz-Ebene handelt.

Wenden wir nun die Gleichung (23) auf beide Zustände an, so finden wir, mit Rücksicht auf (25), daß in jedem Punkte der Ebene

$$\int \frac{1}{r} X_{x(2)0}\, d\sigma = \int \frac{1}{r} X_{x(1)0}\, d\sigma$$

sein muß, was offenbar nur möglich ist, wenn an jeder Stelle

$$X_{x(2)0} = X_{x(1)0}.$$

Andererseits folgt aus (24), da wegen der Bedingungen (26), $g_{(2)} = -g_{(1)}$,

$$Y_{x(2)0} = -Y_{x1(0)},$$

und ebenso gilt

$$Z_{x(2)0} = -Z_{x(1)0}.$$

Aus diesen Eigenschaften der Spannungskomponenten, in Verbindung mit (25), (26) und (19) bis (22), geht nun hervor, daß in jedem Punkte des betrachteten Raumes die Größen

$$u - x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2 \Delta u \quad \text{und} \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}x^2 \Delta v$$

bei beiden Bewegungen gleiche Werte mit demselben Vorzeichen, die Größen

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}x^2 \Delta u \quad \text{und} \quad v + x\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}x^2 \Delta v$$

aber gleiche Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen haben. Wir haben also, indem wir noch eine Gleichung für die dritte Geschwindigkeitskomponente hinzufügen,

$$\left.\begin{aligned} u_{(2)} &= u_{(1)} - 2x\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + x^2 \Delta u_{(1)}, \\ v_{(2)} &= -v_{(1)} - 2x\frac{\partial u_{(1)}}{\partial y} + x^2 \Delta v_{(1)}, \\ w_{(2)} &= -w_{(1)} - 2x\frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} + x^2 \Delta w_{(1)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

Hier können wir nun noch für $\Delta u_{(1)}$, $\Delta v_{(1)}$, $\Delta w_{(1)}$ die aus (9) folgenden Werte einsetzen. Auch kann man aus den drei entstehenden Gleichungen eine Formel für $p_{(2)}$ ableiten; zu diesem Zwecke leitet man aus den Gleichungen zunächst die Werte von $\frac{\partial p_{(2)}}{\partial x} = \mu \Delta u_{(2)}$, usw. ab, wobei man wieder die Formeln (9), sowie die aus denselben abgeleitete Gleichung

$$\Delta p_{(1)} = 0$$

berücksichtigt.

Das Endresultat lautet

$$\left.\begin{aligned}
u_{(2)} &= \quad u_{(1)} - 2x\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_{(1)}}{\partial x},\\
v_{(2)} &= -\,v_{(1)} - 2x\frac{\partial u_{(1)}}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_{(1)}}{\partial y},\\
w_{(2)} &= -\,w_{(1)} - 2x\frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_{(1)}}{\partial z},\\
p_{(2)} &= \quad p_{(1)} + 2x\frac{\partial p_{(1)}}{\partial x} - 4\mu\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (28)$$

Daß diese Werte den Bewegungsgleichungen und den Bedingungen (25) und (26) genügen, läßt sich leicht nachträglich verifizieren.

§ 12. Das bereits in § 10 angekündigte Problem der Zurückwerfung durch eine unendlich große ebene Wand können wir jetzt in folgender Weise lösen. Die feste Wand falle mit der yz-Ebene zusammen und die x-Achse zeige nach der Seite des unendlichen mit der Flüssigkeit gefüllten Raumes hin. In diesem Raume sei ein stationärer Bewegungszustand $M_{(0)}$ mit den Geschwindigkeiten $u_{(0)}$, $v_{(0)}$, $w_{(0)}$ und dem Druck $p_{(0)}$ gegeben; diesen haben wir bestimmt in der Voraussetzung, daß die Wand nicht da ist und die Flüssigkeit sich auch auf der negativen Seite der yz-Ebene erstreckt. Auch die „Fortsetzung" von $M_{(0)}$ hinter der Wand ist also bekannt. Wir können uns nun zunächst auf der vorderen, d. h. auf der positiven Seite der Wand, einen Bewegungszustand $M_{(1)}$ denken, der genau das Spiegelbild jener Fortsetzung ist. Hiermit ist gemeint, daß, wenn P ein beliebiger Punkt vor der Wand und P' sein Spiegelbild ist, die Geschwindigkeit $(u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)})$ in P das Spiegelbild der Geschwindigkeit $(u_{(0)}, v_{(0)}, w_{(0)})$ ist, die bei Abwesenheit der Wand in P' bestehen würde, und daß der Druck $p_{(1)}$ in P denselben Wert hat wie in letzterem Fall der Druck $p_{(0)}$ in P'. Offenbar gilt dann an der Wand

$$u_{(1)0} = -\,u_{(0)0}, \quad v_{(1)0} = v_{(0)0}, \quad w_{(1)0} = w_{(0)0} \quad . \; . \; . \quad (29)$$

Leiten wir nun aus diesem Zustande $M_{(1)}$ in der im letzten Paragraph angegebenen Weise einen Zustand $M_{(2)}$ ab, so ist, wie aus (25), (26) und (29) erhellt,

$$u_{(0)0} + u_{(2)0} = 0, \quad v_{(0)0} + v_{(2)0} = 0, \quad w_{(0)0} + w_{(2)0} = 0,$$

so daß wir in $M_{(2)}$ in der Tat die gesuchte durch Reflexion an der Wand entstandene Bewegung gefunden haben.

Z. B. kann man für $M_{(0)}$ die durch eine gleichmäßig fortschreitende Kugel erregte Bewegung nehmen. Der Mittelpunkt derselben liege im betrachteten Augenblick auf der x-Achse in der Entfernung a von der Wand. Bewegt sich nun der Körper der x-Achse entlang mit der Ge-

schwindigkeit c, dann ist die Bewegung $M_{(1)}$ die, welche eine Kugel mit der Geschwindigkeit $-c$, deren Mittelpunkt im Punkte $(-a, 0, 0)$ läge, hervorbringen würde. Nach den Gleichungen (10) und (11) ist also, wenn wir die Glieder mit R^3 vernachlässigen, und die Entfernung von dem zuletzt genannten Punkt r nennen,

$$u_{(1)} = -\frac{3}{4} Rc\left\{\frac{(x+a)^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right\},$$

$$v_{(1)} = -\frac{3}{4} Rc\frac{(x+a)y}{r^3}, \quad w_{(1)} = -\frac{3}{4} Rc\frac{(x+a)z}{r^3},$$

$$p_{(1)} = -\frac{3}{2}\mu Rc\frac{x+a}{r^3} + C.$$

Substitution dieser Werte in (28) liefert uns für die von der Wand reflektierte Bewegung

$$u_{(2)} = -\frac{3}{4} Rc\left\{\frac{1}{r} + \frac{x^2+a^2}{r^3} + \frac{6ax(x+a)^2}{r^5}\right\},$$

$$v_{(2)} = -\frac{3}{4} Rc\left\{\frac{(x-a)y}{r^3} + \frac{6axy(x+a)}{r^5}\right\},$$

$$w_{(2)} = -\frac{3}{4} Rc\left\{\frac{(x-a)z}{r^3} + \frac{6axz(x+a)}{r^5}\right\}.$$

Ohne nun weiter die Reflexion dieser Bewegung durch die Kugel zu untersuchen, können wir, für kleine Werte von $\frac{R}{a}$, den Widerstand, den der Körper erleidet, insofern genau angeben, daß wir das Glied mit R^2 berücksichtigen. Da nach obigen Formeln an der Stelle des Mittelpunktes

$$u_{(2)} = -\frac{9}{8}\frac{R}{a}c, \quad v_{(2)} = 0, \quad w_{(2)} = 0$$

sein würde, so können wir sagen, die Kugel befinde sich in einem homogenen Strömungsfelde und habe relativ zur Flüssigkeit die Geschwindigkeit $\left(1+\frac{9}{8}\frac{R}{a}\right)c$. Aus der Gleichung (12) folgt also für den Widerstand

$$W = 6\pi\mu R\left(1+\frac{9}{8}\frac{R}{a}\right)c;$$

derselbe ist durch den Einfluß der Wand im Verhältnis von 1 zu $1+\frac{9}{8}\frac{R}{a}$ vergrößert.

Auch für eine Kugel, die sich der Wand parallel bewegt, finde ich, daß der Widerstand vergrößert wird, jedoch nur im Verhältnis von 1 zu $1+\frac{9}{16}\frac{R}{a}$. Es zeigt sich weiter, daß auf einen solchen Körper, solange die Geschwindigkeit unendlich klein bleibt, eine Kraft nach der Wand hin oder von ihr hinweg nicht wirkt.

§ 13. Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß man ähnliche Sätze wie die hier bewiesenen auch für gewisse nicht stationäre Bewegungen würde aufstellen können. Nimmt man z. B. in der Gleichung (1′) für u, v, w, X, Y, Z und u', v', w', X′, Y′, Z′ Ausdrücke, welche die Zeit t nur in dem Faktor e^{nt} enthalten, wo n eine imaginäre Zahl ist, so verschwindet wieder das erste Integral auf der rechten Seite, und die Gleichung führt zu einer Beziehung zwischen den Bewegungen, die durch die reellen Teile der genannten Ausdrücke dargestellt werden. Es sind das schwingende Bewegungen, wie sie durch periodische Kräfte sowie durch hin und her gehende oder pulsierende Körper hervorgebracht werden können.

Was die Frage betrifft, ob bei irgend einer Bewegung die Geschwindigkeit wirklich als unendlich klein betrachtet werden dürfe, so ist darüber in jedem einzelnen Fall zu entscheiden, z. B. in der Weise, daß man den Wert der in (2) vernachlässigten Glieder

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varrho v \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ usw.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

mit dem Wert von

$$-\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

vergleicht. Da z. B. bei dem durch die Gleichungen (10) und (11) dargestellten Zustande in der Nähe der Kugel die Größen (30) von der Ordnung $\frac{\varrho c^2}{R}$ und die Größen (31) von der Ordnung $\frac{\mu c}{R^2}$ sind, so liefern diese Gleichungen nur dann eine befriedigende Annäherung, wenn die Geschwindigkeit c gegen $\frac{\mu}{\varrho R}$ hinreichend klein ist.

Wir können dieses anwenden auf eine Kugel, die in der Flüssigkeit fällt und dabei in bekannter Weise eine konstante Endgeschwindigkeit c annimmt. Berechnet man diese aus der Bedingung, daß der Widerstand der bewegenden Kraft gleich ist, und legt man für ersteren die Gleichung (12) zugrunde, so erhält man

$$c = \frac{2}{9} \frac{(\varrho' - \varrho) g}{\mu} R^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

wo ϱ' die Dichte der Kugel und g die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet.

Dieser Wert kann aber nur richtig sein, wenn er der oben gefundenen Bedingung genügt, d. h. wenn R klein gegen

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2} \frac{\mu^2}{\varrho(\varrho' - \varrho) g}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

ist.

Für Wasser ist in C. G. S.-Einheiten $\varrho = 1$, $\mu = 0{,}013$. Hat dann die in dieser Flüssigkeit fallende Kugel die Dichte $\varrho' = 3$, so berechnet sich der Ausdruck (33) zu 0,0073 c. M. Zu einem noch kleineren Wert

gelangt man, wenn man den Fall eines Wassertropfens in der Luft betrachtet. Dann ist $\mu = 0{,}000\,19$, $\varrho = 0{,}0013$, $\varrho' = 1$, und das Resultat ist 0,0050 c. M.

Man ersieht hieraus, wie weit man fehl gehen würde, wenn man die Gleichung (32) auf einen Regentropfen anwenden wollte.[1]) Dagegen ist kein Fehler dieser Art zu befürchten in der sinnreichen Methode, nach welcher J. J. Thomson[2]) die Größe der um Gasionen als Kerne kondensierten Wassertröpfchen mittels der Formel (32) aus der Fallgeschwindigkeit ableitet. Für den Radius dieser Tröpfchen wurden nämlich Werte wie 0,0004 c. M. gefunden.

---

1) Vgl. P. Lenard, Über Regen, Meteorol. Zeitschr. **21** (1904), p. 249.

2) J. J. Thomson, On the charge of electricity carried by the ions produced by Röntgen rays, Phil. Mag. (5) **46** (1898), p. 528.

III.

Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluß dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren.

(Umarbeitung der Abhandlung: Over den weerstand dien een vloeistofstroom in eene cilindrische buis ondervindt, Amsterdam, Zittingsverslag Akad. v. Wet. 6 [1897], p. 28.)

§ 1. Die Theorie der Bewegung von Flüssigkeiten in zylindrischen Röhren ist sehr einfach, solange die mittlere Geschwindigkeit unterhalb eines gewissen von dem Durchmesser des Rohrs und der Natur der Flüssigkeit abhängigen Grenzwertes liegt. Die Stromlinien sind in diesem Falle der Achse des Rohrs parallel und wenn, wie wir annehmen wollen, an der Wand Gleitung nicht stattfindet, so ist die Druckdifferenz zwischen zwei Querschnitten dem Koeffizienten der inneren Reibung und der ersten Potenz der mittleren Geschwindigkeit proportional. Für Röhren von kreisförmigem Querschnitt gilt weiter das bekannte Poiseuille'sche Gesetz.

Sobald aber die mittlere Geschwindigkeit U den genannten Grenzwert, für welchen Osborne Reynolds den Namen „kritische Geschwindigkeit" eingeführt hat, übersteigt, treten an die Stelle dieser Gesetze andere weniger einfache. Die für eine bestimmte Stromstärke erforderliche Druckdifferenz, die man, nachdem man eine Korrektion für die Enden angebracht hat, als Maß für den in dem Rohr bestehenden Widerstand ansehen kann, wächst jetzt rascher als U, so daß sie sich durch einen Ausdruck von der Gestalt $aU + bU^2$ darstellen läßt.

Die schönen Versuche von Reynolds[1]) und Couette[2]) haben viel zur Aufklärung dieser Verhältnisse beigetragen. Aus denselben geht hervor, daß gerade nach Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit die unregelmäßigen, wirbelnden Bewegungen ins Spiel kommen, deren Bedeutung auch schon frühere Forscher erkannt hatten.[3]) Aus dem

1) O. Reynolds, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, London, Phil. Trans. 174 (1883) p. 935.

2) M. Couette, Etudes sur le frottement des liquides, Ann. de chim. et de phys. (6) 21 (1890), p. 433.

3) Siehe z. B. H. Darcy, Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, Mémoires des savants étrangers, 15 (1858), p. 141 (insbesondere p. 321, 322, 328—333); J. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires des savants étrangers, 23 (1877), Nr. 1.

Auftreten dieser neuen Bewegungsform, die wir eine turbulente Bewegung nennen wollen, darf man indes nicht schließen, daß eine geradlinige Strömung jetzt den Bewegungsgleichungen nicht mehr genüge; man überzeugt sich leicht davon, daß sie das noch immer tut. Der Grund für die plötzliche Änderung in der Art der Bewegung ist vielmehr darin zu suchen, daß jene einfachere Strömung bei Vergrößerung der Geschwindigkeit aufhört stabil zu sein[1]), und daß sie also, auch wenn sie für einen Augenblick hergestellt werden könnte, alsbald infolge zufälliger Störungen in eine turbulente Bewegung umschlagen würde.

Ähnliche Erscheinungen beobachtet man auch in anderen Fällen, z. B. wenn ein fester Körper in der Flüssigkeit rotiert oder fortschreitet. Bei allmählicher Steigerung der Geschwindigkeit macht die anfangs bestehende, ziemlich einfache — wir wollen sagen regelmäßige — Bewegung der Flüssigkeit einer wirbelnden oder turbulenten Bewegung Platz; zugleich damit zeigt sich eine tiefgehende Änderung in dem Gesetz des Widerstandes. Der Begriff der kritischen Geschwindigkeit läßt sich also auch jetzt anwenden.

Im folgenden erlaube ich mir einige Betrachtungen mitzuteilen, die sich auf die Größe der kritischen Geschwindigkeit und auf den Einfluß der turbulenten Bewegungen beziehen. Ich schließe mich dabei den theoretischen Untersuchungen von Reynolds[2]) in mancher Hinsicht an.

§ 2. Wir gehen aus von den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\varrho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}+\frac{\partial (uw)}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ usw.,} \quad (2)$$

die sich von den in dem vorigen Artikel angewandten[3]) dadurch unterscheiden, daß äußere Kräfte ausgeschlossen sind, daß wir in (2) die Größen

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ usw.}$$

durch die wegen der Kontinuitätsgleichung (1) gleichwertigen Ausdrücke

$$\frac{\partial (u^2)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}+\frac{\partial (uw)}{\partial z}, \text{ usw.}$$

1) Vgl. G. G. Stokes, On some cases of fluid motion, Cambridge Trans. 8 (1843), p. 105 (auch Mathematical and physical papers, Cambridge 1880, Vol. 1, p. 53, 54).

2) O. Reynolds, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, London, Phil. Trans. (A) 186 (1895), p. 123.

3) Siehe oben p. 23.

ersetzt haben, und daß endlich X_x, Y_y, Z_z das Glied $-p$ nicht mehr enthalten. Es ist also jetzt

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{usw.} \\ X_y &= Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Indem wir diese Werte in (2) einführen, erhalten wir

$$\varrho\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u v)}{\partial y} + \frac{\partial (u w)}{\partial z}\right\} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \quad \text{usw.} \quad . \quad (4)$$

Wir denken uns jetzt in der betrachteten Flüssigkeitsmasse eine diesen Gleichungen genügende regelmäßige Bewegung (u_1, v_1, w_1, p_1) und nehmen an, daß die Geschwindigkeiten, etwa durch einen sehr kleinen Impuls, um ein Geringes geändert werden. Es soll untersucht werden, ob diese Störung wieder durch den Einfluß der Reibung verschwindet oder im Gegenteil zu immer größeren Abweichungen von dem ursprünglichen Bewegungszustande führt.

Bezeichnen wir nun für den neuen Zustand die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck mit

$$u_1 + u', \quad v_1 + v', \quad w_1 + w', \quad p_1 + p', \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

so können wir füglich sagen, es sei auf die ursprüngliche regelmäßige Strömung eine neue, durch u', v', w', p' charakterisierte superponiert. Fortan soll mit dem Ausdruck „turbulente Bewegung" nicht mehr die gesamte Bewegung, sondern bloß diese neu hinzugekommene gemeint sein.

Zu Gleichungen, welche diese bestimmen, gelangen wir, wenn wir in (1) und (4) einmal die Werte u_1, v_1, w_1, p_1, und dann die Werte (5) einsetzen, und die im ersteren Fall erhaltenen Gleichungen von den bei der letzten Substitution gefundenen subtrahieren. In dieser Weise folgt aus (1)

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und aus (4) bei Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf u', v', w' zweiter Ordnung sind,

$$\varrho\left(\frac{d u'}{d t} + u' \frac{\partial u_1}{\partial x} + v' \frac{\partial u_1}{\partial y} + w' \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \Delta u', \quad \text{usw.} \quad . \quad (7)$$

Hier sind $\frac{d u'}{d t}$, usw. Abkürzungen für

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u'}{\partial z}, \quad \text{usw.},$$

so daß man auch sagen kann, es bedeute $\frac{d}{dt}$ die Änderung, welche die betrachtete Größe pro Zeiteinheit erleidet in einem Punkte, der an der regelmäßigen Bewegung (u_1, v_1, w_1) teilnimmt.

§ 3. Aus (6) und (7) leiten wir eine Formel ab, die man als die Energiegleichung für die turbulente Bewegung auffassen kann. Zu diesem Zwecke addieren wir die Gleichungen (7), nachdem wir sie mit u', v', w' multipliziert haben. Dabei führen wir zur Abkürzung die doppelten Komponenten der bei der turbulenten Bewegung bestehenden Drehungsgeschwindigkeit ein,

$$\xi' = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}, \quad . \quad . \quad (8)$$

wodurch wegen (6)

$$\frac{\partial \eta'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial y} = \Delta u', \text{ usw.}$$

und

$$u' \Delta u' + v' \Delta v' + w' \Delta w' = u' \left(\frac{\partial \eta'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right) + v' \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial z} \right) + w' \left(\frac{\partial \xi'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (v' \zeta' - w' \eta') + \text{ usw. } - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$$

wird.

Setzen wir schließlich

$$M = -\left\{ u'^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v'^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w'^2 \frac{\partial w_1}{\partial z} + u'v' \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \right.$$

$$\left. + v'w' \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) + w'u' \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right\} \quad (9)$$

und

$$N = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

so lautet das Resultat

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \varrho (u'^2 + v'^2 + w'^2) \right\} = \varrho M - \left\{ \frac{\partial (u'p')}{\partial x} + \frac{\partial (v'p')}{\partial y} + \frac{\partial (w'p')}{\partial z} \right\} +$$

$$+ \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (v' \zeta' - w' \eta') + \text{ usw.} \right\} - \mu N.$$

Wir wollen nun diese Gleichung noch mit einem Volumenelement dS multiplizieren und über einen bestimmten Raum S integrieren. Links erhalten wir dann die pro Zeiteinheit stattfindende Zunahme der kinetischen Energie der turbulenten Bewegung, und zwar berechnet für einen Raum, dessen Begrenzung an der regelmäßigen Bewegung teilnimmt; wir bezeichnen diese Energie mit E und ihre Zunahme mit $\frac{dE}{dt}$. Rechts verschwinden die beiden mittleren Glieder, wenn wir annehmen, daß an den Grenzen des Integrationsgebietes $u' = v' = w' = 0$ ist. Mithin wird

$$\frac{dE}{dt} = \varrho \int M dS - \mu \int N dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und hängt es also von den relativen Werten der beiden Integrale auf der rechten Seite ab, ob im Laufe der Zeit die Größe E, die als Maß für die Intensität der turbulenten Bewegung genommen werden kann, wächst oder abnimmt. Könnte man beweisen, daß für beliebig ge-

wählte u', v', w' die rechte Seite der Gleichung immer negativ wird, so wäre damit die Stabilität der regelmäßigen Bewegung, von der man ausging, dargetan. Dagegen wäre ihre Instabilität bewiesen, sobald sich für eine Störung, die unter den bestehenden Verhältnissen für möglich gehalten werden muß, ein positiver Wert herausstellen sollte.

Leider stößt man bei allgemeinen Untersuchungen in dieser Richtung auf erhebliche Schwierigkeiten. Ich werde mich daher darauf beschränken, beispielshalber für eine sehr einfache regelmäßige Bewegung und für eine turbulente Bewegung spezieller Art die Rechnung durchzuführen.

§ 4. Es befinde sich die Flüssigkeit zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen festen Scheiben, deren eine ruht, während die andere sich mit der konstanten Geschwindigkeit a in einer in ihrer Ebene liegenden Richtung verschiebt. Wir legen den Anfangspunkt der Koordinaten mitten zwischen die Platten, die y-Achse senkrecht zu diesen, nach der bewegten hin, und die x-Achse in die Richtung der Geschwindigkeit. Dann wird, in der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit an den Scheiben haftet, wenn wir die Dicke der Schicht $2h$ nennen, den Bewegungsgleichungen genügt durch den Ansatz

$$u_1 = \frac{a}{2h}(y+h), \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und es soll nun die hierdurch dargestellte regelmäßige Bewegung auf ihre Stabilität hin geprüft werden.

Indem wir dabei eine bestimmte Annahme über die turbulente Bewegung zugrunde legen, wird es uns in der Tat gelingen zu zeigen, daß die Stabilität aufhört, sobald die Geschwindigkeit a einen gewissen Wert a_k, den wir berechnen werden, übersteigt, und zwar werden wir es so einrichten, daß dieses a_k möglichst klein wird. Unser Resultat hat dann jedenfalls die Bedeutung, daß der Zustand (12), was die gewählte Art der turbulenten Bewegung betrifft, stabil ist für $a < a_k$. Es ist jedoch keineswegs damit gesagt, daß wir wirklich die kritische Geschwindigkeit, die man aus Beobachtungen ableiten würde, finden werden; es ist ja sehr gut möglich, daß die gewählte turbulente Bewegung gar nicht entstehen kann, und daß wirklich mögliche Störungen entweder schon bei einem kleineren Wert oder erst bei einem größeren Wert der Geschwindigkeit zur Instabilität führen. Höchstens dürfen wir hoffen, bei geeigneter Wahl der auf (12) superponierten Bewegung die kritische Geschwindigkeit der Größenordnung nach zu bestimmen.

Wir wollen nur Bewegungen ins Auge fassen, bei welchen $w' = 0$, während u' und v' unabhängig von z sind, Bewegungen also, die in jeder zur z-Achse senkrechten Ebene in derselben Weise verlaufen. Überdies nehmen wir an, daß sie auf einen endlichen Teil einer solchen

Ebene beschränkt bleiben. Wenn wir nun das Integrationsgebiet noch durch zwei um die Längeneinheit voneinander entfernte senkrecht zur z-Achse stehende Ebenen begrenzen und beachten, daß die Flüssigkeit an den Platten haftet, und daß also auch an der bewegten Platte $u' = 0$ ist (da hier sowohl u wie auch u_1 den vorgeschriebenen Wert a hat), so überzeugen wir uns leicht davon, daß wirklich, wie bei Ableitung der Gleichung (11) angenommen wurde, die Oberflächenintegrale verschwinden. Was die Raumintegrale anbelangt, so reduzieren sich diese auf Integrale über eine der genannten Ebenen, wir können sagen über die xy-Ebene selbst.

Es braucht natürlich nur von solchen turbulenten Bewegungen die Rede zu sein, für welche das erste Integral in (11) positiv ist. Da nun nach (9) und (12)

$$M = -\frac{a}{2h} u' v', \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

so müssen also u' und v' an den meisten Stellen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es ist bemerkenswert, daß dieses in der Tat der Fall sein wird, wenn durch einen plötzlichen Stoß, eine Erschütterung der Platten oder eine Unebenheit derselben, Flüssigkeit von der einen nach der anderen hin, und also auch an irgend einer anderen Stelle Flüssigkeit nach der ersten Platte zurückgetrieben wird. Kommt nämlich in einen Punkt P eine Flüssigkeitsmenge von der Seite der bewegten Scheibe her, so ist v' negativ, und zugleicherzeit u' positiv, da diese Menge die Geschwindigkeit, die sie etwas früher hatte, mit sich führt und sich also rascher in der Richtung der x-Achse bewegt, als der in P bestehenden Strömung u_1 entspricht. Umgekehrt hat man es mit einem negativen u' und einem positiven v' zu tun, sobald ein auf die bewegte Platte gerichteter Strom einsetzt.

§ 5. Der Fall, daß in allen Punkten u' und v' entgegengesetzte Vorzeichen haben, läßt sich offenbar nicht realisieren. Wir können uns aber demselben näheren, wenn wir annehmen, daß bei der turbulenten Bewegung, an und für sich gedacht, die Flüssigkeitsteilchen in Ellipsen, deren große Achse eine geeignete Richtung hat, herumlaufen, d. h. wenn wir uns einen „elliptischen Wirbel" vorstellen.

Um die Art der Bewegung genauer festzusetzen, ist es zweckmäßig, neue Koordinatenachsen in der xy-Ebene einzuführen, die aus den bis jetzt benutzten durch eine Drehung um einen gewissen spitzen Winkel α entstehen, so daß die neue x-Achse in dem Winkel zwischen den früheren positiven Halbachsen liegt. Bezogen auf dieses Koordinatensystem, lauten die Gleichungen für die in (12) dargestellte Bewegung

$$u_1 = \frac{a}{2h}(x \sin\alpha + y \cos\alpha + h)\cos\alpha, \quad v_1 = -\frac{a}{2h}(x \sin\alpha + y\cos\alpha + h)\sin\alpha,$$

so daß
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{a}{4h}\sin 2\alpha, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{a}{4h}\sin 2\alpha,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{a}{2h}\cos 2\alpha$$
und
$$M = \frac{a}{4h}(v'^2 - u'^2)\sin 2\alpha - \frac{a}{2h}u'v'\cos 2\alpha$$
wird.

Was nun den elliptischen Wirbel anbelangt, so stellen wir uns vor, daß dieser gleichsam durch eine in der Richtung der x-Achse stattfindende Kompression eines kreisförmigen Wirbels entsteht. Wir denken uns diesen letzteren in einer Hilfsfigur, in welcher wir zwei Koordinatenachsen von derselben Richtung wie die neuen Achsen in der Flüssigkeit annehmen. Indem wir die Koordinaten in dieser Hilfsfigur x_0, y_0 und die Entfernung vom Anfangspunkt derselben r_0 nennen, schreiben wir den Geschwindigkeiten in dem kreisförmigen Wirbel die Werte
$$u_0 = -\omega y_0, \quad v_0 = +\omega x_0$$
zu, in welchen ω sich stetig mit r_0 ändern soll. Dieses ω ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der eine ringförmige Schicht um das Zentrum rotiert; am Rande des Wirbels, wo r_0 den Wert b haben möge, setzen wir
$$\omega = 0.$$
Überdies nehmen wir an, daß für $r_0 = 0$ die Größen ω und $\frac{d\omega}{dr_0}$ endlich bleiben.

Dem Punkte (x_0, y_0) der Hilfsfigur ordnen wir nun einen Punkt (x, y) der Flüssigkeitsmasse in der Weise zu, daß
$$x = \varepsilon x_0, \quad y = y_0$$
ist, wo ε eine positive Konstante sein soll. Schließlich nehmen wir an, daß in diesem Punkte der Flüssigkeit eine Geschwindigkeit der turbulenten Bewegung besteht, die mit der Geschwindigkeit in dem entsprechenden Punkte des kreisförmigen Wirbels nach den Formeln
$$u' = \varepsilon u_0, \quad v' = v_0$$
zusammenhängt. Man sieht leicht, daß diese Werte mit der Kontinuitätsgleichung (6) verträglich sind und eine Bewegung in elliptischen Bahnen darstellen.

Wir haben jetzt M und N, sowie die Integrale in (11) zu berechnen. Es ergibt sich, wenn wir alles in Größen ausdrücken, die sich auf den kreisförmigen Wirbel beziehen,
$$M = \frac{a}{4h}(x_0^2 - \varepsilon^2 y_0^2)\omega^2 \sin 2\alpha + \frac{a}{2h}\varepsilon x_0 y_0 \omega^2 \cos 2\alpha,$$
$$\xi' = 0, \quad \eta' = 0,$$
$$\zeta' = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v_0}{\partial x_0} - \varepsilon\frac{\partial u_0}{\partial y_0} = \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\omega + \left(\frac{x_0^2}{\varepsilon} + \varepsilon y_0^2\right)\frac{1}{r_0}\frac{d\omega}{dr_0},$$
$$N = \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2\omega^2 + 2\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{x_0^2}{\varepsilon} + \varepsilon y_0^2\right)\frac{1}{r_0}\omega\frac{d\omega}{dr_0} + \left(\frac{x_0^2}{\varepsilon} + \varepsilon y_0^2\right)^2\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{d\omega}{dr_0}\right)^2.$$

Ferner läßt sich die Berechnung von $\int M dS$ und $\int N dS$ auf eine Integration über die $x_0 y_0$-Ebene zurückführen, wobei zu beachten ist, daß zwischen einem Elemente $d\sigma_0$ dieser Ebene und dem korrespondierenden $d\sigma$ in der xy-Ebene die Beziehung

$$d\sigma = \varepsilon\, d\sigma_0$$

besteht, und daß man von den Faktoren x_0^2, y_0^2, x_0^4, y_0^4 und $x_0^2 y_0^2$, die beiden ersten durch $\frac{1}{2} r_0^2$, den zweiten und dritten durch $\frac{3}{8} r_0^4$ und den letzten durch $\frac{1}{8} r_0^4$ ersetzen darf. Man sieht das leicht bei Ausführung der Integration über das ringförmige Element zwischen den Kreisen r_0 und $r_0 + dr_0$.

Schließlich wird

$$\int M dS = \frac{1}{4} \pi \frac{a}{h} \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \sin 2\alpha \int_0^b r_0^3 \omega^2 dr_0 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und

$$\int N dS = 2\pi\varepsilon \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^b \left(r_0 \omega^2 + r_0^2 \omega \frac{d\omega}{dr_0}\right) dr_0 + \\ + \frac{\pi}{4\varepsilon} (3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) \int_0^b r_0^3 \left(\frac{d\omega}{dr_0}\right)^2 dr_0,$$

oder, da

$$r_0 \omega^2 + r_0^2 \omega \frac{d\omega}{dr_0} = \frac{1}{2} \frac{d(r_0^2 \omega^2)}{dr_0}$$

und, sowohl für $r_0 = 0$ wie auch für $r_0 = b$, $r_0^2 \omega^2 = 0$,

$$\int N dS = \frac{\pi}{4\varepsilon} (3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) \int_0^b r_0^3 \left(\frac{d\omega}{dr_0}\right)^2 dr_0 \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Führen wir in (14) und (15) als neue unabhängige Variable das Verhältnis

$$\frac{r_0}{b} = s$$

ein, so verwandeln sich die Integrale in

$$b^4 \int_0^1 s^3 \omega^2 ds \quad \text{und} \quad b^2 \int_0^1 s^3 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 ds,$$

und es gilt, wenn noch

$$\frac{\int_0^1 s^3 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 ds}{\int_0^1 s^3 \omega^2 ds} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

gesetzt wird,

$$\int N dS = \frac{h}{ab^2} \cdot \frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) \sin 2\alpha} k \int M dS.$$

Diese Formel zeigt, daß bei gegebenen h und a das Verhältnis zwischen den beiden Integralen von b, ε, α abhängt, und außerdem von k, also von der Beziehung, die zwischen ω und s besteht. Wir können sagen, es sei die Größe des Wirbels durch b, die Gestalt durch ε, die Lage durch α und die Geschwindigkeitsverteilung in dem Wirbel durch jene Beziehung bestimmt. Was ε betrifft, so haben wir, weil $\int M dS$ positiv werden muß, diesen Koeffizienten kleiner als 1 zu nehmen.

Hat man den Wirbel gewählt, so steigt der Wert von $\int M dS$ im Vergleich zu $\int N dS$ bei wachsender Geschwindigkeit a. Es tritt also wirklich bei einer gewissen Größe a_k dieser letzteren Instabilität ein, und zwar hat man a_k aus der Gleichung

$$\varrho \int M dS = \mu \int N dS$$

abzuleiten. Also:

$$a_k = \frac{\mu h}{\varrho b^2} \cdot \frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) \sin 2\alpha} k.$$

§ 6. Es soll jetzt, wie bereits gesagt, versucht werden, einen möglichst kleinen Wert für a_k zu finden, d. h. den Wirbel so zu wählen, daß die Verhältnisse sich möglichst ungünstig für die Stabilität gestalten. Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst, bei festgehaltenen Werten von ε, α und k, den Radius b des kreisförmigen Wirbels möglichst groß werden lassen; in dieser Hinsicht können wir so weit gehen, daß zwischen den beiden Platten gerade noch Raum für den elliptischen Wirbel ist. Wir bestimmen also b durch die Bedingung, daß eine an der Ellipse mit den Halbachsen b und εb gezogene Berührungslinie, die mit der kleinen Achse den Winkel α bildet, um die Strecke h von dem Mittelpunkt entfernt ist. Daraus ergibt sich

$$b^2 = \frac{h^2}{\cos^2\alpha + \varepsilon^2 \sin^2\alpha},$$

wodurch

$$a_k = \frac{\cos^2\alpha + \varepsilon^2 \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\mu}{\varrho h} \cdot \frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2)} k$$

wird.

Zweitens bemerken wir, daß für einen gegebenen Wert von ε der erste Faktor zu einem Minimum wird, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wir bestimmen also die Lage des Wirbels durch den hieraus sich ergebenden Wert von α (zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$) und erhalten

$$a_k = \frac{\mu}{\varrho h} \cdot \frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon (1 - \varepsilon^2)} k. \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Differentiation des zweiten Faktors nach ε liefert

$$-\frac{(1+\varepsilon^2)(3-14\varepsilon^2+3\varepsilon^4)}{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)^2},$$

was für

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{6}) = 0{,}475 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

verschwindet. Dem entspricht der Minimalwert $4\sqrt{6}$ des in (17) stehenden, ε enthaltenden Bruchs, und wir finden, wenn wir dem Wirbel die durch (18) bestimmte Gestalt geben,

$$a_k = \frac{4\mu\sqrt{6}}{\varrho h} k \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

§ 7. Es erübrigt noch, diesen Ausdruck dadurch zu einem Minimum zu machen, daß wir ω als Funktion von s, also die Geschwindigkeitsverteilung in dem Wirbel in geeigneter Weise bestimmen. Wir haben zu diesem Zwecke ω um $\delta\omega$ zu variieren und das entsprechende δk gleich Null zu setzen. Wenn wir die Integrale im Nenner und Zähler von (16) G und H nennen, so reduziert sich letztere Bedingung auf

$$\delta H = \frac{H}{G}\,\delta G.$$

Hier setzen wir nun

$$\delta G = 2\int_0^1 s^3 \omega\,\delta\omega\,ds \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

und

$$\delta H = 2\int_0^1 s^3 \frac{d\omega}{ds}\cdot\frac{d\,\delta\omega}{ds}\,ds,$$

oder, nach partieller Integration und mit Rücksicht darauf, daß am Rande des Wirbels $\delta\omega$ verschwinden muß,

$$\delta H = -2\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(s^3\frac{d\omega}{ds}\right)\delta\omega\,ds \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Es muß also, in welcher Weise man auch $\delta\omega$ als Funktion von s wählen möge, immer das Verhältnis der Integrale (21) und (20) den bestimmten Wert $\frac{H}{G} = k$ haben. Offenbar ist das nur möglich, wenn zwischen den Koeffizienten von $\delta\omega\,ds$ in den beiden Ausdrücken eben dieses Verhältnis besteht, was auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}\left(s^3\frac{d\omega}{ds}\right) + ks^3\omega = 0 \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

führt. Übrigens sieht man leicht daß, sobald die Funktion ω dieser Bedingung genügt, und für $s=1$ verschwindet, das Verhältnis der Integrale

$$\int_0^1 s^3\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 ds \quad \text{und} \quad \int_0^1 s^3\omega^2\,ds$$

wirklich, wie es nach (16) sein muß, der in der Differentialgleichung (22) auftretenden Zahl k gleich wird. Aus (22) folgt nämlich

$$s^3 \omega = -\frac{1}{k}\frac{d}{ds}\left(s^3 \frac{d\omega}{ds}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und man hat also

$$\int_0^1 s^3 \omega^2 ds = -\frac{1}{k}\int_0^1 \omega \frac{d}{ds}\left(s^3 \frac{d\omega}{ds}\right) ds,$$

was nach partieller Integration übergeht in

$$\frac{1}{k}\int_0^1 s^3 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 ds.$$

Aus Formeln, die man in Lommel's „Studien über die Bessel'schen Funktionen“ findet, ergibt sich, daß man die Gleichung (22) mit Hilfe solcher Funktionen integrieren kann. Setzt man nämlich

$$\omega = \frac{\varphi}{s}$$

und führt man zugleicherzeit

$$s' = s\sqrt{k}$$

als neue unabhängige Variable ein, dann verwandelt sich die Gleichung in

$$\frac{d^2\varphi}{ds'^2} + \frac{1}{s'}\cdot\frac{d\varphi}{ds'} + \left(1 - \frac{1}{s'^2}\right)\varphi = 0,$$

deren Lösung

$$\varphi = c\,J_1(s') = c\,J_1(s\sqrt{k})$$

ist, da für $s = 0$, ω endlich bleibt, und also $\varphi = 0$ wird. Mit c ist eine Integrationskonstante bezeichnet.

Um auch der Bedingung zu genügen, daß ω für $s = 1$ verschwindet, müssen wir die bis jetzt unbestimmt gebliebene Zahl k so wählen, daß $\sqrt{k}$ eine Wurzel der Gleichung

$$J_1(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

ist. Wir verstehen unter ξ die kleinste Wurzel dieser Gleichung und setzen

$$\sqrt{k} = \xi, \qquad k = \xi^2,$$

so daß

$$\omega = \frac{c}{s} J_1(\xi s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

wird. Diese Größe bleibt, wie es sein muß, im Zentrum des Wirbels endlich. Da nämlich, für $x = 0$, $\operatorname{Lim} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}$ ist, so nähert sich ω, für $s = 0$, dem Grenzwert $\frac{1}{2} c\xi$.

Daß nun der Ausdruck (16) wirklich zu einem Minimum wird, wenn man der Funktion ω die Gestalt (25) beilegt, läßt sich in

folgender Weise zeigen. Es sei, während ω die Bedeutung (25) behält, ω' irgend eine andere Funktion, die, ebenso wie ihr Differentialquotient, von $s = 0$ bis $s = 1$ endlich und stetig ist und für $s = 1$ verschwindet. Setzen wir dann

$$\omega' = \psi \omega,$$

so wissen wir von der Funktion ψ, daß sie immer endlich bleibt, da in dem zu betrachtenden Intervall ω nie Null wird (eben weil ξ die kleinste Wurzel der Gleichung (24) ist), und an der oberen Grenze, wo ω und ω' beide verschwinden, $\frac{d\omega}{ds}$ von Null verschieden und $\frac{d\omega'}{ds}$ endlich ist.

Indem wir nun zur Abkürzung

$$\int_0^1 s^3 \omega'^2 ds = G', \qquad \int_0^1 s^3 \left(\frac{d\omega'}{ds}\right)^2 ds = H'$$

setzen, und wieder die Gleichung (23) heranziehen, finden wir

$$G' = \int_0^1 s^3 \psi^2 \omega^2 ds = -\frac{1}{k}\int_0^1 \psi^2 \omega \frac{d}{ds}\left(s^3 \frac{d\omega}{ds}\right) ds =$$

$$= -\frac{1}{k}\left|\psi^2 \omega s^3 \frac{d\omega}{ds}\right|_0^1 + \frac{1}{k}\int_0^1 s^3 \frac{d\omega}{ds}\frac{d}{ds}(\psi^2\omega)\, ds =$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^1 s^3 \left[\left\{\frac{d(\psi\omega)}{ds}\right\}^2 - \omega^2\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2\right] ds = \frac{1}{k} H' - \frac{1}{k}\int_0^1 s^3 \omega^2 \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 ds.$$

Abgesehen von dem Fall, daß die neue Funktion ω' sich nur durch einen **konstanten** Faktor von ω unterscheidet, und also zu demselben Wert von (16) führt, können wir aus dieser Gleichung schließen

$$G' < \frac{1}{k} H', \quad \frac{H'}{G'} > k, \text{ d. h.}$$

$$\frac{H'}{G'} > \frac{H}{G}.$$

Nachdem es sich in dieser Weise bestätigt hat, daß ξ^2 oder, da $\xi = 3{,}832$ ist, 14,68 der kleinste Wert von k ist, erhalten wir aus (19) für die gesuchte Geschwindigkeit, wenn wir die Entfernung $\Delta = 2h$ der Platten einführen,

$$a_k = \frac{288\,\mu}{\varrho \Delta} \quad \text{. . . . .} \quad (26)$$

Zur Vergleichung füge ich hinzu, daß, wenn man

$$\omega = C(1 - s)$$

setzt, wo C eine Konstante bedeutet, die Formel (16) den Wert $k = 15$ ergibt. Nimmt man dagegen

$$\omega = C \cos^2 \frac{1}{2}\pi s, \quad \text{. . . . .} \quad (27)$$

was ebenfalls für $s = 1$ verschwindet, dann wird $k = 16{,}7$. Dieses letztere Resultat ist deshalb von Interesse, weil die Funktion (27) die Eigenschaft hat daß, für $s = 1$, $\frac{d\omega}{ds} = 0$ wird, was bei einem wirklichen Wirbel der Fall sein wird, bei der Funktion (25) aber nicht zutrifft. Man sieht indes, daß dies auf den Wert von k und den Koeffizienten in der Gleichung (26) keinen beträchtlichen Einfluß hat.

§ 8. Ein Fall, der zwar nicht genau mit dem im Vorhergehenden betrachteten übereinstimmt, aber diesem doch so ähnlich ist, daß es nahe liegt, die Gleichung (26) anzuwenden, ist von Couette[1]) experimentell untersucht worden. Bei den Versuchen dieses Physikers befand sich die Flüssigkeit in dem Raum zwischen zwei koaxialen Zylindern, von welchen der äußere um die gemeinschaftliche vertikale Achse in Rotation versetzt wurde. Es wurde das Kräftepaar gemessen, das man auf den beweglich aufgehängten inneren Zylinder wirken lassen mußte, um ihn zu verhindern sich mit zu drehen; in dieser Weise erhielt man ein Maß, sowohl für die auf den inneren Zylinder von der Flüssigkeit ausgeübte Reibung, wie auch für den Widerstand, der bei der Drehung des äußeren Zylinders zu überwinden war. Während nun das erforderliche Kräftepaar bei langsamer Bewegung der Rotationsgeschwindigkeit proportional gefunden wurde, machte sich bei Steigerung der Geschwindigkeit das Auftreten turbulenter Bewegungen dadurch bemerklich, daß der Widerstand rascher als die Geschwindigkeit zunahm.

Da die Radien der Zylinder 14,640 und 14,393 cm betrugen, und also die Dicke der Flüssigkeitsschicht (0,247 cm) im Vergleich zu denselben ziemlich klein war, so dürfen wir, wie mir scheint, annehmen, daß in der Flüssigkeit dieselben Erscheinungen wie in dem Raum zwischen zwei parallelen ebenen Platten sich abspielen können.

Bei den Versuchen mit Wasser war die Temperatur $16^0{,}7$, und also nach den Angaben von Poiseuille der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}011$ C. G. S.-Einheiten. Setzt man weiter $\varrho = 1$ und $\Delta = 0{,}247$, so erhält man aus (26)

$$a_k = 13 \text{ cm/sec.}$$

Couette fand aber, daß eine Anderung in dem Gesetze des Widerstandes sich erst zeigte, als die Anzahl der Umläufe 56 in der Minute betrug. Dem entspricht eine Geschwindigkeit der äußeren Zylinderfläche von 86 cm pro Sekunde, und müssen wir also schließen, daß in Wirklichkeit die Bedingungen für die Stabilität der regelmäßigen Bewegung weit günstiger sind, als wir aus der Gleichung (26) gefolgert haben.

---

1) Couette, l. c., p. 436.

Ohne Zweifel liegt dies daran, daß ein elliptischer Wirbel von der vorausgesetzten Art nicht zustande kommen kann. Da, wie bereits bemerkt wurde, das gleichzeitige Auftreten in der Gleichung (13) von Werten von u' und v' mit entgegengesetzten Vorzeichen daher rührt, daß Flüssigkeit durch irgend welche Störung von der einen Platte nach der anderen hingetrieben wird, so ist es begreiflich, daß hierbei die Richtung der aus u' und v' zusammengesetzten Geschwindigkeit nicht gerade die für einen großen Wert von $\int M\,dS$ günstigste sein wird. Auch ist zu bemerken, daß eine Störung wohl nie in allen senkrecht zur z-Achse stehenden Ebenen in derselben Weise stattfinden wird. Der Wirbel wird vielmehr nach der Seite sowohl der positiven wie auch der negativen z begrenzt sein; an diesen Stellen, wo er mit Flüssigkeit ohne turbulente Bewegung in Berührung steht, treten Reibungskräfte auf, die ebenso gut wie die im Innern des Wirbels wirksamen dazu beitragen können, ihn wieder zum Verschwinden zu bringen. Besser noch entspräche es der Wirklichkeit, wenn man sich vorstellte, daß, sobald die Flüssigkeit an einer Stelle senkrecht zu den Platten fortgetrieben wird, sie an allen Stellen rings herum wieder zurückströmt, eine Voraussetzung, die indes recht mühsame Berechnungen erheischen würde.

Es möge übrigens daran erinnert werden, daß auch Reynolds, der für die Strömung durch Röhren gleichfalls mittels gewisser Annahmen über die Art der turbulenten Bewegung die kritische Geschwindigkeit U_k zu berechnen versucht hat, einen zu kleinen Wert erhielt. Er fand[1]) für die Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei festen parallelen Wänden in der Entfernung Δ voneinander

$$U_k = \frac{517\,\mu}{\varrho\,\Delta},$$

(was indes nur die Bedeutung einer unteren Grenze haben soll), während nach seinen experimentellen Untersuchungen die kritische Geschwindigkeit in dem freilich nicht ganz vergleichbaren Fall eines zylindrischen Rohrs vom Durchmesser Δ die Größe

$$U_k = \frac{1900\,\mu}{\varrho\,\Delta}$$

hat.

§ 9. Was das von Reynolds aufgefundene und durch seine eigenen und Couette's Messungen bestätigte Gesetz betrifft, nach welchem die kritische Geschwindigkeit in einer Röhre dem Reibungskoeffizienten direkt, der Dichte sowie dem Durchmesser aber umgekehrt proportional sein soll, so läßt sich dieses leicht aus der Betrachtung ähnlicher Systeme ableiten.

---

1) Siehe die oben (p. 44) zitierte Abhandlung, p. 162.

Wir unterscheiden zwei derartige Systeme durch die Indizes 1 und 2 und definieren korrespondierende Punkte und Zeiten durch die Gleichungen

$$x_2 = \alpha x_1, \quad y_2 = \alpha y_1, \quad z_2 = \alpha z_1,$$
$$t_2 = \beta t_1,$$

wo α und β Konstanten sind. Ferner setzen wir

$$\varrho_2 = \gamma \varrho_1, \quad \mu_2 = \delta \mu_1.$$

Besteht nun in dem ersten System ein gewisser die Bewegungsgleichungen erfüllender Zustand (u_1, v_1, w_1, p_1), so ist in dem zweiten ein Zustand möglich, bei dem in korrespondierenden Punkten und zu eben solchen Zeiten

$$u_2 = \varepsilon u_1, \quad v_2 = \varepsilon v_1, \quad w_2 = \varepsilon w_1,$$
$$p_2 = \eta p_1$$

ist, wenn nur die Konstanten ε und η den Bedingungen

$$\frac{\gamma \varepsilon}{\beta} = \frac{\gamma \varepsilon^2}{\alpha} = \frac{\eta}{\alpha} = \frac{\delta \varepsilon}{\alpha^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

genügen. Dann unterscheiden sich nämlich die in einer Bewegungsgleichung für das zweite System auftretenden Glieder alle durch denselben Faktor von den entsprechenden Gliedern für das erste System.

Die Gleichungen (28) enthalten auch dann noch alle Bedingungen für die Möglichkeit ähnlicher Bewegungen, wenn in den beiden Systemen feste Körper von ähnlicher geometrischer Lage, an welchen die Flüssigkeit haftet, vorhanden sind.

Die aus (28) folgende Beziehung

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\alpha \gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

führt nun sofort zum Reynolds'schen Gesetz, da ja die kritischen Geschwindigkeiten in zwei Systemen korrespondierende Geschwindigkeiten sein müssen.

Daß das in der Beziehung (29) ausgedrückte Gesetz auch für andere, hier nicht betrachtete Fälle gilt, z. B. für die Störung eines Stromes durch ein unbewegliches Hindernis, oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Fortschreiten eines festen Körpers in einer ruhenden Flüssigkeit, braucht kaum hervorgehoben zu werden. In allen solchen Fällen könnte man auch, unter Einführung geeigneter Annahmen über die Art der turbulenten Bewegung, die Gleichung (11) benutzen, um über die Frage nach der Stabilität einer regelmäßigen Bewegung zu entscheiden. Aus der Formel (9) sieht man sofort, daß M um so größer ist, und also die Stabilität um so eher verloren geht, je größer die Geschwindigkeit (u_1, v_1, w_1); in einem gegebenen System sind ja im allgemeinen mit großen Werten von u_1, v_1, w_1 auch große Werte der

Differentialquotienten $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, usw. verbunden. Dadurch wird es erklärlich, daß wirklich in sehr vielen Fällen von einer kritischen Geschwindigkeit die Rede sein kann. Daß übrigens große Werte des Reibungskoeffizienten der Stabilität günstig sind, erhellt unmittelbar aus der Erwägung, daß entstehende Wirbel eben durch die Reibung vernichtet werden können.

Es möge schließlich bemerkt werden, daß, wenn man eine Formel wie (26) auch auf ein Gas anwendet, und dabei für den Reibungskoeffizienten den aus der kinetischen Gastheorie folgenden Wert einführt, eine Beziehung zwischen der mittleren freien Weglänge l eines Moleküls, der mittleren Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Molekularbewegung, den Dimensionen $\varDelta$ der Gasmasse und der kritischen Geschwindigkeit sich herausstellt. Die Gleichung verwandelt sich nämlich in

$$a_k = C\frac{l\mathfrak{u}}{\varDelta},$$

wo der Koeffizient C nahe den Wert 100 hat.

§ 10. Es erhebt sich jetzt die Frage, welchen Verlauf die Erscheinungen haben werden, nachdem einmal eine turbulente Bewegung entstanden und bis zu einer gewissen Intensität angewachsen ist. Um hierüber einigen Aufschluß zu gewinnen, wollen wir von der Annahme ausgehen, daß es möglich sei, aus der gesamten Bewegung einen gewissen Teil auszuscheiden, der bei oberflächlicher Betrachtung zu allererst in die Augen fällt; z. B., wenn es sich um die Strömung durch ein Rohr handelt, trennen wir in Gedanken das Weiterfließen der Flüssigkeit, wodurch das hindurchströmende Volum bestimmt wird, von den wirbelnden Bewegungen, von denen es begleitet ist. Den besagten Teil der Bewegung nennen wir die Hauptbewegung und wir reservieren jetzt die Bezeichnung „turbulente Bewegung“ für den übrigbleibenden Teil. Dieser letztere Ausdruck hat daher nicht mehr ganz dieselbe Bedeutung wie früher (§ 2), als wir uns die Wirbel auf die damals betrachtete regelmäßige Bewegung superponiert dachten. Es wird sich nämlich ergeben, daß die Hauptbewegung den Gleichungen (4) nicht genügt, und daß sie also von einer diesen entsprechenden regelmäßigen Bewegung wohl zu unterscheiden ist.

Um den Begriff der Hauptbewegung genauer festzusetzen, führen wir für u, v, w, p und für sonstige davon abhängige Größen φ gewisse Mittelwerte ein. Solche lassen sich in verschiedener Weise definieren. Man kann z. B., nachdem man ein bestimmtes Zeitintervall τ gewählt hat, für jeden Punkt (x, y, z) des Raumes und jede Zeit t einen zeitlichen Mittelwert $\bar{\varphi}$ berechnen nach der Gleichung

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} \varphi\, dt. \qquad (30)$$

Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man durch den betrachteten Punkt P eine gerade Linie s von der Länge l zieht, in deren Mitte P liegt, und die Größe

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{l}\int \varphi\, ds, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

wo über die Strecke l zu integrieren ist, betrachtet. Oder man legt um P eine geschlossene Fläche, die einen Raum S von der Größe S einschließt, und berechnet, indem man über diesen Raum integriert,

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{\mathrm{S}}\int \varphi\, dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Dabei wollen wir, was diese räumlichen Mittelwerte (31) und (32) betrifft, festsetzen, daß die Linienstrecke l oder der Raum S sich nicht mit der Zeit ändert, und daß man, wenn man $\overline{\varphi}$ für einen neuen Punkt P' berechnen will, sich einer Linie s', bzw. eines Raumes S$'$ bedienen muß, die aus der Linie l und dem Raum S durch eine Verschiebung um die Strecke PP' erhalten werden, ebenso wie man bei Anwendung der Formel (30) unter τ eine ein für allemal festgesetzte Zeitlänge zu verstehen hat.

Offenbar sind die Mittelwerte selbst Funktionen der Zeit und der Koordinaten des Punktes, für den man sie berechnet hat, und gilt infolge unserer Definitionen

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}, \qquad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad \text{usw.}$$

Man könnte sich dieser Formeln auch dann noch bedienen, wenn man die verschiedenen Bildungsweisen der Mittelwerte miteinander kombiniert hätte, wenn z. B. zunächst zeitliche Mittelwerte und dann von diesen wieder räumliche genommen wären.

Indem wir nun die Hauptbewegung als eine Bewegung mit den mittleren Geschwindigkeiten $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ definieren, können wir die zu Anfang dieses Paragraphen gemachte Annahme folgendermaßen aussprechen. Es soll vorausgesetzt werden, daß die Bildung der Mittelwerte in solcher Weise vorgenommen werden kann, daß die Bewegung ($\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$) einfacher ist als die in Wirklichkeit bestehende, ohne daß dennoch alle uns interessierende Einzelheiten aus derselben verschwunden sind. Bei der Strömung durch ein Rohr erreichen wir dieses, wenn wir die Mittelwerte nach dem in (31) angegebenen Verfahren berechnen, und zwar für eine Linie s, die der Achse des Rohrs parallel läuft. Bei genügender Länge von l wird dann die Hauptbewegung geradlinig; sie hat aber noch in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts ungleiche Geschwindigkeit. Diese Ungleichheit würde ganz oder zum größten Teil verwischt werden, wenn wir die Formel (32) zugrunde legen und dabei dem Raume S Dimensionen von der Größe der Wirbel, die ja einen beträchtlichen Teil eines Querschnitts einnehmen können, geben wollten.

Da die Mittelwerte selbst Funktionen von x, y, z, t sind, so kann man aufs neue die Mittelwerte derselben bilden. Es soll indes angenommen werden, was bei der Strömung in einem Rohr auch wirklich zutrifft, daß in dem Integrationsgebiete der Formeln (30) bis (32) der Wert von $\bar{\varphi}$ als konstant betrachtet werden darf; für den Mittelwert von $\bar{\varphi}$ kann man dann $\bar{\varphi}$ selbst setzen, und, wenn ψ eine zweite Funktion ist, so hat das Produkt $\overline{\bar{\varphi}\psi}$ den Mittelwert $\bar{\varphi}\,\bar{\psi}$.

§ 11. Es sollen jetzt Formeln abgeleitet werden, die man die Differentialgleichungen für die Hauptbewegung nennen kann. Zu diesem Zwecke setzen wir für die wirklichen Werte der Geschwindigkeiten und des Druckes

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p', \quad . \tag{33}$$

wo sich nun $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$ auf die Hauptbewegung und u', v', w', p' auf die turbulente Bewegung beziehen, führen diese Werte in die Gleichungen (1) und (4) ein, und nehmen von allen Gliedern die Mittelwerte. Wir benutzen dabei einige Formeln, die sich sofort aus dem Vorhergehenden ableiten lassen. Zunächst folgt aus (33), wenn man auch hier beiderseits die Mittelwerte bildet,

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{v'} = 0, \quad \overline{w'} = 0, \quad \overline{p'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{34}$$

Dieselbe Operation, auf die Gleichungen

$$u^2 = (\bar{u})^2 + 2\bar{u}u' + u'^2, \quad \text{usw.}$$

und

$$uv = \bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + \bar{v}u' + u'v', \quad \text{usw.}$$

angewandt, liefert ferner

$$\overline{u^2} = (\bar{u})^2 + \overline{u'^2}, \quad \text{usw.}$$

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}, \quad \text{usw.}$$

Mit Rücksicht hierauf erhält man aus (1) und (4) die auch von Reynolds abgeleiteten Gleichungen[1])

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial\{(\bar{u})^2\}}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \\ - \varrho\left[\frac{\partial\,\overline{(u'^2)}}{\partial x} + \frac{\partial\,\overline{(u'v')}}{\partial y} + \frac{\partial\,\overline{(u'w')}}{\partial z}\right], \text{ usw.,} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

deren letztere sich von den entsprechenden Gleichungen für die Gesamtbewegung durch die auf der rechten Seite stehenden mit ϱ multipli-

1) Vgl. die Formel (15) in der oben (p. 44) zitierten Arbeit von Reynolds.

zierten Glieder unterscheiden. Trotzdem kann man sie auf die Form (2) bringen. Setzt man nämlich

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} - \varrho\overline{u'^2}, \\ X_y &= \mu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) - \varrho\overline{u'v'}, \\ X_z &= \mu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right) - \varrho\overline{u'w'}, \\ &\text{usw.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

so kann man schreiben

$$\varrho\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial\{(\bar{u})^2\}}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}\right] = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ usw.} \quad (38)$$

Also: Wenn man die Hauptbewegung an und für sich betrachten will, so hat man zu den den Formeln (3) entsprechenden Spannungskomponenten

$$2\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}, \quad \mu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right), \quad \text{usw.,}$$

die Größen

$$-\varrho\overline{u'^2}, \quad -\varrho\overline{u'v'}, \quad \text{usw.}$$

zu addieren. Es sind dies gleichsam neue Spannungen, die aus der turbulenten Bewegung entstehen.

Diese Deutung unserer Formeln liegt sehr nahe, wenn man von der Auffassung ausgeht, daß die Gleichungen (4) die im Laufe der Zeit stattfindende Änderung der in einem feststehenden Volumenelement enthaltenen Bewegungsgröße bestimmen. Eine solche Änderung kann ebenso gut wie durch Kräfte, welche auf die Seitenflächen des Elementes wirken, auch dadurch herbeigeführt werden, daß diese Flächen von Materie, die eine gewisse Bewegungsgröße mit sich trägt, durchströmt werden. Man sieht leicht, daß die Ausdrücke

$$\varrho u^2, \quad \varrho uv, \quad \varrho uw \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

die für die Flächen- und Zeiteinheit berechneten, nach der x-Richtung zerlegten Bewegungsgrößen darstellen, welche in der positiven Richtung durch senkrecht zu den Koordinatenachsen stehende Flächenelemente hindurchgehen, und daß der hieraus entspringende Zuwachs jener Bewegungsgröße für ein Raumelement $dx\,dy\,dz$ pro Zeiteinheit

$$-\left[\frac{\partial(\varrho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho uw)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz$$

beträgt. Da das Element in der Richtung der x-Achse die Kraft

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u\right) dx\,dy\,dz$$

erleidet, so kommt man bei dieser Betrachtungsweise in der Tat zu den Gleichungen (4). Bei dem Übergange zu den Mittelwerten sind dann weiter die Größen (39) durch

$$\varrho\left(\{\bar{u}\}^2 + \overline{u'^2}\right), \quad \varrho\left(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}\right), \quad \varrho\left(\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}\right)$$

zu ersetzen, woraus man sieht, daß die letzten Glieder in den Ausdrücken (37) wirklich mit dem Transport von Bewegungsgröße infolge der turbulenten Bewegung zusammenhängen. Man kann sagen, diese letztere bringe eine neue Reibung hervor, in ähnlicher Weise wie die Bewegung der Moleküle, indem sie Bewegungsgröße durch eine Fläche hindurch trägt, die Reibung der Gase verursacht."

§ 12. Die Idee, daß die turbulente Bewegung eine Reibung zur Folge habe, findet sich auch in der oben (p. 43) zitierten Arbeit von Boussinesq[1]; sie wurde aber von diesem Physiker in ganz anderer Weise durchgeführt, als wir es getan haben. Ohne auf die Art und Weise, wie die neue Reibung zustande kommt, näher einzugehen, nimmt Boussinesq an, dieselbe folge ähnlichen Gesetzen wie die gewöhnliche Reibung, und man habe also weiter nichts zu tun, als den Koeffizienten μ in den Gleichungen (3) durch einen anderen von der Intensität der Wirbelbewegungen abhängigen Koeffizienten zu ersetzen. Was die Glieder betrifft, in welchen in der oben gegebenen Darstellung der Einfluß der turbulenten Bewegung sich ausspricht, so werden diese von Boussinesq ganz vernachlässigt. Er führt nämlich als Mittelwerte der Beschleunigungskomponenten die Größen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \text{ usw.}$$

ein, während für diese in Wirklichkeit die Ausdrücke

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}}, \text{ usw.}$$

gelten. Da nun, wie sich sogleich ergeben wird,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,$$

so läßt sich für die von Boussinesq vernachlässigten Glieder schreiben

$$\frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z}, \text{ usw.}$$

Es sind dies gerade die in unseren Gleichungen (36) auftretenden, von der turbulenten Bewegung herrührenden Ausdrücke.

§ 13. Wir wenden uns jetzt zu den Gleichungen, mittels welcher man bei gegebener Hauptbewegung die turbulente Bewegung bestimmen könnte. Um zu denselben zu gelangen, subtrahieren wir (35) und (36) von (1) und (4), nachdem wir in diesen letzteren Gleichungen u, v, w, p durch $\bar{u} + u'$, $\bar{v} + v'$, $\bar{w} + w'$, $\bar{p} + p'$ ersetzt haben. Man

1) l. c., p. 42.

erhält in dieser Weise zunächst die Kontinuitätsgleichung für die turbulente Bewegung

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,$$

und dann die drei Bewegungsgleichungen[1])

$$\left.\begin{aligned}\varrho\Big[\frac{d u'}{d t} + u'\frac{\partial \bar u}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar u}{\partial y} + w'\frac{\partial \bar u}{\partial z} + \frac{\partial (u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u'v')}{\partial y} + \frac{\partial (u'w')}{\partial z} - \\ -\Big\{\frac{\partial (\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z}\Big\}\Big] = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \Delta u', \text{ usw.,}\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

in welchen das Zeichen $\frac{d}{dt}$ sich auf die Änderung in einem an der Hauptbewegung teilnehmenden Punkt bezieht, so daß z. B.

$$\frac{d u'}{d t} = \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar u \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar v \frac{\partial u'}{\partial y} + \bar w \frac{\partial u'}{\partial z}$$

ist.

Schließlich wollen wir nun die drei Bewegungsgleichungen (40) mit u', v', w' multiplizieren und sie dann zueinander addieren; dabei bedienen wir uns einiger Umformungen, die den bereits in § 3 benutzten entsprechen. Nur wird jetzt das Resultat etwas komplizierter, da wir u', v', w' nicht mehr als unendlich klein behandeln wollen. Führt man wieder die durch (8) bestimmten doppelten Winkelgeschwindigkeiten der turbulenten Bewegung ein, und setzt man außerdem

$$\left.\begin{aligned}M = -\Big\{u'^2\frac{\partial \bar u}{\partial x} + v'^2\frac{\partial \bar v}{\partial y} + w'^2\frac{\partial \bar w}{\partial z} + u'v'\Big(\frac{\partial \bar u}{\partial y} + \frac{\partial \bar v}{\partial x}\Big) + \\ + v'w'\Big(\frac{\partial \bar v}{\partial z} + \frac{\partial \bar w}{\partial y}\Big) + w'u'\Big(\frac{\partial \bar w}{\partial x} + \frac{\partial \bar u}{\partial z}\Big)\Big\},\end{aligned}\right. \quad (41)$$

$$\left.\begin{aligned}P = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{u'(u'^2 + v'^2 + w'^2)\} + \text{ usw.,} \\ Q = u'\Big\{\frac{\partial (\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z}\Big\} + \text{ usw.,}\end{aligned}\right. \quad . \ . \ (42)$$

und ebenso wie früher

$$N = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (43)$$

so ergibt sich[2])

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}\varrho(u'^2 + v'^2 + w'^2)\Big\} = \varrho(M - P + Q) - \Big\{\frac{\partial (u'p')}{\partial x} + \frac{\partial (v'p')}{\partial y} + \frac{\partial (w'p')}{\partial z}\Big\} + \\ + \mu\Big\{\frac{\partial}{\partial x}(v'\zeta' - w'\eta') + \text{ usw.}\Big\} - \mu N. \quad (44)\end{aligned}$$

---

1) Diese stimmen überein mit den Formeln (16) in der oben (p. 44) zitierten Abhandlung von Reynolds.

2) Vgl. die Formel (19) in der oben (p. 44) zitierten Arbeit von Reynolds. In der ursprünglichen Abhandlung hatte ich die Glieder mit P und Q, die übrigens in (45) und (46) nicht mehr vorkommen, nicht beachtet. Prof. Sommerfeld hat mich auf diesen Fehler aufmerksam gemacht.

Wir multiplizieren diese Gleichung mit einem Volumenelement dS und integrieren sie über einen bestimmten Raum S, an dessen Grenzen u', v' und w' Null sein mögen. Links erhalten wir dann die pro Zeiteinheit stattfindende Zunahme der kinetischen Energie der turbulenten Bewegung, berechnet in der Voraussetzung, daß die Grenzen des Integrationsgebietes an der Hauptbewegung teilnehmen. Wir bezeichnen diese Energie wieder mit E und die besagte Zunahme mit $\frac{dE}{dt}$. Auf der rechten Seite verschwinden alle Glieder (zu welchen auch die in $-\varrho P$ zusammengefaßten gehören), die sich aus Differentialquotienten nach x, y, z zusammensetzen. Auch das Glied ϱQ fällt fort, wenn wir mit solchen Mittelwerten rechnen, daß

$$\int Q\,dS = \int \overline{Q}\,dS$$

gesetzt werden darf; aus (42) geht nämlich, wegen (34), hervor (vgl. den Schluß von § 10), daß $\overline{Q} = 0$ ist.

Das Resultat lautet also[1])

$$\frac{dE}{dt} = \varrho \int M\,dS - \mu \int N\,dS, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45)$$

und für einen Zustand, in dem die Energie der Wirbelbewegung konstant bleibt,

$$\varrho \int M\,dS = \mu \int N\,dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (46)$$

Man kann übrigens dem Integral $\int N\,dS$ noch eine andere Gestalt geben. Aus den Werten (8) von ξ', η', ζ' folgt

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2 + \text{ usw. } - 4\left\{\frac{\partial w'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial z} + \text{ usw.}\right\}.$$

Da nun ferner bei partieller Integration und mit Rücksicht darauf, daß an den Grenzen $u' = v' = w' = 0$,

$$2\int\left\{\frac{\partial w'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial z} + \text{ usw.}\right\}dS = 2\int\left\{\frac{\partial w'}{\partial z}\frac{\partial v'}{\partial y} + \text{ usw.}\right\}dS =$$

$$= \int\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2 - \left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right\}\right]dS =$$

$$= -\int\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right\}dS$$

wird, so kann man in (45) und (46) auch setzen

$$N = 2\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right\} + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2 + \text{ usw.}$$

Die Formel (45) stimmt dann mit der Gleichung überein, die **Reynolds** benutzt hat[2]), um ein Kriterium für die Stabilität von Flüssigkeitsbewegungen zu gewinnen.

---

1) Vgl. Formel (20) in der Abhandlung von **Reynolds**.

2) Gleichung (24) seiner Abhandlung.

Zu der Gleichung (46), welche die Bedingung für konstant bleibende Energie der turbulenten Bewegung abgibt, wollen wir noch folgendes bemerken. Sind die Geschwindigkeitsgefälle $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, usw. bei der Hauptbewegung von der Größenordnung $\mathbf{g}$, die Geschwindigkeiten der turbulenten Bewegung von der Ordnung $\mathbf{w}$, und bezeichnet man mit λ eine solche Strecke, daß die Differenzen der Werte von u', v', w' in zwei um λ voneinander entfernten Punkten von derselben Ordnung sind wie u', v', w' selbst, so ist nach (41) und (43) M von der Ordnung $\mathbf{w}^2\mathbf{g}$ und N von der Ordnung $\frac{\mathbf{w}^2}{\lambda^2}$. Folglich zeigt die Gleichung (46), daß λ von der Ordnung $\sqrt{\frac{\mu}{\varrho \mathbf{g}}}$ sein muß. Man kann füglich sagen, dieses λ bestimme die Dimensionen der Wirbel. Mithin müssen diese im allgemeinen um so kleiner sein, je größer das Geschwindigkeitsgefälle bei der Hauptbewegung und je kleiner das Verhältnis $\frac{\mu}{\varrho}$ ist.

Über die Intensität der Wirbel sagt die Gleichung (46) an sich nichts aus, da auf beiden Seiten Größen stehen, die mit $\mathbf{w}^2$ proportional sind.

§ 14. Für den Fall eines stationären Flüssigkeitsstromes in einem zylindrischen Rohr von kreisförmigem Querschnitt kann man die vorstehenden Betrachtungen noch etwas weiter führen. Mit „stationär" ist hier gemeint, daß in einem bestimmten Punkte die Geschwindigkeit der Hauptbewegung unabhängig von der Zeit ist, und daß die turbulente Bewegung, obgleich bei ihr diese Unabhängigkeit nicht besteht, im ganzen genommen fortwährend dieselbe Intensität hat. Die Tatsache, daß die für eine bestimmte Ausflußmenge erforderliche Druckdifferenz der Röhrenlänge proportional ist[1]), berechtigt uns zu der Annahme, daß die Wirbelbewegung in allen Querschnitten des Rohrs in gleichem Maße vorhanden ist, und dürfen wir somit, indem wir die x-Achse in die Achse des Rohrs in der Stromrichtung legen, alle sich auf die turbulente Bewegung beziehenden Mittelwerte wie $\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$, usw. als unabhängig von x betrachten.

Man sieht nun leicht, daß den Bewegungsgleichungen (35) und (36) durch eine Hauptbewegung genügt werden kann, die an allen Stellen der Achse parallel ist, so daß überall $\bar{v} = \bar{w} = 0$. Aus (35) folgt dann, daß $\bar{u}$ unabhängig von x sein muß und die Gleichungen (36) verwandeln sich in

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \varrho\left\{\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z}\right\}, \\ 0 &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \varrho\left\{\frac{\partial(\overline{v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial z}\right\}, \\ 0 &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \varrho\left\{\frac{\partial(\overline{w'^2})}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial y}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (47)$$

1) Siehe z. B. Couette, l. c., Nr. 20.

Nach der ersten Gleichung ist der Wert von $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ unabhängig von x; ebensowenig kann er von y und z abhängen, da nach den beiden letzten Gleichungen $\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x \partial y} = 0$ und $\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x \partial z} = 0$ ist. Somit besteht, was den mittleren Druck $\bar{p}$ betrifft, in der ganzen Flüssigkeitsmasse ein konstantes Gefälle in der Längsrichtung; wir bezeichnen es mit q.

An der Röhrenwand setzen wir wieder Abwesenheit von Gleitung voraus. Hier ist also $u = v = w = 0$, und, weil wir die Mittelwerte nach dem in (31) ausgedrückten Verfahren bilden, $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$; also, nach (33), auch

$$u' = v' = w' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

Für den Raum S, über welchen in den Gleichungen (45) und (46) integriert wird, nehmen wir jetzt den Teil des Zylinders zwischen zwei senkrechten Querschnitten σ_1 und σ_2, und zwar legen wir σ_2 stromabwärts in so große Entfernung L von σ_1, daß wir in unseren Formeln neben den Gliedern, die proportional mit L sind, solche, von denen dies nicht gilt, vernachlässigen dürfen. Zu den Größen erster Art gehören die in (45) und (46) stehenden, zu den Größen zweiter Art dagegen die Integrale über σ_1 und σ_2, welche sich jetzt bei der Integration derjenigen Glieder in (44), welche Differentialquotienten nach x sind, ergeben. Was die Differentialquotienten nach y oder z betrifft, so verschwinden diese wegen der an der Wand geltenden Bedingung (48). Der stationäre Zustand ist also wirklich durch (46) charakterisiert.

§ 15. Um diesen Zustand näher kennen zu lernen, könnten wir nun von den Gleichungen (47) ausgehen. Es gibt indes einen einfacheren Weg, der zu demselben Resultate führt; er besteht darin, daß wir direkt den ganzen Raum, welcher von einem mit der Wand koaxialen Zylinder Z vom Radius r, und den Ebenen σ_1 und σ_2 eingeschlossen ist, ins Auge fassen, und unsere Aufmerksamkeit auf die in demselben bestehende, nach der x-Richtung zerlegte Bewegungsgröße richten. Es ist klar, daß diese nur von der Hauptbewegung abhängt und sich daher nicht ändert. Die verschiedenen Ursachen, welche eine Änderung herbeiführen könnten, müssen sich somit kompensieren. Diese Ursachen sind nun:

1°. Die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ zwischen korrespondierenden Punkten der Querschnitte σ_1 und σ_2. Wir brauchen nur mit

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = qL$$

zu rechnen, da $p'_1 - p'_2$ nicht im gleichen Verhältnis wie L zunimmt. Wir haben also zunächst eine Kraft in der Richtung des Stromes

$$\pi q r^2 L \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

2°. Die Reibung an der Zylinderfläche Z. Diese beträgt pro Flächeneinheit, da es nur auf den Mittelwert ankommt,

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dr},$$

was in allen Punkten von Z denselben Wert hat. Dies liefert für den ganzen Zylinder eine Kraft

$$2\pi\mu \frac{d\bar{u}}{dr} r L \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

3°. Die Bewegungsgrößen, welche die Endflächen passieren. Insofern diese von der Hauptbewegung abhängen, verliert der betrachtete Raum am einen Ende ebenso viel Bewegungsgröße, als an dem anderen Ende in ihn hineintritt. Auch die Bewegungsgrößen, welche die turbulente Bewegung durch σ_1 und σ_2 hindurchführt, brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden, da die Differenz derselben nicht proportional mit L wächst.

4°. Die Bewegungsgröße, welche durch die zylindrische Fläche Z transportiert wird. Diese beträgt pro Zeiteinheit für ein Element $d\sigma$ in einem Punkte P auf der erzeugenden Linie, für welche $z = 0$ ist und y den positiven Wert r hat,

$$-\varrho u v \, d\sigma = -\varrho (\bar{u} + u') v' d\sigma.$$

Der Mittelwert hiervon ist

$$-Q d\sigma,$$

wenn wir für jenen Punkt

$$Q = \varrho \overline{u' v'}$$

setzen. Da nun, wegen der Symmetrie rings um die Achse, an allen Teilen von Z die neue aus der turbulenten Bewegung entspringende Reibung die gleiche Stärke hat, so erhalten wir für die ganze Fläche

$$-2\pi Q r L \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Bedingung für den stationären Zustand ist nun, daß die Summe von (49), (50) und (51) Null ist, d. h.

$$\pi q r^2 L = -2\pi\mu \frac{d\bar{u}}{dr} r L + 2\pi Q r L, \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

oder

$$q r = -2\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + 2Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Die Größe Q ist hier eine Funktion von r, die wir, solange die turbulente Bewegung nicht genauer untersucht ist, nicht anzugeben vermögen. Nur das wissen wir, daß sie an der Röhrenwand verschwindet, weil daselbst $u' = v' = w' = 0$ ist. Lassen wir also r sich dem Radius R des Rohres nähern, so verwandelt sich (53) in

$$q R = -2\mu \left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Diese Gleichung, für welche man auch schreiben kann

$$\pi q R^2 L = -2\pi R L \mu \left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R},$$

drückt aus, daß, ebenso wie bei kleineren Geschwindigkeiten, die Kraft, welche nötig ist, um die Flüssigkeit durch das Rohr zu treiben, wenn man sie für den vollen Zylinder berechnet, noch immer der an der Wand bestehenden und durch das Geschwindigkeitsgefälle $\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=R}$ bestimmten Reibung gleich ist.

Die Größe M, die in der Gleichung (46) vorkommt, hängt in einfacher Weise mit der Funktion Q zusammen. Aus (41) folgt nämlich

$$M = -\left(u'v'\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + u'w'\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right),$$

und also für den Mittelwert, den man in (46) statt M einführen darf,

$$\bar{M} = -\left(\overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right).$$

Wegen der Symmetrie um die Achse kann dies nur von der Entfernung r von dieser abhängen. Da nun in dem Punkte $(y=r,\ z=0)$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{d\bar{u}}{dr},\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} = 0,\quad \overline{u'v'} = \frac{1}{\varrho}Q$$

ist, so wird allgemein

$$\bar{M} = -\frac{1}{\varrho}Q\frac{d\bar{u}}{dr}. \quad (55)$$

Die Gleichungen (46) und (43) zeigen, daß $\int\bar{M}dS$ notwendig einen positiven Wert haben muß, und es liegt also nahe, anzunehmen, daß an allen Stellen $\bar{M}$ positiv, und also, da $\frac{d\bar{u}}{dr} < 0$, auch Q positiv ist. Letzteres ist auch recht gut begreiflich, da an der Stelle P $(y=r,\ z=0)$ Teilchen, welche infolge der wirbelnden Bewegung sich der Wand nähern, noch die größere Geschwindigkeit in der x-Richtung besitzen werden, welche sie früher in kleinerer Entfernung von der Achse hatten, während umgekehrt auf die Achse zuströmende Flüssigkeit sich in jener Richtung langsamer bewegen wird, als der mittleren Stromgeschwindigkeit $\bar{u}$ im Punkte P entspricht. Es haben also in diesem Punkte u' und v' wenigstens in der Mehrzahl der Fälle gleiche Vorzeichen, so daß $\overline{u'v'}$ und Q positiv werden. Demzufolge haben dann auch die beiden Glieder auf der rechten Seite von (53), die von den beiden Arten der Reibung abhängen, gleiche Vorzeichen.

§ 16. Integriert man die Gleichung (53) zwischen $r=R$ und irgend einem kleineren Wert r', so erhält man, da $\bar{u}$ für $r=R$ Null ist,

$$\bar{u}_{r=r'} = \frac{q}{4\mu}(R^2 - r'^2) - \frac{1}{\mu}\int_{r'}^{R} Q\,dr, \quad (56)$$

und hieraus folgt für das pro Zeiteinheit durch einen Querschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen

$$V = 2\pi \int_0^R \bar{u} r' dr' = \frac{\pi q R^4}{8\mu} - \frac{2\pi}{\mu} \int_0^R r' dr' \int_{r'}^R Q dr,$$

oder, wenn man die Reihenfolge der beiden Integrationen umkehrt,

$$V = \frac{\pi q R^4}{8\mu} - \frac{\pi}{\mu} \int_0^R r^2 Q dr.$$

Man sieht aus dieser Gleichung, wie infolge der turbulenten Bewegung das bei einem bestimmten Druckgefälle q durchströmende Volum kleiner wird, als es nach dem Poiseuille'schen Gesetze, welchem das erste Glied rechts entspricht, sein würde. Umgekehrt wird die für eine bestimmte Ausflußmenge erforderliche Druckdifferenz vergrößert. Damit hängt, wegen der Beziehung (54) zusammen, daß das Geschwindigkeitsgefälle an der Wand größer ist als $\frac{4V}{\pi R^3}$, welchen Wert es haben würde, wenn die Strömung ohne turbulente Bewegung vor sich gehen könnte. Mit diesem größeren Geschwindigkeitsgefälle an der Wand ist, da wir einen bestimmten Wert von V voraussetzen, ein Kleinerwerden des Gefälles in der Nähe der Achse verbunden; dieses geht z. B. daraus hervor, daß

$$V = 2\pi \int_0^R \bar{u} r dr = \left| \pi \bar{u} r^2 \right|_{r=0}^{r=R} - \pi \int_0^R \frac{d\bar{u}}{dr} r^2 dr = -\pi \int_0^R \frac{d\bar{u}}{dr} r^2 dr, \quad (57)$$

und daß also das letzte Integral einen festgesetzten Wert haben muß.

Diese Änderung in der Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit über einen Querschnitt war übrigens von vornherein zu erwarten. Die turbulente Bewegung ist ja, indem sie die verschiedenen Flüssigkeitsschichten durcheinander mischt, fortwährend bestrebt, die Differenzen zwischen den Strömungsgeschwindigkeiten an verschiedenen Stellen auszugleichen, eine Wirkung, der sich indes die äußerste an der Wand haftende Schicht entzieht. Wenn man sich vorstellt, daß die Wirbelbewegung um so heftiger wird, je größer die Stromgeschwindigkeit ist, so kann man sogar schließen, daß jenes Durcheinandermischen bei Steigerung von q sich bis auf immer kleinere Entfernung von der Wand erstreckt, und daß also die Dicke δ der Schicht, in welcher man den größten Teil der Geschwindigkeitsabnahme findet, immer kleiner wird.

Nun ist, wenn man die mittlere Geschwindigkeit für den ganzen Querschnitt U nennt, das Geschwindigkeitsgefälle in der Nähe der Wand von der Ordnung $\frac{U}{\delta}$ und also nach (54) das Druckgefälle q von der Ordnung

$$\frac{\mu U}{R \delta}.$$

Wird in diesem Ausdruck, bei Vergrößerung von U, δ kleiner, dann wird die erforderliche Druckdifferenz rascher als U wachsen, wie man es bei den Beobachtungen auch wirklich gefunden hat. Übrigens braucht bei rascher Bewegung q keineswegs dem Reibungskoeffizienten proportional zu bleiben; die Reibung, welche die turbulente Bewegung zu vernichten bestrebt ist, setzt sich der Mischung der Flüssigkeitsschichten entgegen, so daß bei wachsendem μ die Dicke δ größer werden kann.

Daß wirklich, wie die Theorie verlangt, bei rascher Strömung in dem größten Teil des Querschnitts die Geschwindigkeit $\bar{u}$ weniger von Punkt zu Punkt variiert, als dem ersten Gliede in (56) entsprechen würde, hat man seit langer Zeit aus den Beobachtungen geschlossen. Ist es endlich bei hohen Werten von U und q so weit gekommen, daß die Dicke δ nur noch sehr klein ist, so macht man kaum einen Fehler, wenn man sagt, daß die Flüssigkeit mit endlicher Geschwindigkeit längs der Wand gleite.

Indes darf man nicht meinen, es bestehe am Ende in dem größten Teil des Querschnitts, bis hart an die Wand, eine geradlinige Bewegung mit überall gleicher Geschwindigkeit. Das wäre im Widerspruch mit der Gleichung (53). Die linke Seite derselben ist stets von Null verschieden, und da, wie wir bereits fanden, $\frac{d\bar{u}}{dr}$ im Innern der Flüssigkeit ziemlich klein wird, so kann Q nicht verschwinden. Die turbulente Bewegung bleibt also nicht etwa auf eine dünne der Wand anliegende Schicht beschränkt; sie existiert notwendig in allen Punkten des Querschnitts.

§ 17. Zum Schluß möge noch die Energiegleichung angeführt werden. Man erhält diese, wenn man zunächst aus der für einen Zylinder vom Radius r geltenden Formel (52) durch Differentiation nach r die Bewegungsgleichung für einen unendlich dünnen Hohlzylinder ableitet, und dann, nachdem man mit $\bar{u}$ multipliziert hat, von $r = 0$ bis $r = R$ integriert. Bezeichnet man die rechte Seite der Gleichung (52) für einen Augenblick mit F, so lautet das Resultat, mit Rücksicht darauf, daß an der Achse $F = 0$ wird,

$$qLV = \int_0^R \bar{u}\frac{dF}{dr}dr = -\int_0^R F\frac{d\bar{u}}{dr}dr = 2\pi\mu L\int_0^R \left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)^2 r\,dr - 2\pi L\int_0^R Q\frac{d\bar{u}}{dr}r\,dr,$$

oder, wenn man (55) und (46) benutzt und beachtet, daß

$$2\pi\varrho L\int_0^R \overline{M} r\,dr = \varrho\int M\,dS$$

ist,

$$qLV = 2\pi\mu L\int_0^R \left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)^2 r\,dr + \mu\int N\,dS.$$

Man sieht hieraus, daß die für das Hindurchtreiben eines bestimmten Volumens V erforderliche Arbeit sich aus zwei Teilen zusammensetzt, deren erster auf die Überwindung des von $\frac{d\bar{u}}{dr}$ abhängigen Widerstandes verwendet wird, während der zweite Teil wegen der Reibung in den Wirbeln geleistet werden muß. Es braucht kaum noch bemerkt zu werden, daß die Arbeit größer ist als der Betrag A_0, der nötig sein würde, wenn man das gleiche Volum in derselben Zeit in regelmäßigem, dem Poiseuille'schen Gesetz entsprechendem Strome hindurchtreiben könnte. Sogar der erste der soeben genannten Arbeitsbeträge

$$A = 2\pi\mu L \int_0^R \left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)^2 r\,dr$$

ist schon größer als A_0.

Um dieses zu beweisen, ziehen wir in Betracht, daß bei der soeben genannten ohne turbulente Bewegung stattfindenden Strömung die Geschwindigkeit den Wert

$$u_0 = C(R^2 - r^2)$$

haben würde, wo C eine Konstante ist; dies folgt sofort aus (56), wenn man das letzte Glied fortläßt.

Setzen wir nun weiter

$$\bar{u} = u_0 + u_1,$$

so wird

$$A = A_0 + 4\pi\mu L \int_0^R \frac{du_0}{dr}\frac{du_1}{dr} r\,dr + 2\pi\mu L \int_0^R \left(\frac{du_1}{dr}\right)^2 r\,dr.$$

Für das im zweiten Gliede vorkommende Integral erhält man Null, wenn man den Wert von u_0 einführt, partiell integriert, und im Auge behält, daß bei den Bewegungen, auf welche A_0 und A sich beziehen, das pro Sekunde durchfließende Flüssigkeitsvolum dieselbe Größe haben soll. In der Tat ist also

$$A > A_0.$$

IV.

Les équations du mouvement des gaz et la propagation du so[illegible] suivant la théorie cinétique des gaz.[1])

(Archives néerlandaises, 16 [1881], p. 1).

§ 1. Peu de temps après la publication des premiers mémoir[illegible] de Clausius sur la théorie moléculaire des gaz, Jochmann[2]) ém[illegible] l'opinion que, dans cette théorie, il serait bien difficile de rendre compt[illegible] de la propagation des ondes sonores. Il fit remarquer que, dans l[illegible] théorie ordinaire du mouvement des gaz, on considère les pressions q[illegible] existent à la surface d'un élément de volume et dont la résultante détermine l'accélération de la matière contenue dans cet élément. O[illegible] selon les idées de Clausius, il n'y aurait aucun lien entre les parti[illegible] cules qui, à un certain instant, se trouvent réunies dans un petit es[illegible] pace; ces molécules n'auraient ni vitesse ni accélération communes, e[illegible] il ne saurait être question d'une pression que, dans leur ensemble, ell[illegible] subiraient de la part du gaz environnant.

Dans cette critique Jochmann avait perdu de vue que les élé[illegible] ments de volume avec lesquels on opère dans les théories physiques ne sont pas nécessairement infiniment petits dans le sens rigoureux de ces mots. Il suffit que leurs dimensions soient trop petites pou[illegible] être accessibles à l'observation. Tant que la longueur moyenne d[illegible] chemin d'une molécule entre deux chocs successifs est de l'ordre d[illegible] grandeur qu'on a déduit des propriétés des gaz sous pression atmosph[illegible] rique, on pourra imaginer des éléments de volume d'une telle grande[illegible] que l'échange de molécules avec le gaz environnant soit limité à u[illegible] mince couche superficielle. De tels éléments peuvent être considér[illegible] comme conservant leur individualité pendant un temps assez long [illegible] comme subissant à leur surface les pressions qui figurent dans l[illegible] équations bien connues de l'aérodynam[illegible]

---

1) En rep[illegible] mémoire, j[illegible] de détails, ce q[illegible] m'a obligé à c[illegible] vision [illegible] des formules [illegible]

2) E. Jo[illegible] Gase, Ann. Phy[illegible] Chem., 108 [illegible]

Cependant la question exige un examen plus approfondi; pour la traiter d'une manière satisfaisante on doit évidemment établir les équations du mouvement en se basant sur les notions fondamentales de la théorie cinétique. C'est ce qui a déjà été fait par Maxwell dans son second mémoire sur la théorie des gaz.[1]) Malheureusement, des deux formes sous lesquelles il présente les équations, la première[2]) est tellement générale qu'elle ne se prête pas directement aux applications, tandis que la seconde[3]) a été obtenue dans l'hypothèse d'une répulsion mutuelle des molécules inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance.

Il m'a donc semblé utile d'établir les équations du mouvement pour un gaz quelconque, c'est-à-dire pour un gaz polyatomique, sans avoir recours à des hypothèses particulières sur l'action réciproque des molécules. En développant ainsi des formules qu'on peut appliquer à la propagation du son[4]), nous aurons en même temps l'occasion de faire quelques remarques au sujet du frottement intérieur et de la conductibilité calorifique.

Etablissement de l'équation fondamentale.

§ 2. Dans l'étude des mouvements moléculaires nous suivrons la marche indiquée par M. Boltzmann[5]); nous aurons donc constamment en vue la manière dont les différents états de mouvement sont distribués entre les molécules.

Pour déterminer l'état d'une molécule — que nous supposons pour le moment libre de toute influence de la part des autres — on doit connaître, pour chaque instant t, d'abord les composantes ξ, η, ζ de la vitesse de son centre de gravité suivant trois axes perpendiculaires

1) J. Clerk Maxwell, On the dynamical theory of gases, Phil. Mag. (4), **35** (1868), p. 129, 185.

2) Voir l'équation (76) du mémoire cité.

3) La formule (128) de Maxwell.

4) Parmi les mémoires dans lesquels on s'est occupé du même problème, je citerai: J. Stefan, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in gasförmigen Körpern, Ann. Phys. Chem., **118** (1863), p. 494; A. Roiti, Sulla propagazione del suono nella odierna teoria degli aeriformi, Nuovo cimento (3), **2** (1877), p. 42; S. Tolver Preston, On the mode of the propagation of sound, and the physical condition determining its velocity on the basis of the kinetic theory of gases, Phil. Mag. (5), **3** (1877), p. 441; J. L. Hoorweg, Sur la propagation du son d'après la nouvelle théorie des gaz, Arch. néerl., **11** (1876), p. 131; H. J. Rink, Sur la propagation du son, Arch. néerl., **12** (1877), p. 262.

5) L. Boltzmann, Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen, Wien. Sitzungsber., 2. Abt., **63** (1871), p. 397; Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen, Wien. Sitzungsber., 2. Abt., **66** (1872), p. 275; Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig, 1895, 1898.

entre eux, et en second lieu les coordonnées relatives, prises par rapport à ce même centre de gravité, de chacun des points matériels dont la molécule est composée. Or, si l'on connaissait la constitution de la molécule et les forces que ses éléments constituants exercent les uns sur les autres, on pourrait établir les équations différentielles du mouvement relatif de ces éléments; ces équations sont tout à fait indépendantes des forces extérieures agissant sur le gaz, lorsque celles-ci donnent, comme nous l'admettrons, une même accélération à tous les éléments de la molécule.

S'il était possible d'intégrer ensuite les équations du mouvement, toutes les coordonnées relatives seraient connues en fonction de t et d'un certain nombre de constantes, qu'on pourrait déterminer si l'on connaissait, pour un seul instant, la position relative et les vitesses des éléments constituants. Nous nommerons ces constantes les paramètres du mouvement intramoléculaire.

Pour l'un de ces paramètres on pourra toujours prendre la somme E de l'énergie potentielle des éléments constituants et de l'énergie actuelle de leur mouvement relatif par rapport au centre de gravité commun; quant aux autres paramètres, nous les désignerons par p_1, $p_2, \ldots p_k$. En somme, ce sont les grandeurs ξ, η, ζ, $E, p_1, \ldots p_k$, qui nous serviront à indiquer l'état de mouvement d'une molécule.

§ 3. Tant qu'une molécule se meut en dehors de l'influence des autres, les quantités ξ, η, ζ varient seules par l'effet des forces extérieures, tandis que $E, p_1, \ldots p_k$ restent constantes. Mais il n'en est plus ainsi quand une molécule A se rapproche suffisamment d'une autre pour qu'une action réciproque s'exerce entre elles. Nous admettrons qu'au bout d'un temps très court les deux molécules ont échappé à cette influence mutuelle, sans avoir eu à subir une séparation ou un échange de leurs éléments constituants. Après cette rencontre ou ce choc, l'état de mouvement de la molécule A peut de nouveau être représenté de la même manière qu'avant la rencontre; seulement, $E, p_1 \ldots p_k$ auront pris de nouvelles valeurs, aussi bien que ξ, η, ζ.

Or, le résultat de ces rencontres doit être que les molécules qui se trouvent dans un espace déterminé auront des états de mouvement très différents, répartis entre elles suivant une certaine loi. Si l'état du gaz est variable d'un point à un autre et d'un instant à un autre, la forme de cette loi dépendra aussi du lieu et du temps. En langage mathématique cela s'exprime de la manière suivante. Soit dl un élément de volume situé au point (x, y, z), et admettons que cet élément contienne encore un grand nombre de molécules. Parmi toutes celles qui s'y trouvent au moment t, prenons un groupe déterminé, à savoir

celles pour lesquelles les composantes de la vitesse du centre de gravité et les paramètres du mouvement interne sont compris entre

$$\xi \text{ et } \xi + d\xi, \quad \eta \text{ et } \eta + d\eta, \quad \zeta \text{ et } \zeta + d\zeta, \; E \text{ et } E + dE,$$
$$p_1 \text{ et } p_1 + dp_1, \; \ldots p_k \text{ et } p_k + dp_k.$$

Le nombre de ces molécules peut être représenté par

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k, x, y, z, t)\, d\lambda\, dl, \quad \ldots \quad (1)$$

si l'on pose

$$d\lambda = d\xi d\eta d\zeta dE dp_1 \ldots dp_k.$$

La fonction F peut être convenablement appelée la *fonction fondamentale* du problème. Lorsqu'elle est donnée, on connaît complètement l'état du gaz et on peut calculer toutes les quantités qui s'y rapportent. Veut-on trouver, par exemple, le nombre total des molécules contenues dans l'élément dl, on devra intégrer l'expression (1) par rapport à $\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k$, pour toutes les valeurs que ces variables peuvent présenter. En indiquant cette opération par un seul signe d'intégration, on aura donc pour le nombre cherché: Ndl, si

$$N = \int F d\lambda.$$

Par une semblable intégration on peut trouver aussi, pour toutes les molécules comprises dans dl, la valeur moyenne d'une quantité quelconque φ dépendant de l'état de mouvement, c'est-à-dire, de $\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k$. Cette valeur est

$$\frac{1}{N}\int F\varphi d\lambda.$$

En effet,

$$dl \int F\varphi d\lambda$$

est évidemment la somme des valeurs de φ pour les Ndl molécules qui se trouvent dans l'élément de volume dl.

Si l'on calcule de cette manière les valeurs moyennes u, v, w de ξ, η, ζ, on obtient les composantes de ce qu'on peut appeler la *vitesse d'ensemble* de l'élément dl.

Remarquons encore que, si l'on représente par $\Sigma\varphi$ la somme des valeurs de φ, rapportée à l'unité de volume, on aura

$$\Sigma\varphi = \int F\varphi d\lambda.$$

§ 4. Pour trouver maintenant un moyen de déterminer la fonction F, considérons à un moment donné le groupe de molécules dont le nombre est représenté par l'expression (1), et suivons-les dans leur mouvement pendant un temps infiniment petit dt. Ne tenons d'abord aucun compte des chocs. La vitesse (ξ, η, ζ) pouvant être regardée comme la même pour toutes les molécules dont il s'agit, nous pouvons

dire que l'élément dl tout entier se déplace avec cette vitesse, en conservant sa forme et sa grandeur, et en emportant avec lui le groupe de molécules. A la fin du temps dt, ces molécules se trouveront donc dans l'élément dl au point $(x + \xi dt,\ y + \eta dt,\ z + \zeta dt)$. Les paramètres du mouvement intramoléculaire n'ont pas changé et sont donc toujours compris entre les limites que nous leur avons assignées.

Mais, en vertu des forces extérieures, les composantes de la vitesse des centres de gravité des molécules ont subi certains accroissements, que nous pouvons supposer égaux pour toutes les molécules considérées. En nous bornant au cas où les forces dépendent d'une fonction potentielle, nous pouvons représenter ces accroissements par $\frac{\partial \psi}{\partial x} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} dt$, de sorte qu'à la fin du temps dt les vitesses se trouveront entre les limites

$$\xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt \quad \text{et} \quad \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt + d\xi,$$

$$\eta + \frac{\partial \psi}{\partial y} dt \quad \text{»} \quad \eta + \frac{\partial \psi}{\partial y} dt + d\eta,$$

$$\zeta + \frac{\partial \psi}{\partial z} dt \quad \text{»} \quad \zeta + \frac{\partial \psi}{\partial z} dt + d\zeta.$$

Voyons maintenant quel sera l'effet des chocs. Pendant l'intervalle de temps dt, quelques molécules du groupe considéré en rencontreront d'autres, et prendront ainsi un nouvel état de mouvement; elles sortiront donc du groupe. En revanche, d'autres molécules, qui primitivement n'appartenaient pas au groupe, auront acquis, à la suite de chocs, des mouvements tels qu'elles en feront partie. Or, comme le nombre A des molécules qui abandonnent le groupe ne sera pas, en général, égal au nombre B de celles qui y entrent, à la fin du temps dt le nombre des molécules présentant l'état de mouvement considéré, dans l'élément dl, dépassera de $B - A$ le nombre indiqué par l'expression (1).

Si la fonction F et l'action réciproque des molécules étaient connues, on pourrait calculer la quantité A. A la rigueur, il y aurait lieu de tenir compte, dans ce calcul, de ce que, dans l'intervalle de temps dt, l'élément dl, qui contient les molécules, change continuellement d'entourage, et aussi de ce que les vitesses des molécules du groupe subissent des modifications. Attendu toutefois que la quantité A, de même que dt, est infiniment petite, et que le changement d'entourage de dl et l'accroissement des vitesses sont l'un et l'autre des infiniment petits du même ordre, il est évident qu'on pourra négliger, comme infiniment petite du second ordre, l'influence de ces deux circonstances sur A. En d'autres termes, pour calculer A, on peut se figurer une masse gazeuse P qui n'est soumise à aucune force extérieure, et dont

l'état est partout le même que celui du gaz considéré, au point (x, y, z) et au temps t; A est alors, dans un élément fixe dl de cette masse gazeuse fictive, le nombre des chocs dans lesquels une des molécules avait, avant la rencontre, un état de mouvement compris entre les limites indiquées par ξ et $\xi + d\xi$, etc. A est évidemment proportionnel à dl, à $d\lambda$ et à dt; si l'on pose $A = a\,dl\,d\lambda\,dt$, $a\,d\lambda\,dt$ sera le nombre des rencontres, de l'espèce considérée, qui auraient lieu dans l'unité de volume du gaz P. Si l'on représente de même par $b\,d\lambda\,dt$ le nombre des chocs dans lesquels une des molécules présente, après la rencontre, l'état de mouvement dont il s'agit, on a $B = b\,dl\,d\lambda\,dt$.

De ce qui précède, il suit que

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, x, y, z, t)\, d\lambda\, dl + (b-a)\, d\lambda\, dl\, dt \quad . \quad . \quad (2)$$

sera le nombre des molécules qui, à l'instant $t + dt$, se trouvent dans l'élément dl au point $(x + \xi dt,\ y + \eta dt,\ z + \zeta dt)$, et pour lesquelles les grandeurs qui déterminent l'état de mouvement sont comprises entre

$$\xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt \text{ et } \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt + d\xi, \text{ etc.}$$

$$E \text{ et } E + dE, \text{ etc.}$$

D'un autre côté, on doit obtenir le nombre de ces molécules en faisant subir à $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$, dans l'expression (1), les accroissements $\frac{\partial \psi}{\partial x} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} dt$, ξdt, ηdt, ζdt, dt. L'expression ainsi modifiée étant égalée à (2), on trouve

$$b - a = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad \text{(I)}$$

Comme les termes a et b pourraient être calculés en fonction de $\xi, \ldots p_k, x, y, z, t$, si la fonction fondamentale F était connue, cette formule peut en effet servir à déterminer cette fonction. C'est l'équation fondamentale pour tous les problèmes qui se rapportent au mouvement des molécules gazeuses.[1])

Les équations du mouvement sous leur forme générale.

§ 5. De l'équation fondamentale (I) on peut, sans faire d'hypothèses particulières sur l'action réciproque des molécules, déduire plusieurs conséquences. Si l'on songe à la signification de $a\,d\lambda\,dt$, on voit immédiatement, qu'en intégrant cette quantité par rapport à $\xi, \ldots p_k$ on doit obtenir le nombre total des molécules qui, dans l'unité de volume de la masse gazeuse P (§ 4), subissent un choc pendant le

1) L'équation (I) équivaut à la formule (44) dans le second mémoire cité de M. Boltzmann.

temps dt. Mais le même nombre s'obtient aussi par l'intégration de $b\,d\lambda\,dt$; on a donc

$$\int (b-a)\,d\lambda = 0.$$

En outre, le principe du mouvement du centre de gravité nous apprend que si, pour tous les chocs qui ont lieu dans l'unité d'espace du gaz P, durant le temps dt, on prend d'abord la somme des quantités de mouvement des molécules dans la direction de l'axe des x *avant* les chocs, puis cette même somme *après* les rencontres, on doit trouver le même résultat. En nommant m la masse d'une molécule, la première somme est $m\,dt\int a\xi\,d\lambda$, la seconde $m\,dt\int b\xi\,d\lambda$, de sorte qu'on doit avoir

$$\int (b-a)\,\xi\,d\lambda = 0,$$

et de même

$$\int (b-a)\,\eta\,d\lambda = \int (b-a)\,\zeta\,d\lambda = 0.$$

Enfin, une conséquence analogue se déduit du principe de la conservation de l'énergie. Si l'on pose $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=r^2$, l'énergie d'une molécule est $\frac{1}{2}mr^2+E$, et on a l'équation

$$\int (b-a)\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda = 0.$$

Ainsi, en multipliant le second membre de l'équation (I) par une des grandeurs $d\lambda$, $\xi d\lambda$, $\eta d\lambda$, $\zeta d\lambda$, $(\frac{1}{2}mr^2+E)\,d\lambda$, et en intégrant ensuite par rapport à $\xi, \eta, \zeta \ldots p_k$, on doit obtenir 0.

§ 6. Pour donner aux cinq équations auxquelles on est conduit ainsi, une forme plus concise, nous introduirons, outre les vitesses d'ensemble u, v, w, les quantités suivantes

$$\left.\begin{aligned}
&\int F\xi^2 d\lambda = P_x, \int F\eta^2 d\lambda = P_y, \int F\zeta^2 d\lambda = P_z;\\
&\int F\xi\eta\,d\lambda = Q_{xy}, \int F\eta\zeta\,d\lambda = Q_{yz}, \int F\zeta\xi\,d\lambda = Q_{zx}{}^{1)};\\
&\qquad\int F\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda = R;\\
&\int F\xi\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda = S_x, \int F\eta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda = S_y,\\
&\qquad\int F\zeta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda = S_z.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

En général, ces intégrales sont des fonctions de x, y, z, t et, en les différentiant par rapport à ces variables, on trouvera les valeurs

---

1) Au lieu de Q_{xy}, Q_{yz}, Q_{zx}, nous écrirons aussi Q_{yx}, Q_{zy}, Q_{xz}.

des intégrales analogues qui contiennent une des expressions $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$. On a, par exemple,

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} \xi^2 d\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int F\xi^2 d\lambda\right] = \frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

Au contraire, la valeur des intégrales qui contiennent $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ ou $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ peut être trouvée au moyen d'une intégration par parties. Dans ces transformations nous tiendrons compte de ce que la fonction F disparaît pour des valeurs infiniment grandes de ξ, η, ζ; en effet, les molécules à très grande vitesse seront extrêmement rares. On aura donc, par exemple,

$$\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2} mr^2 + E\right) d\lambda = -\int F \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2} mr^2 + E\right) d\lambda = -mNu.$$

Les cinq équations prennent, en définitive, la forme suivante:

$$\frac{\partial (Nu)}{\partial x} + \frac{\partial (Nv)}{\partial y} + \frac{\partial (Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (a_1)$$

$$\left.\begin{aligned} -N\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial (Nu)}{\partial t} = 0, \\ -N\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial Q_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial (Nv)}{\partial t} = 0, \\ -N\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial (Nw)}{\partial t} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (b_1)$$

$$-mN\left(u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0. \quad . \quad (c_1)$$

§ 7. Pour arriver à ces formules, on aurait pu suivre une autre marche qui fait mieux ressortir la signification des différents termes. On peut d'abord considérer le nombre des molécules appartenant au groupe dont il a été question au § 3, qui, pendant un intervalle de temps dt, traversent un élément de surface $d\sigma$, ce nombre étant pris avec le signe positif, si le mouvement a lieu vers le côté indiqué par la normale à $d\sigma$ et avec le signe négatif dans le cas contraire. Pour un élément $d\sigma$ perpendiculaire à l'axe des x, ce nombre sera évidemment

$$F\xi \, d\lambda \, d\sigma \, dt$$

et si, pour chaque molécule, ω est une quantité quelconque (positive ou négative) dont la valeur est déterminée par l'état de mouvement, on aura

$$F\xi\omega \, d\lambda \, d\sigma \, dt$$

pour la somme des valeurs de ω appartenant aux molécules dont il s'agit.

Considérons maintenant toutes les molécules qui passent d'un côté de $d\sigma$ à l'autre, et formons deux sommes $\Sigma_1 \omega$ et $\Sigma_2 \omega$, dont la

première se rapporte aux molécules qui se déplacent vers le côté positif et la seconde à celles qui vont en sens inverse. Nous aurons alors

$$\Sigma_1 \omega - \Sigma_2 \omega = d\sigma\, dt \int F \xi \omega \, d\lambda,$$

théorème qu'on peut énoncer comme suit:

La „somme des ω" qui traversent l'élément $d\sigma$ dans la direction positive (c'est-à-dire la différence des sommes des ω qui sont transportés en sens contraires) est donnée, pour l'unité de surface et l'unité de temps, par l'intégrale

$$\int F \xi \omega \, d\lambda.$$

Les intégrales $\int F \eta \omega \, d\lambda$ et $\int F \zeta \omega \, d\lambda$ ont une signification analogue. Or, si l'on prend pour ω successivement les quantités de mouvement $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ et l'énergie $\frac{1}{2} m r^2 + E$, on est conduit aux intégrales (3). On voit ainsi que mP_x, mQ_{xy}, mQ_{xz} et S_x ne sont autre chose que les quantités de mouvement, estimées suivant les directions des axes, et la quantité d'énergie qui traversent un élément de surface perpendiculaire à l'axe des x, ces quantités étant toujours rapportées à l'unité de temps et à l'unité de surface. Ajoutons qu'on obtient les produits Nu, Nv, Nw si, pour des plans perpendiculaires aux axes, on considère simplement la différence des nombres des molécules qui traversent ces plans dans une direction et dans l'autre.

§ 8. On peut maintenant établir les formules $(a_1) - (c_1)$ en choisissant un élément de volume fixe $dx\, dy\, dz$, et en portant son attention, soit sur le nombre des molécules qui s'y trouvent, soit sur la quantité de mouvement ou l'énergie qu'il contient. Toutes ces grandeurs varient continuellement à cause du passage des molécules à travers les faces du parallélipipède; de plus, la quantité de mouvement et l'énergie se modifient sous l'action des forces extérieures. Au contraire, les actions mutuelles qui s'exercent entre les molécules du parallélipipède n'ont aucune influence, ni sur la quantité de mouvement, ni sur l'énergie totales.

Or, les équations $(a_1) - (c_1)$ indiquent précisément le changement du nombre des molécules, de la quantité de mouvement et de l'énergie contenus dans l'élément $dx\, dy\, dz$. Il serait superflu de montrer cela pour chacune des formules; je me bornerai donc à la dernière. Comme le travail de la force qui agit sur une seule molécule est donné par

$$m\left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dt,$$

on trouve

$$m\, dx\, dy\, dz\, dt \int \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) F\, d\lambda$$

$$= mN\left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt$$

pour le travail total des forces agissant sur les molécules qui se trouvent dans le parallélipipède, au commencement de l'intervalle dt. D'un autre côté, $\frac{\partial S_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\, dt$ représente la perte d'énergie qui est due au passage de molécules à travers les deux faces parallèles au plan yz, et

$$\frac{\partial S_y}{\partial y}\, dx\, dy\, dz\, dt, \quad \frac{\partial S_z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

ont une signification analogue. Enfin, $\frac{\partial R}{\partial t}\, dx\, dy\, dz\, dt$ indique l'accroissement de la quantité d'énergie qui se trouve à l'intérieur du parallélipipède.

Quelques transformations fort simples suffisent pour montrer que la formule (a_1) n'est autre chose que l'équation de continuité bien connue, et que les relations (b_1) correspondent aux équations qui, dans la théorie générale des mouvements intérieurs d'un corps, expriment l'accélération d'un élément en fonction des forces extérieures et des pressions ou tensions normales ou tangentielles. En y regardant de plus près on reconnaît que les composantes de la pression sur un plan perpendiculaire à l'axe des x, qui entrent dans cette théorie, correspondent aux grandeurs $m(P_x - Nu^2)$, $m(Q_{xy} - Nuv)$, $m(Q_{xz} - Nuw)$ de nos formules.

§ 9. Du reste, il importe de remarquer que, si l'on donne au signe Σ la signification qui a été définie à la fin du § 3, les équations (3) peuvent être remplacées par

$$\left.\begin{array}{lll} P_x = \Sigma\xi^2, & P_y = \Sigma\eta^2, & P_z = \Sigma\zeta^2; \\ Q_{xy} = \Sigma\xi\eta, & Q_{yz} = \Sigma\eta\zeta, & Q_{zx} = \Sigma\zeta\xi; \\ & \text{etc.} & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Ces formules sont d'une application facile lorsqu'il s'agit de passer d'un système d'axes de coordonnées à un autre. En effet, des formules de transformation bien connues permettent d'exprimer les valeurs de ξ, η, ζ par rapport au premier système dans celles des composantes de la vitesse ξ', η', ζ' par rapport à l'autre; on en déduira immédiatement les sommes (4) exprimées dans les grandeurs analogues

$$\Sigma\xi'^2, \ \Sigma\eta'^2, \ \Sigma\zeta'^2, \ \Sigma\xi'\eta', \ \text{etc.}$$

§ 10. Insistons encore sur une autre conséquence qu'on peut tirer des formules (4). Pour arriver à certaines simplifications de nos formules, nous emploierons souvent un artifice qui consiste à considérer *l'image* de la masse gazeuse par rapport à un plan fixe („plan de symétrie"), c'est-à-dire un gaz fictif dont chaque molécule et même chaque particule constituante des molécules est à chaque instant l'image

de la molécule ou de la particule correspondante dans le gaz réel, les masses étant égales dans les deux systèmes. Or, si l'image est prise par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe des x et *qu'on emploie dans le second système des axes ayant les mêmes directions que ceux qu'on a choisis dans le premier système,* on voit immédiatement que pour des molécules et des points correspondants on aura, en distinguant par les indices 1 et 2 les grandeurs appartenant aux deux systèmes,

$$\xi_2 = -\xi_1, \quad \eta_2 = \eta_1, \quad \zeta_2 = \zeta_1,$$
$$P_{x2} = P_{x1}, \quad P_{y2} = P_{y1}, \quad P_{z2} = P_{z1}, \quad Q_{yz2} = Q_{yz1},$$
$$Q_{xy2} = -Q_{xy1}, \quad Q_{xz2} = -Q_{xz1} \quad \text{etc.}$$

Les grandeurs P, Q, R, S se divisent donc en deux groupes; les unes $(P_x, P_y, P_z, Q_{yz}, R, S_y, S_z)$ peuvent être appelées *paires* et les autres (Q_{xy}, Q_{xz}, S_x) *impaires* par rapport à x. D'une manière semblable on peut distinguer des quantités paires et impaires par rapport à y ou à z.

Première approximation, dans laquelle on néglige le frottement intérieur et la conductibilité calorifique.

§ 11. Si l'on veut appliquer les équations (a_1), (b_1) et (c_1) aux problèmes de l'aérodynamique, il faut d'abord chercher la valeur des grandeurs P_x, etc. A cet effet, il est nécessaire de considérer de plus près la fonction fondamentale F.

Le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui d'une masse gazeuse homogène, qui n'est soumise à aucune force extérieure et qui n'est animée d'aucun mouvement visible. Pour l'état stationnaire d'une telle masse la fonction F sera indépendante de x, y, z. Elle ne renfermera pas non plus t, si nous faisons une hypothèse déterminée. Nous admettrons, en effet, que si à partir d'un moment quelconque les chocs cessaient, chaque molécule étant dorénavant abandonnée à elle-même, l'état resterait stationnaire[1]; en d'autres termes, que la distribution des états de mouvement que le gaz présente en réalité, pourrait également exister s'il n'y avait pas de chocs. Or, dans ce dernier cas, la fonction F ne varierait pas avec le temps; il doit donc en être de même lorsque des chocs se produisent.

1) Ceci exige une explication. Chaque molécule se trouvant continuellement amenée, par son mouvement interne, dans un autre état, ou, si l'on veut, dans une autre *phase* de mouvement, il pourrait très bien se faire que l'état du gaz fût modifié par les mouvements internes. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut qu'à chaque instant il y ait un grand nombre de molécules possédant des mouvements internes tout à fait semblables, mais arrivés aux phases les plus diverses, avec cette condition que, lorsque quelques-unes de ces molécules passent de la phase A dans une autre, un même nombre de molécules entrent dans la phase A.

Cette fonction F, indépendante de x, y, z, t, a été déterminée par Maxwell et Boltzmann. Nous ne ferons toutefois pas usage du résultat trouvé par ces savants. Rappelons seulement que Boltzmann a montré que la fonction est entièrement déterminée lorsqu'on connaît la densité et la température ou bien, ce qui revient au même, le nombre N de molécules dans l'unité de volume et la moyenne h des carrés des vitesses. Ces deux grandeurs doivent donc entrer dans la fonction comme paramètres, la première évidemment comme facteur; de sorte que nous pouvons poser

$$F = NF_0(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \dots p_k, h),$$

où l'on a

$$\int F_0 d\lambda = 1, \int F_0 \xi d\lambda = \int F_0 \eta d\lambda = \int F_0 \zeta d\lambda = 0, \int F_0 r^2 d\lambda = h. \quad (5)$$

§ 12. Dans la masse gazeuse à laquelle se rapportent ses formules, les molécules se meuvent de la même manière dans toutes les directions et, pour une direction déterminée de ce mouvement de translation, l'agitation intramoléculaire a lieu de la même manière tout autour de cette direction. Il va sans dire que ces circonstances sont exprimées dans la forme de la fonction F_0, mais il ne faut pas en conclure qu'elle ne dépendra que de $r, E, p_1 \dots p_k$. En effet, s'il en était ainsi, il y aurait, pour deux directions de mouvement différentes, un nombre égal de molécules animées d'un même mouvement interne par *rapport aux axes des coordonnées* (puisque les coordonnées relatives d'une molécule par rapport à son centre de gravité, déterminées par $E, p_1, \dots p_k$, ont été prises par rapport aux axes des coordonnées fixés une fois pour toutes). Or, il n'est nullement nécessaire qu'il en soit ainsi; tout ce que nous pouvons affirmer, c'est que, pour deux directions de translation différentes, il y a un nombre égal de molécules animées d'un même mouvement interne, *déterminé chaque fois par rapport à la direction de translation de la molécule.*

Si, pour déterminer le mouvement interne d'une molécule, nous avions pris un système de coordonnées ayant toujours la même position par rapport à la direction de la translation, F_0 n'aurait dépendu que de $E, p_1, \dots p_k$, et de r. Mais alors nous aurions eu l'inconvénient que, à chaque changement survenu dans la direction de la translation par l'action des forces extérieures, le système de coordonnées de la molécule aurait aussi pris une autre position. De plus, il nous aurait été difficile d'assigner la forme de la fonction fondamentale dans le cas où le gaz n'est pas en repos.

Au contraire, avec la méthode que nous avons choisie pour décrire le mouvement interne, on peut immédiatement indiquer ce que devient la fonction F lorsque le gaz est entraîné dans un mouvement d'en-

semble, avec une vitesse dont les composantes u, v, w ont *partout les mêmes valeurs.* En effet, si l'on communique cette vitesse au gaz que nous venons de considérer, on ne changera rien aux paramètres du mouvement interne et on donnera les vitesses ξ, η, ζ aux molécules qui d'abord avaient les vitesses $\xi - u$, $\eta - v$, $\zeta - w$. Dans le nouvel état la fonction fondamentale sera donc

$$F = NF_0(\xi - u, \ \eta - v, \ \zeta - w, \ E, p_1 \ldots p_k, h). \quad . \quad . \quad (6)$$

Dans cette formule, il faut entendre par h la valeur moyenne des carrés des vitesses, abstraction faite de la vitesse (u, v, w); on démontre facilement que le vrai moyen carré de la vitesse est $u^2 + v^2 + w^2 + h$. L'expression (6), aussi bien que celle qui représente F dans le cas du repos, annule les deux membres de l'équation fondamentale.

§ 13. Ce cas le plus simple mis de côté, voici comment le problème peut être abordé pour tout autre état du gaz. En chaque point et à chaque instant, les grandeurs N, u, v, w auront des valeurs déterminées, et nous pouvons choisir h de telle sorte que $u^2 + v^2 + w^2 + h$ soit le moyen carré de la vitesse des molécules au voisinage de ce point. Les grandeurs N, u, v, w, h sont alors, en général, des fonctions de x, y, z, t. Si elles étaient constantes, l'équation (6) pourrait être admise; maintenant, il n'en est plus ainsi. Nous posons donc

$$F = NF_0(\xi - u, \eta - v, \zeta - w, E, p_1, \ldots p_k, h) + f(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k, x, y, z, t), \quad (7)$$

où il faut tâcher de déterminer f. Pour cela, nous avons en premier lieu l'équation fondamentale, et en second lieu les relations suivantes, qui résultent immédiatement de ce qui a été dit plus haut:

$$\int f d\lambda = \int f \xi d\lambda = \int f \eta d\lambda = \int f \zeta d\lambda = \int f r^2 d\lambda = 0. \quad . \quad . \quad (8)$$

Je distinguerai les deux termes du second membre de l'équation (7) comme les parties *principale* et *accessoire* de la fonction fondamentale et j'appliquerai des dénominations analogues aux parties de chacune des intégrales (3) qui dérivent de ces termes.

Il est clair que le raisonnement qui nous a conduit à diviser les intégrales (3) en paires et impaires par rapport aux coordonnées, s'applique aux deux parties de chaque intégrale tout aussi bien qu'à l'intégrale elle-même. Par exemple, si deux gaz ayant un mouvement quelconque, sont l'image l'un de l'autre par rapport au plan yz, ils le pourraient être également si, dans toute leur étendue, u, v, w, h avaient les valeurs qui existent aux points considérés. On voit ainsi que non seulement les valeurs totales de P_x, mais aussi les parties principales de ces grandeurs, auront dans les deux systèmes, des valeurs et des signes égaux; il doit donc en être de même des parties accessoires. En général, si une des intégrales (3) est paire ou impaire par rap-

port à une des coordonnées, ses parties principale et accessoire le seront également.

§ 14. Nous supposerons maintenant, dans la suite de notre étude, que les conditions suivantes sont remplies.

α. La différence de l'état, en deux points distants l'un de l'autre d'une longueur égale au chemin moyen ϱ d'une molécule entre deux chocs successifs, est si petite que pour des fonctions φ qui dépendent de l'état du gaz, les expressions

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

sont très petites par rapport à la valeur de φ elle-même.

β. La valeur de $\tau \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, où τ désigne la durée moyenne de l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux chocs successifs d'une molécule, est également très petite par rapport à celle de φ.

Je m'appuyerai sur ces hypothèses en prenant pour φ, soit la fonction accessoire f, soit la fonction principale NF_0, soit enfin l'écart qu'il y a entre cette dernière fonction et la valeur qu'elle présenterait dans un certain état stationnaire.

γ. Le changement de vitesse qu'une molécule éprouve entre deux chocs successifs, par l'effet des forces extérieures, est très petit en comparaison de la vitesse même.

Pour que les conditions α et β soient remplies lorsque des ondes sonores se propagent dans une masse gazeuse de grandes dimensions, il faut et il suffit que la longueur d'onde soit très grande par rapport au chemin libre' moyen ϱ des molécules.

La condition γ est évidemment remplie si nous avons affaire à la pesanteur.

§ 15. En vertu des hypothèses α, β et γ, il est très probable, sinon certain, que dans l'équation (7), la fonction accessoire f est très petite par rapport à la fonction principale NF_0. Pour nous en convaincre, nous allons considérer l'ordre de grandeur des termes qui entrent dans l'équation fondamentale (I) (p. 77).

Examinons d'abord le premier membre. Soient a_0 et b_0 les valeurs que prennent a et b quand on donne à F la valeur (6) et soient $a_0 + a_1$, $b_0 + b_1$ les valeurs qui correspondent à (7); le premier membre de l'équation fondamentale devient alors $b_1 - a_1$. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, les nombres a_0 et b_0 sont égaux entre eux.

Si le gaz se trouve dans l'état représenté par (6), les molécules dont l'état est compris entre les limites indiquées au § 3, et dont le nombre (par unité de volume) est $NF_0 d\lambda$, parcourront, à partir d'un moment donné, un certain chemin moyen s avant de rencontrer une

autre molécule. Par un calcul connu[1]), on trouve que le nombre des molécules du groupe en question, qui subissent déjà un choc durant le temps dt, est représenté par $\frac{r}{s} NF_0 d\lambda dt$. On a donc $a_0 = \frac{r}{s} NF_0$. Or, r étant du même ordre de grandeur que la vitesse moyenne W du mouvement moléculaire, et s du même ordre que la longueur ϱ nommée dans la condition α, il en résulte que a_0 est de l'ordre $\frac{W}{\varrho} NF_0$.

Ensuite, a_1 représente l'accroissement de a lorsque l'état du gaz subit le changement indiqué par f dans l'équation (7). Par conséquent, a_1 est de l'ordre $a_0 \frac{f}{NF_0}$ ou de l'ordre $\frac{W}{\varrho} f$.

Je supposerai maintenant deux choses. D'abord, ce qui n'est guère douteux, que b_1 est du même ordre de grandeur que a_1 et, en second lieu, que la différence $b_1 - a_1$ n'est *pas* très petite par rapport aux grandeurs a_1 et b_1 elles-mêmes. Quant à cette dernière supposition, elle serait fausse si la fonction accessoire pouvait être de la même forme que la fonction principale, ne s'en distinguant que par un facteur constant; on aurait alors: $b_1 - a_1 = 0$. Cependant une telle forme de la fonction f est exclue par les conditions (8) et en réalité cette fonction, qui sert à indiquer un *écart* de l'état représenté par (6), peut bien être regardée comme ayant une forme entièrement différente de celle de F_0. Nous dirons donc que $b_1 - a_1$ est de l'ordre $\frac{W}{\varrho} f$.

La substitution de la valeur (7) dans le second membre de l'équation fondamentale donne lieu à deux espèces de termes, les uns provenant de NF_0 et les autres de f. Or, en vertu de ce que nous venons d'admettre, ces derniers termes sont très petits en comparaison de la différence $b_1 - a_1$. Pour les termes

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\eta, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\zeta,$$

---

[1]) Comptons le temps à partir du moment donné, posons pour abréger $NF_0 d\lambda = q_0$ et considérons les q_0 molécules qui, à l'instant $t = 0$, constituent le groupe dont il s'agit. Ce groupe est de plus en plus décimé par les chocs et à l'instant t, il n'en restera plus qu'un certain nombre de molécules q. Évidemment, le nombre des molécules qui subissent un choc entre les instants t et $t + dt$, peut être représenté par

$$\varepsilon q dt,$$

où ε est une certaine constante. On a donc $dq = -\varepsilon q dt$, $q = q_0 e^{-\varepsilon t}$. On trouve ainsi pour le nombre des particules qui subissent un choc dans l'intervalle de t à $t + dt$, $\varepsilon q_0 e^{-\varepsilon t} dt$. On peut dire que depuis l'instant $t = 0$, ces molécules ont parcouru un chemin rt. La somme de tous les chemins parcourus devient $\varepsilon r q_0 \int_0^\infty t e^{-\varepsilon t} dt = \frac{r q_0}{\varepsilon}$, et la valeur moyenne de tous ces chemins $s = \frac{r}{\varepsilon}$. On peut donc écrire $\frac{r}{s} q dt$ pour le nombre des chocs dans un intervalle dt quelconque et $\frac{r}{s} q_0 dt = \frac{r}{s} NF_0 d\lambda dt$ pour le nombre des chocs dans le premier intervalle dt.

cela résulte de la supposition α et pour le terme $\frac{\partial f}{\partial t}$ de la supposition β. C'est ce qu'on voit facilement en remarquant que ξ, η, ζ sont du même ordre de grandeur que W et que $\frac{W}{\varrho}$ peut être remplacé par $\frac{1}{\tau}\cdot$ Quant aux termes

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

il suffit de remarquer que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial \xi}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$ seront en général de l'ordre $\frac{f}{W}$, et que par conséquent la division de $\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$, etc. par $b_1 - a_1$ conduit à des valeurs de l'ordre $\frac{1}{W}\tau\frac{\partial \psi}{\partial x}$, etc. Or, les grandeurs $\tau\frac{\partial \psi}{\partial x}$ etc., ne sont autre chose que les variations des vitesses ξ, η, ζ, produites entre deux chocs successifs par les forces extérieures.

En somme, nous n'avons à conserver au second membre de l'équation (I) que les termes provenant de NF_0 dans (7). L'équation devient ainsi

$$b_1 - a_1 = N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial (NF_0)}{\partial x}\xi + \frac{\partial (NF_0)}{\partial y}\eta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial z}\zeta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial t}, \quad \text{(II)}$$

où F_0 désigne toujours la fonction $F_0(\xi - u, \ldots)$.

C'est cette équation qui, jointe aux conditions (8), devra servir à la détermination de f. En vertu de ce que nous avons admis au sujet de $b_1 - a_1$, on peut en conclure immédiatement que la fonction accessoire est du même ordre de grandeur que l'expression

$$\frac{\varrho}{W}\left\{N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial (NF_0)}{\partial x}\xi + \frac{\partial (NF_0)}{\partial y}\eta\right.$$
$$\left. + \frac{\partial (NF_0)}{\partial z}\zeta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial t}\right\}, \quad (9)$$

c'est-à-dire, eu égard aux suppositions α, β et γ, qu'elle est très petite par rapport à NF_0, ainsi que nous voulions le démontrer. C'est donc bien avec raison que, dans le second membre de l'équation fondamentale, nous avons négligé les termes provenant de f vis-à-vis de ceux qui correspondent à NF_0.

Dans tout ce qui suit, nous regarderons la fonction accessoire f comme *infiniment petite* par rapport à NF_0; les termes a_1 et b_1 deviennent alors infiniment petites par rapport à a_0 et b_0. D'après cela, si la fonction f est composée de différentes parties, la valeur que prend le premier membre de l'équation fondamentale sera la somme des valeurs qu'il aurait si l'on prenait pour f successivement chacune de ces parties.

§ 16. Voici quelques théorèmes importants relatifs à la fonction accessoire f.

1. Dans tous les cas où le second membre de l'équation (II) est nul, on aura $f = 0$.

En effet, si la fonction avait une certaine valeur f_1 différente de 0, non seulement la valeur $F = NF_0$ de la fonction fondamentale, mais aussi la valeur $F = NF_0 + f_1$, qui, grâce aux équations (8), est compatible avec les mêmes valeurs de N, u, v, w, h, donneraient $b = a$. Cela est en contradiction avec le théorème de Boltzmann d'après lequel l'état stationnaire et homogène d'un gaz, pour des valeurs données de N, u, v, w, h, est entièrement déterminé par la condition $b = a$.

2. La fonction f est complètement déterminée dès qu'on connaît le second membre de (II). Pour le démontrer, supposons qu'il y ait *deux* solutions de (II) et de (8), $f = f_1$ et $f = f_2$. Si l'on prend pour f la différence $f_1 - f_2$, on satisfera encore à (8) et on aura $b_1 - a_1 = 0$. Il faut donc qu'on ait $f_1 - f_2 = 0$, $f_1 = f_2$.

3. Si le second membre de l'équation (II) est composé d'un certain nombre de parties et qu'on réussit à trouver pour f des fonctions qui rendent la différence $b_1 - a_1$ égale à chacune de ces parties et qui en même temps satisfont à (8), la somme de ces fonctions sera la solution des équations, et on aura la valeur accessoire d'une quelconque des intégrales (3) en prenant la somme des valeurs qui correspondent aux différentes fonctions dont nous venons de parler.

4. Si le second membre de (II) est multiplié par une constante, la fonction f et les parties des intégrales qui en dépendent seront multipliées par cette même constante.

De même, on changera le signe de la fonction f et des parties accessoires des intégrales, en changeant celui du second membre de l'équation (II).

5. Supposons que non seulement les particules du second gaz dont nous avons parlé au § 10 aient les mêmes masses que celles du premier, mais que toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, soient dans l'un des deux systèmes les images de ce qu'elles sont dans l'autre.[1]) Alors, les mouvements qui sont nécessaires pour que le second système soit à tout instant l'image du premier peuvent réellement avoir lieu. De plus, nous admettrons que le gaz que nous étudions présente les mêmes propriétés qu'aurait un autre qui en serait l'image de sorte que, si nous employons toujours, dans les deux cas, des axes de coordonnées ayant les mêmes directions, les formules générales sont

---

[1]) Les forces intérieures satisferont à cette condition, si les particules ont les mêmes propriétés dans les deux systèmes et si les actions mutuelles consistent en des attractions et des répulsions qui dépendent de la distance.

les mêmes pour les deux systèmes. Alors, l'équation (II) s'applique également aux deux corps. Seulement, le second membre, qui dépend de l'état particulier où le gaz se trouve, peut avoir des valeurs différentes pour les deux systèmes.

Supposons maintenant que le plan de symétrie soit perpendiculaire à l'axe des x et que, dans le second membre de (II), il y ait un terme q qui, pris pour des valeurs déterminées de $\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k$, se retrouve avec la même grandeur et le même signe dans l'équation relative à l'image. Alors les parties de f et des intégrales (3) qui correspondent à ce terme seront, elles aussi, égales dans les deux cas, avec les mêmes signes. D'un autre côté, parmi les intégrales (3), il y en a un certain nombre qui sont impaires par rapport à x (§ 10), c'est-à-dire qui ont des signes contraires dans le gaz et dans son image. Evidemment, on doit conclure que le terme q ne peut contribuer en rien aux intégrales qui ont cette dernière propriété.

Le même raisonnement s'applique au cas où un terme dans le second membre de (II) aurait dans les deux gaz, pour des valeurs déterminées de $\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k$, la même grandeur mais des signes contraires et on peut traiter de la même manière les images par rapport à des plans qui sont perpendiculaires aux axes des y et des z. En somme, on est conduit à la proposition suivante:

Si un terme dans le second membre de (II) est pair (ou impair) par rapport à l'une des coordonnées, les parties correspondantes de toutes les intégrales (3) qui sont impaires (ou paires) par rapport à cette même coordonnée seront nulles.

§ 17. Comme le gaz a été supposé soumis aux forces extérieures qui dérivent de la fonction ψ, nous allons examiner de plus près, dans ce paragraphe et les deux suivants, l'état *stationnaire* qui peut exister sous leur action. On sait que, dans ce cas, d'après la seconde loi de la thermodynamique, il y aura une température uniforme; h sera donc indépendant des coordonnées. Maxwell et Boltzmann ont été conduits au même résultat en se basant sur la théorie cinétique et ils ont trouvé en même temps que la fonction fondamentale se réduit maintenant à $NF_0(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k, h)$. Malgré la non-homogénéité du gaz, il n'y aurait pas de fonction accessoire et en chaque point l'état serait exactement le même que dans un gaz, soustrait à toute action étrangère et ayant *partout* la densité qui existe au point considéré.

Cependant, il n'est pas nécessaire de nous servir de ce dernier résultat. Même en le laissant de côté, ce qui revient à admettre la possibilité de l'existence d'une fonction accessoire f dans le cas de l'équilibre sous l'action de forces extérieures, on peut démontrer que

cette fonction ne peut avoir aucune influence sur les valeurs des intégrales (3) et que, par conséquent, elle ne joue aucun rôle dans les équations du mouvement, ou plutôt de l'équilibre.

Pour nous en convaincre, nous commencerons par le cas particulier d'un gaz soumis à l'action de la *pesanteur* et compris entre deux parois horizontales immobiles, avec lesquelles il n'y a aucun échange de chaleur. Dans l'état stationnaire, si l'axe des x est dirigé verticalement vers le bas, le facteur N sera une fonction de x, tandis que h est une constante et les vitesses u, v, w sont nulles. Le premier terme de (7) est $NF_0(\xi, \eta, \zeta, E, \ldots, h)$ et l'équation (II) devient

$$b_1 - a_1 = gN\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{dN}{dx}F_0\xi, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

où g désigne l'accélération due à la pesanteur.

Je vais démontrer que la fonction f qui est déterminée par les conditions (10) et (8), si toutefois elle est différente de 0, ne peut apporter aucune contribution aux intégrales (3).

Comparons, à cet effet, la masse gazeuse à ses images par rapport à des plans qui sont perpendiculaires aux axes des coordonnées. Dans chacune de ces images, la fonction F_0 et sa dérivée par rapport à ξ contiennent les variables ξ, η, ζ de la même manière que dans le gaz lui-même; cela résulte de ce que la fonction F_0 se rapporte à l'état stationnaire de repos qui existerait dans l'absence de forces extérieures. Au contraire, dans la première des trois images, $\frac{dN}{dx}$ a la même valeur mais avec le signe contraire que dans le gaz lui-même, et il en est de même de l'accélération g, attendu que dans cette image la force extérieure doit être censée agir vers le haut, tandis que l'axe des x est toujours dirigé vers le bas. Il paraît donc que le second membre de (10) est impair par rapport à x, et pair par rapport à y et z, d'où nous pouvons conclure que, de toutes les intégrales (3), S_x est la seule dont il doive maintenant être question.

Il s'ensuit que, pour achever de démontrer ce que nous avons avancé, il suffit de reconnaître que la partie accessoire de l'intégrale S_x doit être nulle. Or, la valeur entière de cette intégrale sera nulle, parce que, dans le cas qui nous occupe, il n'y a dans le gaz aucun transport d'énergie dans le sens vertical. De plus, la partie principale de S_x est nulle en vertu de la définition de cette intégrale et de l'absence d'une vitesse d'ensemble; il doit donc en être de même de la partie accessoire.

§ 18. L'équation (10), qui devait servir à la détermination de la fonction f, peut être mise sous une forme un peu différente. On l'ob-

tient en faisant intervenir l'équation de l'équilibre, qu'on déduit facilement de la première des formules (b_1) (p. 79). En effet, comme les intégrales P et Q se réduisent à leurs parties principales et que la partie principale de la fonction F a maintenant la forme $NF_0(\xi, \eta, \zeta, E, \ldots, h)$ qui convient à un gaz homogène se trouvant en repos, on aura

$$Q_{xy} = 0, \quad Q_{yz} = 0, \quad Q_{zx} = 0$$

et

$$\int F\xi^2 d\lambda = \int F\eta^2 d\lambda = \int F\zeta^2 d\lambda.$$

Chacune de ces dernières intégrales est donc égale au tiers de leur somme, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{3}\int Fr^2 d\lambda = \frac{1}{3} Nh.$$

En substituant cette valeur de P_x dans la première des équations (b_1) et en ayant égard à la constance de h et à ce que l'état est stationnaire, on trouve l'équation de l'équilibre

$$-Ng + \frac{1}{3} h \frac{dN}{dx} = 0.$$

Enfin cette formule permet de remplacer la condition (10) par

$$b_1 - a_1 = Ng\left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} \xi F_0\right),$$

et de tout ce qui précède nous pouvons tirer la conclusion suivante:

Si, dans le second membre de l'équation fondamentale, il y a un terme ayant la forme de

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} \xi F_0,$$

multiplié par une constante, la partie correspondante de la fonction accessoire ne contribuera pour rien aux intégrales (3). Comme, dans toute cette étude, la fonction F ne doit servir, en fin de compte, qu'à nous faire connaître ces intégrales, on peut entièrement laisser de côté un terme tel que celui dont je viens de parler. Il est clair qu'on pourrait en faire autant de termes qui contiendraient les facteurs

$$\frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \frac{3}{h} \eta F_0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} + \frac{3}{h} \zeta F_0,$$

multipliés par des constantes.

Ajoutons que d'après la forme que Boltzmann a trouvée pour la fonction F_0, ces facteurs et l'expression

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} \xi F_0$$

seraient identiquement nuls; les parties correspondantes de la fonction accessoire f le seraient donc également.

§ 19. Nous pouvons démontrer maintenant que, lorsque ψ est une fonction quelconque des coordonnées, il peut exister un état stationnaire dans lequel h = const., $u = v = w = 0$, tandis que les variations de la densité obéissent à la loi exprimée par la relation

$$N = Ce^{\frac{3}{h}\psi},$$

où C est un facteur constant. Ces valeurs conduisant à la forme suivante du second membre de l'équation fondamentale:

$$Ce^{\frac{3}{h}\psi}\left\{\left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h}\xi F_0\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \frac{3}{h}\eta F_0\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_0}{\partial \zeta} + \frac{3}{h}\zeta F_0\right)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\},$$

le théorème du paragraphe précédent nous permet de faire entièrement abstraction de la fonction accessoire. On a ensuite, comme au § 18,

$$P_x = P_y = P_z = \tfrac{1}{3}Nh,$$
$$Q_{xy} = Q_{yz} = Q_{zx} = 0,$$

et on voit facilement que, grâce à la valeur que nous venons d'adopter pour N, les conditions (b_1) se trouvent remplies.

§ 20. Après cette digression, nous pouvons revenir au cas général du *mouvement* sous l'influence des forces extérieures que nous avons supposées. On peut toujours comparer l'état du gaz à un certain état stationnaire E qui est possible sous l'action des mêmes forces et qu'on peut imaginer avoir existé à quelque moment antérieur. Je désignerai par NF_0 la partie principale de la fonction fondamentale dans le cas qu'il s'agit d'étudier — c'est-à-dire la fonction

$$NF_0(\xi - u,\ \eta - v,\ \zeta - w,\ E, \ldots, h)$$

dont il a été question au § 12, — et par $(NF_0)_e$ la fonction correspondante pour l'état d'équilibre E. Ces deux fonctions se distinguent l'une de l'autre non seulement par ce que dans l'état E on a $u = v = w = 0$, mais aussi par ce que, dans les deux cas, les valeurs de N et de h, en un point quelconque, ne sont pas les mêmes. Si l'on désigne la différence par χ, de sorte que

$$NF_0 = (NF_0)_e + \chi,$$

le second membre de l'équation fondamentale se divise en deux parties, l'une dépendant de $(NF_0)_e$ et l'autre de χ. Mais, de ce qui a été dit aux §§ 18 et 19, il résulte qu'on peut faire abstraction de la première partie. On peut donc remplacer le second membre de l'équation fondamentale par

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \chi}{\partial y}\eta + \frac{\partial \chi}{\partial z}\zeta + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

et la fonction accessoire f, en tant qu'il y a lieu d'en tenir compte, sera de l'ordre de grandeur

$$\frac{\varrho}{W}\left\{\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial \chi}{\partial x}\xi+\frac{\partial \chi}{\partial y}\eta+\frac{\partial \chi}{\partial z}\zeta+\frac{\partial \chi}{\partial t}\right\}.$$

En vertu des suppositions α, β, γ, cette expression est très petite par rapport à la valeur de χ, c'est-à-dire par rapport au dérangement survenu à l'état d'équilibre. Dans une première approximation, nous pourrons donc négliger f dans l'équation (7), ce qui revient à admettre, dans le calcul des quantités P_x etc., que l'état est le même que si, *dans toute la masse gazeuse*, u, v, w, N, h avaient *continuellement* les valeurs qu'on trouve au point et à l'instant considérés. Je ferai remarquer que, pour justifier cette manière d'agir, il fallait démontrer que la valeur de f est très petite par rapport à $NF_0-(NF_0)_e$, attendu que les valeurs de coefficients différentiels tels que $\frac{\partial P_x}{\partial x}$, etc. dépendent de cette dernière différence. Si l'on s'était borné à faire voir que la fonction f est très petite par rapport à NF_0, il ne s'en serait pas nécessairement suivi qu'elle le fût aussi par rapport à $NF_0-(NF_0)_e$.

§ 21. Il s'agit maintenant de déterminer les valeurs que prennent les intégrales (3), lorsqu'on y substitue

$$F=NF_0(\xi-u,\ \eta-v,\ \zeta-w,\ E,\ p_1,\ldots p_k,\ h).$$

Les calculs nécessaires à cet effet s'effectuent facilement si, au lieu de ξ, η, ζ, on introduit $\xi-u$, $\eta-v$, $\zeta-w$ comme variables d'intégration, ou bien, pour ne pas introduire de nouveaux symboles, si on remplace ξ, η, ζ par $\xi+u$, $\eta+v$, $\zeta+w$. Cela veut dire que, dans les formules de ce paragraphe, ξ, η, ζ *représenteront les composantes de la vitesse d'une molécule, abstraction faite de la vitesse d'ensemble* (u, v, w).

Après cette substitution la fonction F prend la forme

$$F=NF_0(\xi,\eta,\zeta,E,\ldots,h),$$

que nous désignerons maintenant par NF_0. Du reste, les limites des intégrations par rapport à ξ, η, ζ étant $-\infty$ et $+\infty$ dans les formules (3), nous n'avons rien à y changer. Si, enfin, on entend par $d\lambda$ le produit de $dE\,dp_1\ldots dp_k$ par les différentielles des nouvelles variables ξ, η, ζ et qu'on écrit r^2 pour la somme des carrés de ces dernières, les intégrales auxquelles on est conduit, sont de la forme de celles qu'on trouve dans les formules (5) et leurs valeurs pourront être empruntées à ces équations. Nous nous servirons aussi des relations

$$\int F_0\xi^2 d\lambda=\int F_0\eta^2 d\lambda=\int F_0\zeta^2 d\lambda=\frac{1}{3}\int F_0 r^2 d\lambda=\frac{1}{3}h.$$

Cela posé, on trouve d'abord

$$P_x = N\int F_0(\xi+u)^2 d\lambda = N\int F_0\xi^2 d\lambda + 2Nu\int F_0\xi d\lambda + Nu^2\int F_0 d\lambda$$
$$= \frac{1}{3}Nh + Nu^2, \quad (11)$$

et par un calcul semblable

$$\left.\begin{aligned} P_y &= \frac{1}{3}Nh + Nv^2, \quad P_z = \frac{1}{3}Nh + Nw^2, \\ Q_{xy} &= Nuv, \quad Q_{yz} = Nvw, \quad Q_{zx} = Nwu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ensuite, on a

$$R = \frac{1}{2}mN(u^2+v^2+w^2) + N\int F_0\left(\frac{1}{2}mr^2 + E\right)d\lambda.$$

Dans cette dernière intégrale, la partie

$$\int F_0 \cdot \frac{1}{2}mr^2 d\lambda = \frac{1}{2}mh$$

représente l'énergie moyenne du mouvement de translation d'une molécule; la partie restante $\int F_0 E d\lambda$ est sa moyenne énergie interne. Cette dernière sera une fonction de la température, ou bien de h; si l'on pose $\int F_0 E d\lambda = m\vartheta(h)$, $\vartheta(h)$ représente l'énergie intramoléculaire par unité de masse. La forme de cette fonction pourrait être déterminée au moyen d'expériences sur la variation de la chaleur spécifique avec la température. Si la chaleur spécifique restait constante, $\vartheta(h)$ serait une fonction linéaire.

La valeur de R devient maintenant

$$R = \frac{1}{2}mN(u^2+v^2+w^2) + \frac{1}{2}mNh + mN\vartheta(h). \quad . \quad . \quad (13)$$

Enfin, on a

$$S_x = N\int F_0(\xi+u)\left\{\frac{1}{2}m(r^2+2\xi u+2\eta v+2\zeta w+u^2+v^2+w^2)+E\right\}d\lambda$$
$$= \frac{1}{2}mNu\left[\frac{5}{3}h + 2\vartheta(h) + (u^2+v^2+w^2)\right],$$
$$S_y = \frac{1}{2}mNv\left[\frac{5}{3}h + 2\vartheta(h) + (u^2+v^2+w^2)\right],$$
$$S_z = \frac{1}{2}mNw\left[\frac{5}{3}h + 2\vartheta(h) + (u^2+v^2+w^2)\right].$$

§ 22. Transportant ces résultats dans (b_1), (c_1), et faisant usage de (a_1) pour transformer (b_1), et de (a_1) et (b_1) pour simplifier (c_1), on obtient les équations suivantes:

$$\frac{\partial(Nu)}{\partial x} + \frac{\partial(Nv)}{\partial y} + \frac{\partial(Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a_2)$$

$$-N\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial(Nh)}{\partial x} + N\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \text{ etc.} \quad (b_2)$$

$$\frac{1}{3}h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}[1+2\vartheta'(h)]\left(u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+w\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial t}\right) = 0. \quad (c_2)$$

Si l'on multiplie (a_2) et (b_2) par m, on peut, au lieu de N, introduire la densité du gaz $mN = \delta$.

Pour des dérangements infiniment petits de l'état d'équilibre, les équations se simplifient. Si dans cet état, on a $\delta = \delta_0$, $h = h_0$, et dans l'état dérangé $\delta = \delta_0 (1 + s)$, on obtient, en négligeant de plus l'action des forces extérieures,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (a_3)$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_0 s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_0 s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_0 s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (b_3)$$

$$\frac{1}{3} h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left[1 + 2\vartheta'(h_0)\right]\frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad \ldots \quad (c_3)$$

La propagation du son.

§ 23. On verra facilement que les équations qui viennent d'être trouvées diffèrent seulement par la notation de celles qu'on obtient dans la théorie ordinaire du son. Pour en tirer la vitesse de propagation, nous déduisons d'abord des équations (a_3) et (c_3)

$$\frac{3}{2h_0}[1 + 2\vartheta'(h_0)]\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t},$$

ou, puisque dans l'état primitif d'équilibre on avait $s = 0$ et $h = h_0$,

$$\frac{3}{2h_0}[1 + 2\vartheta'(h_0)](h - h_0) = s.$$

Si la valeur de h, donnée par cette formule, est substituée dans les équations (b_3), celles-ci deviennent

$$\frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{9[1 + 2\vartheta'(h_0)]} h_0 \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \quad (b'_3)$$

et on trouve, en éliminant u, v, w à l'aide de la relation (a_3),

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{9[1 + 2\vartheta'(h_0)]} h_0 \Delta s.$$

Cette équation a une forme bien connue, et il en résulte immédiatement pour la vitesse de propagation

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{1 + 2\vartheta'(h_0)} h_0}.$$

Or, la pression p_0 dans l'état d'équilibre étant déterminée par

$$p_0 = \frac{1}{3}\delta_0 h_0,$$

et un raisonnement simple[1]) donnant la valeur

$$k = \frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{3[1 + 2\vartheta'(h_0)]} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

1) Supposons qu'une masse gazeuse ayant le volume I subisse l'élévation de température qui correspond à l'accroissement dh. Si la pression $p = \frac{1}{3} m N h$

pour le rapport des chaleurs spécifiques du gaz à pression constante et à volume constant, le résultat obtenu s'accorde avec la formule

$$V = \sqrt{\frac{kp_0}{\delta_0}},$$

qu'on déduit dans la théorie ordinaire du son et que l'observation a confirmée.

§ 24. Si nous n'avions eu d'autre but que d'obtenir ce résultat, les considérations précédentes auraient pu être notablement simplifiées. Seulement, pour arriver aux équations du mouvement (a_3), (b_3), (c_3), il aurait toujours été nécessaire d'admettre que les conditions α et β (§ 14) soient remplies. Par conséquent, une solution des équations qui ne satisfait pas à ces conditions ne correspondra pas à un mouvement réel du gaz.

Les équations nous apprennent, par exemple, qu'une onde unique comprise entre deux surfaces, où le dérangement de l'équilibre passe brusquement à zéro, peut se propager sans perdre ses limites tranchées. En réalité, les choses se passeront d'une manière différente et les limites de l'onde ne tarderont pas à s'effacer par un phénomène de diffusion dont il n'a pas été tenu compte dans l'établissement des équations du mouvement.

Les considérations élémentaires suivantes pourront encore servir à nous renseigner sur le rôle que jouent nos suppositions α et β.

Figurons-nous que dans un espace fermé, rempli de gaz, on admet du dehors un certain nombre de molécules et qu'ensuite le système est abandonné à lui-même. Primitivement, le gaz se trouvait dans un état stationnaire, déterminé par la fonction F_0. La première conséquence de l'introduction des nouvelles particules sera un dérangement de cet état. Mais, grâce aux chocs, il s'établira bientôt un nouvel état stationnaire, qui différera du premier en ce que le nombre des molécules,

---

est maintenue constante, le produit Nh ne changera pas et, comme il en est de même du nombre de molécules NI, il faut que I varie proportionnellement à h. Cela nous donne $dI = \frac{I}{h} dh$ et pour le travail accompli pendant la dilatation

$$dA = pdI = \frac{1}{3} mNIdh.$$

L'énergie de chaque molécule s'est accrue de $m\left[\frac{1}{2} + \vartheta'(h)\right] dh$ et l'énergie totale du système de

$$d\varepsilon = mNI\left[\frac{1}{2} + \vartheta'(h)\right] dh.$$

On obtient l'expression du texte en employant la formule connue

$$k = \frac{d\varepsilon + dA}{d\varepsilon}.$$

le carré moyen de leur vitesse et les vitesses moyennes suivant les axes des coordonnées seront modifiés. Les choses se passeraient d'une manière analogue, si un certain nombre de molécules étaient sorties de l'espace en question.

Le temps qui s'écoulera avant le rétablissement de l'état stationnaire sera du même ordre de grandeur que l'intervalle qui sépare deux chocs successifs d'une molécule.

Considérons maintenant une masse gazeuse dans laquelle l'équilibre est troublé. Prenons, dans cette masse, un certain espace, assez petit pour pouvoir être traité comme un élement de volume. Si la condition α est remplie, nous pourrons donner à cet élément des dimensions qui sont grandes par rapport au chemin libre des molécules. Il en résultera qu'une molécule, pénétrant par un côté de l'élément, le traversera très rarement sans subir un choc. On doit se figurer, au contraire, qu'après avoir parcouru un trajet très court, les molécules nouvellement introduites s'engagent dans une série de rencontres avec les molécules déjà contenues dans l'élément; et, de même, que les molécules sortant de l'élément ont fait partie de celles qui y étaient soumises à des collisions répétées.

Si l'entrée et la sortie de molécules se produisaient à un moment déterminé, il se passerait un certain temps, de l'ordre déjà indiqué, avant que les chocs n'eussent rétabli dans l'élément un état stationnaire. Mais, en réalité, l'entrée et la sortie ont lieu d'une manière continue, et par conséquent, à proprement parler, l'état stationnaire qui correspond à la densité, à la température et à la vitesse d'ensemble du gaz n'existera jamais. L'état de mouvement des molécules conservera toujours les traces de ce qu'il a été antérieurement. Néanmoins, pourvu que le temps nécessaire au rétablissement de l'état stationnaire soit suffisamment court (condition β), il est clair qu'on pourra admettre, avec une approximation suffisante, qu'un pareil état est réalisé à chaque instant. Seulement, la densité, la vitesse et la température changent alors continuellement par le fait des molécules qui entrent et qui sortent. C'est précisément la manière dont ce changement s'effectue qui est indiquée par nos équations du mouvement.

§ 25. Pour une théorie complète de différents phénomènes, il ne suffit pas de connaître les équations du mouvement des gaz; il faut considérer également ce qui a lieu à la surface des corps (solides ou liquides) avec lesquels ils se trouvent en contact.

Supposons d'abord la surface *plane* et *parfaitement polie*. Alors, si elle est en repos, elle ne changera rien à l'état d'un gaz qui se trouve en équilibre avec une densité et une température uniformes. Elle ne le fera pas non plus, si elle se déplace dans une direction

située dans le plan lui-même. Comme on peut ensuite imprimer aux particules du système entier une vitesse commune quelconque, on voit qu'une surface plane et polie ne dérangera pas l'état du gaz, pourvu qu'elle ait dans la direction normale la même vitesse que ce dernier. Du reste, cette proposition que nous venons de déduire pour une surface plane qui se trouve en contact avec un gaz dont l'état est homogène, peut être étendue à des cas *où la surface est courbe et où l'état du gaz change d'un point à l'autre.* Seulement, il faut pour cela que les conditions α et β soient remplies, et que (condition δ) les rayons de courbure de la surface soient très grands par rapport au chemin moyen ϱ.

A la rigueur, une paroi ne serait jamais parfaitement polie pour un observateur qui pourrait discerner les molécules du gaz; il la verrait composée elle-même de molécules et recouverte d'une couche de gaz condensé. En général, les mouvements qui ont lieu à la surface seront donc très compliqués. Cependant, on peut admettre qu'une surface quelconque qui se trouve en repos peut être en équilibre avec un gaz sans mouvement d'ensemble, à la seule condition que la paroi ait la même température que le gaz. Cela posé, on peut de nouveau communiquer au système entier une vitesse quelconque, et, en supposant remplies les conditions (α), (β) et (δ), passer au cas d'une surface courbe, limitant un gaz dont l'état varie d'un point à un autre. Il paraît ainsi que les conditions à remplir à la surface consistent dans *l'égalité des températures* et *l'égalité des vitesses, de la paroi et du gaz, dans chaque direction.*

§ 26. Nous examinerons maintenant l'énergie d'un gaz qui est le siège d'un mouvement sonore. La grandeur de cette énergie est donnée immédiatement par l'équation (13), ou

$$R = \frac{1}{2}\delta(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}\delta h + \delta\vartheta(h),$$

puisque Rdl est l'énergie contenue dans un élément de volume dl.

De cette équation nous pouvons en déduire une autre, ne renfermant plus que u, v, w et s, si, à l'aide des équations du mouvement, nous exprimons d'abord h en s. Pour le cas où l'on ne conserve que la première puissance de s, cela a déjà été fait au commencement du § 23; mais, comme il est désirable de calculer l'énergie R plus exactement, à des termes du second ordre près (si u, v, w, s sont du premier ordre), il faut maintenant déduire de (a_2), (b_2), (c_2) la relation qui lie h à s.

A cet effet, représentons-nous un point Q, se mouvant de telle sorte que sa vitesse soit toujours égale à la vitesse d'ensemble qui existe à l'endroit où il se trouve. En prenant alors, à un moment

quelconque t, pour les grandeurs δ et h les valeurs qu'elles ont en Q, on a

$$\frac{d\delta}{dt} = u\frac{\partial\delta}{\partial x} + v\frac{\partial\delta}{\partial y} + w\frac{\partial\delta}{\partial z} + \frac{\partial\delta}{\partial t},$$

avec une formule analogue pour h, et de (a_2) et (c_2) on déduit

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{3}{2}[1 + 2\vartheta'(h)]\frac{dh}{h}.$$

Par conséquent, puisque dans l'état d'équilibre primitif on avait $\delta = \delta_0$, $h = h_0$,

$$\log\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) = \log(1 + s) = \frac{3}{2}\int_{h_0}^{h}[1 + 2\vartheta'(h)]\frac{dh}{h}.$$

Ici, on peut introduire la valeur de $\vartheta'(h)$ tirée de la formule

$$k = \frac{5 + 6\vartheta'(h)}{3[1 + 2\vartheta'(h)]}.$$

On trouve alors

$$\log\frac{\delta}{\delta_0} = \int_{h_0}^{h}\frac{dh}{(k-1)h}$$

et, en supposant k constant,

$$\log\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1}{k-1}\log\frac{h}{h_0},$$

ou bien, si l'on désigne par T_0 et T les températures absolues,

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{k-1}.$$

On est ramené ainsi à la loi bien connue qui régit les changements de température dans les dilatations ou compressions adiabatiques.

Pour calculer maintenant en fonction de s l'énergie R qui existe par unité de volume, nous pouvons poser

$$R' = \frac{1}{2}\delta h + \delta\vartheta(h)$$

et développer cette fonction par la série de Taylor. En employant la relation entre dh et $d\delta$ que nous venons de déduire, on trouve

$$\frac{dR'}{d\delta} = \frac{1}{2}[h + 2\vartheta(h)] + \frac{1}{2}\delta[1 + 2\vartheta'(h)]\frac{dh}{d\delta} = \frac{1}{6}[5h + 6\vartheta(h)],$$

$$\frac{d^2R'}{d\delta^2} = \frac{1}{6}[5 + 6\vartheta'(h)]\frac{dh}{d\delta} = \frac{5 + 6\vartheta'(h)}{9[1 + 2\vartheta'(h)]}\cdot\frac{h}{\delta}.$$

Donc, si l'on désigne par R_0 la valeur de R pour l'état d'équilibre et si l'on substitue $\delta - \delta_0 = \delta_0 s$,

$$R - R_0 = \frac{1}{6}\delta_0[5h_0 + 6\vartheta(h_0)]\,s + \delta_0 h_0\cdot\frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{18[1 + 2\vartheta'(h_0)]}s^2 + \frac{1}{2}\delta_0(u^2 + v^2 + w^2). \quad (15)$$

Le premier terme de cette formule s'évanouit lorsque, dans le cas des vibrations sonores, on cherche *l'énergie moyenne* d'un élément de volume *pendant la durée d'une vibration;* en effet, la valeur moyenne de s est alors zéro. Le terme disparaît également lorsqu'il s'agit de l'énergie *totale* existant dans une masse gazeuse qui s'étend à l'infini ou qui est limitée par des corps immobiles. En effet, comme la masse totale est invariable, on a, si l'on étend l'intégration à l'espace entier occupé par le gaz,

$$\int s\,dl = 0$$

et, par conséquent,

$$\int (R - R_0)\,dl = \delta_0 h_0 \cdot \frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{18[1 + 2\vartheta'(h_0)]}\int s^2\,dl + \frac{1}{2}\delta_0\int (u^2 + v^2 + w^2)\,dl.$$

§ 27. Il est clair que cette expression doit avoir une valeur constante. Pour le vérifier, je désignerai par K la valeur qu'on obtient, si les intégrales sont étendues à un espace l arbitrairement choisi, qui est entièrement rempli par la masse gazeuse et qui est limité par une surface σ. Je désignerai par a, b, c les angles que les axes des coordonnées forment avec la normale à cette surface menée vers l'extérieur, et je calculerai la valeur de $\frac{dK}{dt}$ au moyen des formules (a_3) et (b'_3). A cet effet, il suffit de multiplier par

$$\delta_0 h_0 \cdot \frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{9[1 + 2\vartheta'(h_0)]}\, s = V^2 \delta_0 s$$

l'équation (a_3), par $\delta_0 u$, $\delta_0 v$, $\delta_0 w$ les équations (b'_3), de prendre la somme des quatre équations et d'intégrer ensuite par rapport à toute l'étendue de l'espace l. On trouve ainsi

$$\frac{dK}{dt} = -V^2 \delta_0 \int (u \cos a + v \cos b + w \cos c)\, s\, d\sigma.$$

Si nous prenons maintenant pour l l'espace entier occupé par le gaz, la surface σ se compose des surfaces σ_c des corps immobiles que nous avons supposés et, à moins que celles-ci n'enveloppent le gaz de tous côtés, d'une surface fermée Σ, située à l'infini. Or, la partie de notre dernière intégrale qui se rapporte aux surfaces σ_c est nulle, parce que $u \cos a + v \cos b + w \cos c$ n'est autre chose que la composante normale de la vitesse (u, v, w), et on peut démontrer que l'intégrale qui est fournie par la surface Σ disparaît également dans tous les cas où le dérangement de l'équilibre a été produit par des causes qui ont agi dans une région finie et depuis un instant qui n'est pas infiniment reculé. Alors, pour une valeur quelconque de t, on aura toujours, à la surface Σ, $u = v = w = 0$ et $s = 0$, dès qu'on a donné à cette surface des dimensions suffisamment grandes.

Déduction plus exacte des équations du mouvement. Frottement intérieur et conductibilité calorifique.

§ 28. Au § 22, nous avons obtenu les équations (a_2), (b_2), (c_2) en négligeant tout à fait la fonction f dans l'expression (7). Maintenant nous allons essayer de pousser l'approximation plus loin, en tenant compte de la circonstance que l'état en un point de la masse gazeuse n'est pas entièrement identique à celui qui existerait si, *dans toute l'étendue de cette masse*, N, h, u, v, w avaient *continuellement* les valeurs qui existent au point et à l'instant considérés. Nous continuerons à admettre, toutefois, que les conditions α, β, γ (§ 14) sont remplies, de sorte que (§ 20) la fonction f est toujours très petite par rapport à $NF_0-(NF_0)_e$.

Nous pouvons de nouveau partir de l'équation (II) (§ 15); à la vérité, quelques termes $\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \text{ etc.}\right)$ y ont été négligés, mais comme ces termes sont très petits en comparaison de ceux que nous avons conservés, l'erreur ainsi commise sur f sera aussi très petite par rapport à cette grandeur, déjà petite elle-même. En d'autres termes, si nous appelons f une grandeur du premier ordre, nous négligerons les grandeurs du second ordre.

Dans l'équation (II), il faut entendre par F_0 l'expression

$$F_0(\xi-u,\ \eta-v,\ \zeta-w,\ E,\ p_1,\ldots p_k,\ h).$$

Si l'on observe qu'en général N, u, v, w, h dépendent de x, y, z, t, on voit que cette équation devient

$$\begin{aligned}
b_1-a_1 = {} & N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} \\
& + F_0(\xi-u,\ldots)\left[\frac{\partial N}{\partial x}\xi + \frac{\partial N}{\partial y}\eta + \frac{\partial N}{\partial z}\zeta + \frac{\partial N}{\partial t}\right] \\
& - N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \xi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta + \frac{\partial u}{\partial t}\right] \\
& - N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta + \frac{\partial v}{\partial t}\right] \\
& - N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta + \frac{\partial w}{\partial t}\right] \\
& + N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial h}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\xi + \frac{\partial h}{\partial y}\eta + \frac{\partial h}{\partial z}\zeta + \frac{\partial h}{\partial t}\right].
\end{aligned} \tag{16}$$

En un point donné du gaz et à un moment donné, le second membre que nous désignerons par χ, peut être regardé comme une fonction connue de ξ, η, ζ, E, $p_1,\ldots p_k$. Quant au premier membre, il faut se rappeler que $(b_1-a_1)\,d\lambda\,dt$ représente, pour l'unité de volume de la masse gazeuse P introduite au § 4, le changement que les chocs produisent, pendant l'intervalle dt, dans le nombre des molécules du groupe défini au § 3. On a, en tous les points du gaz P,

$$F = NF_0(\xi-u,\ldots) + f(\xi,\eta,\zeta,\ldots),$$

avec des valeurs constantes de N, u, v, w, h. Exprimée aussi brièvement que possible, notre équation devient

$$b - a\,[\text{pour } F = NF_0(\xi - u, \ldots) + f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)] = \chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

et il s'agit maintenant d'en déduire f, c'est-à-dire, de déterminer *l'écart* qui doit exister entre l'état du gaz P et l'état stationnaire $NF_0(\xi - u, \ldots)$ pour que le nombre des molécules du groupe considéré éprouve, par suite des chocs, l'accroissement *prescrit* $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\,d\lambda\,dt$.

§ 29. Nous pouvons maintenant faire usage de la circonstance que, sans rien changer aux mouvements relatifs des molécules, on peut donner à l'ensemble du gaz P une vitesse $(-u, -v, -w)$. La fonction fondamentale prend alors une forme nouvelle, qu'on obtient en remplaçant, dans la valeur primitive, ξ, η, ζ par $\xi + u$, $\eta + v$, $\zeta + w$. En outre, dans le nouvel état, le nombre des molécules du groupe ayant pour limites ξ et $\xi + d\xi$, η et $\eta + d\eta$, ζ et $\zeta + d\zeta$, E et $E + dE$, etc. subira, par suite des chocs, un changement égal à celui qu'éprouvait, dans le premier état, le nombre des molécules du groupe ayant pour limites $\xi + u$ et $\xi + u + d\xi$, $\eta + v$ et $\eta + v + d\eta$, $\zeta + w$ et $\zeta + w + d\zeta$, E et $E + dE$, etc. Analytiquement, cela s'exprime par l'équation

$$b - a\,[\text{pour } F = NF_0(\xi, \eta, \zeta, \ldots) + f(\xi + u, \ldots)] = \chi(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \ldots).$$

Donc, si on peut déterminer la fonction $f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ de telle sorte qu'il soit satisfait à l'équation

$$b - a\,[\text{pour } F = NF_0(\xi, \eta, \zeta, \ldots) + f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)] = \chi(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \ldots), \quad (17)$$

— c'est-à-dire, si l'on peut trouver de combien l'état du gaz P doit différer de l'*état de repos* stationnaire $NF_0(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, pour que le nombre des molécules du groupe en question varie d'une manière prescrite, — on aura

$$f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \ldots)$$

et par conséquent

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f'(\xi - u, \eta - v, \zeta - w, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Introduisons ceci dans les équations (8), et remplaçons en même temps, comme au § 21, ξ, η, ζ par $\xi + u$, $\eta + v$, $\zeta + w$. Nous trouvons alors, en écrivant toujours r^2 pour $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$,

$$\int f'(\xi, \eta, \zeta)\,d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta)\,(\xi + u)\,d\lambda$$

$$= \int f'(\xi, \eta, \zeta)\,(\eta + v)\,d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta)\,(\zeta + w)\,d\lambda$$

$$= \int f'(\xi, \eta, \zeta)\,[r^2 + 2(\xi u + \eta v + \zeta w) + (u^2 + v^2 + w^2)]\,d\lambda = 0,$$

d'où l'on voit que la fonction f' doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$\int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, \xi\, d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, \eta\, d\lambda$$
$$= \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, \zeta\, d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, r^2\, d\lambda = 0. \quad (19)$$

§ 30. Une fois la fonction f' trouvée au moyen des équations (17) et (19), voici ce que deviennent les parties accessoires de P_x, etc., que je désignerai par P'_x, etc.

$$\left.\begin{aligned}
&P'_x = \int f' \xi^2 d\lambda,\ P'_y = \int f' \eta^2 d\lambda,\ P'_z = \int f' \zeta^2 d\lambda,\\
&Q'_{xy} = \int f' \xi\eta\, d\lambda,\ Q'_{yz} = \int f' \eta\zeta\, d\lambda,\ Q'_{zx} = \int f' \zeta\xi\, d\lambda,\\
&R' = \int f' \left(\tfrac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda,\\
&S'_x = \int f' \xi \left(\tfrac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda + m(uP'_x + vQ'_{xy} + wQ'_{xz})\\
&\qquad\qquad + u\int f' E\, d\lambda,\\
&S'_y = \int f' \eta \left(\tfrac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda + m(uQ'_{yx} + vP'_y + wQ'_{yz})\\
&\qquad\qquad + v\int f' E\, d\lambda,\\
&S'_z = \int f' \zeta \left(\tfrac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda + m(uQ'_{zx} + vQ'_{zy} + wP'_z)\\
&\qquad\qquad + w\int f' E\, d\lambda,
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

où, comme dans tout ce qui suivra, on doit entendre par f' la fonction $f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$.

Ces formules se déduisent des équations (3), si l'on emploie la même méthode qui nous à servi à obtenir les conditions (19). On a, par exemple,

$$P'_x = \int f' \cdot (\xi + u)^2 d\lambda = \int f' \xi^2 d\lambda + 2u \int f' \xi\, d\lambda + u^2 \int f' d\lambda,$$
$$S'_x = \int f' \cdot (\xi + u) \left\{ \tfrac{1}{2} m r^2 + m(u\xi + v\eta + w\zeta) + \tfrac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) + E \right\} d\lambda,$$

ce qui donne les valeurs que nous venons d'indiquer, lorsqu'on a égard aux équations (19).

En vertu de la dernière de ces conditions, on a

$$P'_x + P'_y + P'_z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

et

$$R' = \int f' E\, d\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

et si ensuite on pose

$$\left.\begin{aligned}(S'_x) &= \int f'\,\xi\left(\tfrac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda,\\ (S'_y) &= \int f'\,\eta\left(\tfrac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda,\\ (S'_z) &= \int f'\,\zeta\left(\tfrac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

on peut écrire

$$S'_x = (S'_x) + m(uP'_x + vQ'_{xy} + wQ'_{xz}) + uR', \text{ etc.} \quad . \quad (24)$$

Notons encore que l'intégrale (S'_x) est impaire par rapport à x, ce qui résulte e. a. de ce que P'_x, v, w, R' sont pairs et $S'_x, u, Q'_{xy}, Q'_{xz}$ impairs. Au contraire, (S'_x) est pair par rapport à y et z. On peut facilement indiquer les propriétés analogues des grandeurs (S'_y) et (S'_z).

Ce sont les intégrales

$$P'_x,\ P'_y,\ P'_z,\ Q'_{xy},\ Q'_{yz},\ Q'_{zx},\ R',\ (S'_x),\ (S'_y),\ (S'_z), \quad . \quad . \quad (25)$$

qu'il s'agira maintenant de déterminer.

§ 31. Si dans l'équation (17) on remet pour χ sa valeur primitive, et que désormais on entend toujours par F_0 la fonction $F_0(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, h)$, on a, pour déterminer f',

$$\begin{aligned} b-a\ [\text{pour } F = NF_0 + f'] &= N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z}\\ &+ F_0\left[\frac{\partial N}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial N}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial N}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial N}{\partial t}\right]\\ &- N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial u}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial u}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial u}{\partial t}\right]\\ &- N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial v}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial v}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial v}{\partial t}\right]\\ &- N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial w}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial w}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial w}{\partial t}\right]\\ &+ N\frac{\partial F_0}{\partial h}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial h}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial h}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial h}{\partial t}\right] \quad . \quad (26)\end{aligned}$$

Le second membre de cette équation peut être notablement simplifié. On y remarquera le groupe de termes

$$\frac{\partial N}{\partial x}u + \frac{\partial N}{\partial y}v + \frac{\partial N}{\partial z}w + \frac{\partial N}{\partial t}$$

et quatre autres groupes qui contiennent sous la même forme les variables u, v, w, h. Pour ces groupes on peut substituer les valeurs qu'on tire des équations (a_2), (b_2) et (c_2) (§ 22). En effet, bien que ces dernières ne soient pas tout-à-fait exactes, elles n'en peuvent pas moins servir à calculer le second membre de (26), qui n'a qu'une faible

valeur. Or, en effectuant cette substitution, on voit disparaître les termes en

$$\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Ceux qui contiennent

$$\frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial N}{\partial z}$$

peuvent être omis, parce que ces dérivées s'y trouvent multipliées par les facteurs

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h}\xi F_0,\quad \frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \frac{3}{h}\eta F_0,\quad \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} + \frac{3}{h}\zeta F_0,$$

(et en outre par le facteur $\frac{1}{3}h$) et que nous savons déjà (§ 18) que des expressions de cette forme ne peuvent avoir aucune influence sur les valeurs de P'_x, etc. En fin de compte et par un arrangement convenable des termes restants, l'équation (26) devient

$$\begin{aligned}
b-a\ &[\text{pour } F = NF_0 + f'] \\
&= N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + N\left(\eta\frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\right)\frac{\partial h}{\partial y} \\
&+ N\left(\zeta\frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial h}{\partial z} \\
&- N\left(\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y} + \xi\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - N\left(\zeta\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial z} + \eta\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&- N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial x} + \zeta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
&- N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&- N\left\{F_0 + \frac{2h}{3[1+2\vartheta'(h)]}\frac{\partial F_0}{\partial h}\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)
\end{aligned}$$

Pour en déduire la fonction f', ou plutôt les valeurs correspondantes des grandeurs (25), nous pouvons chercher (§ 16) les valeurs qui proviennent de différentes parties du second membre et en prendre la somme. Dans ces calculs, on peut de nouveau faire intervenir, comme au § 17, la considération des images par rapport à des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées. Or, non seulement les valeurs de N, h et $\vartheta'(h)$ seront les mêmes en des points correspondants de la masse gazeuse et de son image, mais comme NF_0 est la fonction fondamentale pour un état de repos stationnaire,

$$F_0 \text{ et } \frac{\partial F_0}{\partial \xi},\quad \frac{\partial F_0}{\partial \eta},\quad \frac{\partial F_0}{\partial \zeta}$$

seront en ces points les mêmes fonctions de ξ, η, ζ. En outre, F_0 dépendra, dans le gaz réel et dans son image, de la même manière de la température ou de h; la dérivée $\frac{\partial F_0}{\partial h}$ sera donc, elle aussi, paire par

rapport à chacune des coordonnées. On peut en conclure que la question de savoir si les termes dans le second membre de (27) sont pairs ou impairs par rapport à une des coordonnées devra être décidée par la considération des dérivées de u, v, w, h par rapport aux coordonnées.

§ 32. Dans la décomposition du second membre de l'équation (27), nous nous laisserons guider par la considération de quelques cas simples.

Supposons d'abord le gaz en repos, et admettons que la température, et par conséquent h, soient une fonction de x. Le second membre de (27) devient alors

$$N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial h}+\frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Cette expression étant impaire par rapport à x et paire par rapport à y et z, (S'_x) est la seule des intégrales (25) qui en puisse dépendre. La valeur qu'on trouve pour cette intégrale sera évidemment proportionnelle à $\frac{\partial h}{\partial x}$. Mais, si T est la température, on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}=e\frac{\partial T}{\partial x},$$

où e est pour chaque gaz une constante connue. Par conséquent, (S'_x) est aussi proportionnel à $\frac{\partial T}{\partial x}$ et peut être représenté par

$$-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Le coefficient $\varkappa$ n'est autre chose que le *coefficient de conductibilité calorifique*, ce qui ressort de ce que l'intégrale

$$\int f'\xi\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda$$

représente (exprimé en unités de travail) l'excès de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps et à travers l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à l'axe des x, passe dans le sens des x positifs, sur celle qui passe dans le sens opposé.

Si l'on connaissait la structure des molécules et leur action mutuelle, il y aurait quelque espoir de pouvoir calculer $\varkappa$. A défaut de cette connaissance, tout ce que nous pouvons déduire de nos équations, c'est que le coefficient $\varkappa$, ainsi qu'il a déjà été montré par divers physiciens, est indépendant de la densité.

§ 33. Pour démontrer ce théorème, on peut se baser sur les deux propositions suivantes:

1. Si la fonction fondamentale F est multipliée par un facteur constant n, c'est-à-dire si non seulement la densité totale du gaz, mais aussi la densité de chaque groupe de molécules ayant un état déterminé, deviennent n fois plus grandes, le nombre des rencontres sera multiplié par n^2. Il en sera de même de la valeur de $b-a$.

2. Comme cette dernière grandeur dépend d'une manière linéaire de la fonction accessoire f (§ 15), elle variera dans le rapport de 1 à n, si, en ne changeant rien à la fonction principale, on remplace f par nf.

Cela posé, nous pouvons comparer deux masses gazeuses, qui, en des points correspondants, ont la même température, mais dont la seconde a une densité n fois plus grande que celle de la première. L'équation (27) exige alors que, pour le second gaz, la différence $b-a$ soit n fois plus grande que pour le premier. Or, si l'on passe du premier gaz au second, l'expression NF_0 devient n fois plus grande et si on commence par faire augmenter la fonction accessoire f' dans le même rapport, on obtiendra une valeur de $b-a$, n^2 fois plus grande que dans le premier gaz. Pour ramener cette valeur à ce qu'elle doit être, il suffit, d'après la dernière des propositions précédentes, de changer dans le rapport de n à 1 la fonction accessoire dans le second gaz. Par là elle devient égale à la fonction f' pour le premier gaz, d'où l'on conclut immédiatement à l'égalité des quantités de chaleur transportées et, les chutes de température étant égales, à celle des coefficients de conductibilité.

§ 34. Tout comme le premier terme de (27), on peut traiter les deux suivants. On trouve ainsi que ces trois termes conduisent aux valeurs suivantes de (S'_x), (S'_y), (S'_z):

$$-\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x}, \quad -\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial y}, \quad -\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial z} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

§ 35. Admettons, en second lieu, que le gaz, avec une densité et une témperature uniformes, possède dans le sens de l'axe des x une vitesse d'ensemble dépendant seulement de y. Le second membre de (27) devient alors

$$-N\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Comme il s'agit cette fois-ci d'une fonction qui est impaire par rapport à x et y, paire au contraire par rapport à z, nous n'avons à parler que de l'intégrale Q'_{xy}. Sa valeur, en tant qu'elle dépend de l'expression (30), doit être proportionnelle à $\frac{\partial u}{\partial y}$. Si on la représente par

$$-\frac{\mu}{m}\frac{\partial u}{\partial y},$$

μ sera le *coefficient de frottement.*

En effet, l'expression $m\int f'\xi\eta\, d\lambda$ représente la quantité de mouvement ayant la direction de l'axe des x, qui, par unité de surface et unité de temps, se trouve transportée à travers un plan perpendiculaire à OY; c'est donc bien ce qu'on appelle le frottement entre les couches qui se trouvent des deux côtés de ce plan.

Comme on sait, le coefficient de frottement a, lui aussi, la propriété remarquable d'être indépendant de la densité. On le démontre par le même raisonnement qui nous a servi pour le coefficient de conductibilité.[1])

En traitant de la même manière les autres termes de (27), analogues à

$$-N\eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y},$$

on obtient les parties suivantes de Q'_{xy}, Q'_{yz}, Q'_{zx}:

$$-\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

§ 36. Les termes du second membre de (27) qu'il nous reste à considérer, contiennent un des facteurs

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ces termes sont donc tous pairs par rapport à chacune des coordonnées et parmi les intégrales (25), P'_x, P'_y, P'_z et R' sont les seules auxquelles ils puissent contribuer. Écrivons $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}$ pour la partie de P'_x qui correspond aux termes en $\frac{\partial u}{\partial x}$, et $\omega\frac{\partial v}{\partial y}$ pour celle qui provient des termes en $\frac{\partial v}{\partial y}$. Alors, pour des raisons de symétrie, la partie de P'_x qui dépend de $\frac{\partial w}{\partial z}$ pourra être représentée à l'aide du même coefficient ω et on aura

$$P'_x = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} + \omega\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

et également

$$P'_y = \varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$P'_z = \varepsilon\frac{\partial w}{\partial z} + \omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

expressions qui se simplifient encore si l'on fait attention à la relation (21), cette dernière exigeant que l'on ait

$$\varepsilon = -2\omega.$$

Quant à la valeur (22) de R', elle devra dépendre de la même manière de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial w}{\partial z}$. Par conséquent, si nous posons

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=K,$$

nous pourrons écrire, en désignant par ν un certain coefficient, analogue aux coefficients de conductibilité et de frottement,

$$R' = \nu K.$$

1) Voir la note à la fin de ce mémoire.

§ 37. Le coefficient ω peut être exprimé au moyen du coefficient de frottement μ. Cela provient de ce que le gaz a les mêmes propriétés dans toutes les directions, de sorte que la forme des équations ne doit pas changer par un changement des axes de coordonnées.

Nous pouvons nous borner à remplacer les axes des x et des y par deux autres OX_1 et OY_1, qu'on obtient en faisant tourner OX et OY d'un angle ϑ autour de l'axe OZ, dans une direction telle que OX viendrait à coincider avec OY, si l'angle ϑ était de 90^0. Si l'on distingue par l'indice 1 les nouvelles coordonnées et toutes les grandeurs qui s'y rapportent, on aura

$$\xi = \xi_1 \cos\vartheta - \eta_1 \sin\vartheta, \quad \eta = \xi_1 \sin\vartheta + \eta_1 \cos\vartheta$$

et (§ 9)

$$P_x = \cos^2\vartheta \cdot P_{x_1} - 2\cos\vartheta \sin\vartheta \cdot Q_{xy_1} + \sin^2\vartheta \cdot P_{y_1} \quad . \quad . \quad (31)$$

Or, d'après ce qui a été dit au § 21, les valeurs principales de P_x, P_{x1}, Q_{xy1}, P_{y1} sont

$$\frac{1}{3}Nh + Nu^2,$$

$$\frac{1}{3}Nh + Nu_1^2, \quad Nu_1 v_1, \quad \frac{1}{3}Nh + Nv_1^2.$$

Comme

$$u = u_1 \cos\vartheta - v_1 \sin\vartheta,$$

ces parties principales satisfont à la condition (31). Il faut donc que les parties accessoires le fassent également et que l'on ait

$$P'_x = \cos^2\vartheta \cdot P'_{x_1} - 2\cos\vartheta \sin\vartheta \cdot Q'_{xy_1} + \sin^2\vartheta \cdot P'_{y_1}.$$

Ici, on peut substituer les valeurs

$$P'_x = \omega\left(K - 3\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$P'_{x_1} = \omega\left(K_1 - 3\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right), \quad P'_{y_1} = \omega\left(K_1 - 3\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right),$$

$$Q'_{xy_1} = -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right),$$

en ayant égard aux relations

$$u = u_1 \cos\vartheta - v_1 \sin\vartheta, \quad v = u_1 \sin\vartheta + v_1 \cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos^2\vartheta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) + \sin^2\vartheta \frac{\partial v_1}{\partial y_1},$$

$$K = K_1.$$

On trouve alors la relation annoncée

$$\omega = \frac{2}{3}\frac{\mu}{m}.$$

§ 38. En fin de compte les intégrales (25) prennent les valeurs suivantes:

$$P'_x = \frac{2}{3}\frac{\mu}{m}\left(K - 3\frac{\partial u}{\partial x}\right), \text{ etc.,}$$

$$Q'_{xy} = -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ etc.,}$$

$$R' = \nu K,$$

$$(S'_x) = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x}, \text{ etc.}$$

§ 39. Le coefficient ν, qui n'intervient que dans les gaz polyatomique (car, pour les gaz monoatomiques, E et par conséquent ν sont nuls), est ici introduit pour la première fois. On pourra le mieux se rendre compte de sa signification par les considérations suivantes.

Lorsqu'un gaz se trouve dans un état stationnaire de repos, il existe une certaine relation entre l'énergie A_1 du mouvement de translation des molécules et l'énergie intramoléculaire A_2; pour l'unité de masse, ces énergies sont $\frac{1}{2}h$ et $\vartheta(h)$. Mais il n'en est plus ainsi quand l'état est variable. Si, par exemple, un gaz est comprimé, la vitesse du mouvement des molécules, et par conséquent h, augmentent. Par suite des chocs, A_2 croîtra aussi; toutefois, un certain temps sera nécessaire pour faire acquérir à A_2 la valeur $\vartheta(h)$ qui, dans l'état stationnaire, répondrait à la nouvelle valeur de A_1. *Pendant la compression*, c'est-à-dire tant que h croît, on aura $A_2 < \vartheta(h)$.

Or, c'est là ce qui est indiqué par le coefficient ν. Lors d'une compression, en effet, K a une certaine valeur différente de 0, et $\frac{\nu K}{mN}$ détermine précisément de combien A_2 diffère de $\vartheta(h)$. Comme K est négatif durant la compression, et qu'on doit avoir $A_2 < \vartheta(h)$, il en résulte que la valeur de ν doit être positive.

Malheureusement, une détermination expérimentale du nouveau coefficient ν serait bien difficile. Pour que son influence pût devenir sensible, il faudrait des variations de densité s'effectuant avec beaucoup plus de rapidité que cela n'est le cas dans les expériences ordinaires sur les vibrations sonores.

§ 40. Résumons maintenant ce qui a été trouvé aux §§ 34—38, calculons S'_x, S'_y, S'_z au moyen des formules (24) et réunissons enfin les parties accessoires de P_x etc. aux parties principales qui ont été calculées au § 21. Nous trouvons alors

$$P_x = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}\delta h + \delta u^2 - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu K\right], \text{ etc.,}$$

$$Q_{xy} = \frac{1}{m}\left[\delta uv - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \text{ etc.,}$$

$$R = \frac{1}{2}\delta(u^2+v^2+w^2) + \frac{1}{2}\delta[h + 2\vartheta(h)] + \nu K,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\delta u\left[\frac{5}{3}h + 2\vartheta(h) + (u^2+v^2+w^2)\right] - \frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x} -$$

$$-\mu\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] - 2\mu u\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{2}{3}\mu + \nu\right)uK, \quad \text{etc.}$$

En transportant ces valeurs dans les équations générales (a_1), (b_1), (c_1) (§ 6), on obtient finalement les équations du mouvement. Je n'exécuterai pas ici cette substitution, le résultat en étant très compliqué, et l'étant d'autant plus que, à la rigueur, les coefficients μ, $\varkappa$ et ν doivent être considérés comme des fonctions de h. Je ferai seulement remarquer que, si l'on ne tient pas compte de la variabilité de μ, les équations (b_1) prennent une forme équivalente à celle sous laquelle elles ont été obtenues par Maxwell[1]).

Quand on se borne à un dérangement infiniment petit de l'équilibre, il est permis de regarder μ, $\varkappa$ et ν comme des constantes. Si, en outre, on supprime l'action des forces extérieures, et qu'on introduit, comme au § 22, le signe s pour la condensation, les équations du mouvement deviennent

$$K + \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \qquad \qquad (a_4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}\frac{\partial(h+h_0 s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0}\Delta u - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial x} &= 0,\\ \frac{1}{3}\frac{\partial(h+h_0 s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0}\Delta v - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial y} &= 0,\\ \frac{1}{3}\frac{\partial(h+h_0 s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0}\Delta w - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial z} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (b_4)$$

$$\frac{1}{3}h_0 K + \frac{1}{2}[1 + 2\vartheta'(h_0)]\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\varkappa}{\delta_0 e}\Delta h + \frac{\nu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial t} = 0 \,. \qquad (c_4)$$

Note.

Sur les coefficients de frottement et de conductibilité calorifique.

Même pour un gaz composé de molécules sphériques, parfaitement dures et élastiques, on n'a pas réussi jusqu'ici à calculer d'une manière entièrement satisfaisante les coefficients μ et $\varkappa$. On peut cependant arriver à des conclusions importantes en tirant parti de la comparaison de deux systèmes semblables. On entend par là que, dans le second système, les valeurs des différentes grandeurs qu'il y a lieu de considérer se distinguent des valeurs correspondantes dans le premier sys-

---

1) Voir la formule (128) dans le mémoire cité de Maxwell.

tème par certains facteurs numériques, ces facteurs ou „coefficients de similitude“ étant les mêmes pour toutes les grandeurs de la même espèce, mais variant d'une espèce à l'autre.

Or, après avoir arbitrairement choisi trois nombres α, β et γ, on peut concevoir deux systèmes de molécules sphériques, tels que, pour passer du premier au second, il faut multiplier par α les masses des molécules, par β les longueurs (dimensions et distances des molécules) et par γ les intervalles de temps, ce qui veut dire, que lorsque certaines positions des particules du premier système se succèdent à des intervalles de temps τ, des intervalles $\gamma\tau$ s'écouleront entre les instants auxquels le second système atteindra les positions correspondantes.

Cela posé, on voit immédiatement que le coefficient de similitude est $\frac{\beta}{\gamma}$ pour les vitesses (c'est-à-dire pour les vitesses moléculaires et pour les vitesses d'ensemble u, v, w), $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ pour les quantités de mouvement des molécules, $\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2}$ pour leur énergies cinétiques et pour les températures (puisque l'énergie moyenne d'une molécule est la mesure de la température), $\frac{1}{\gamma}$ pour les dérivées de u, v, w par rapport aux coordonnées et $\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ pour les chutes de température.

Donc, si l'on compare des éléments de surface correspondants, on trouve $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ pour le rapport des quantités de mouvement par lesquelles ils sont traversés pendant des temps correspondants; ce rapport devient $\frac{\alpha}{\beta\gamma^2}$ si, dans les deux cas, on considère le transport de quantité de mouvement ramené à l'unité de surface et l'unité de temps. Enfin, pour obtenir le coefficient de similitude pour les coefficients de frottement μ, il faut diviser ce dernier nombre $\frac{\alpha}{\beta\gamma^2}$ par $\frac{1}{\gamma}$, qui est le facteur relatif aux dérivées de u, v, w par rapport aux coordonnées. On trouvera donc le coefficient de frottement du second gaz en multipliant par $\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ celui du premier.

D'un autre côté, il est clair que le coefficient de frottement, étant indépendant de la densité du gaz, doit être déterminé par le diamètre σ des molécules, leur masse m et la vitesse moyenne v de l'agitation moléculaire. On en déduit facilement que la formule pour μ doit avoir la forme

$$\mu = C\frac{m\mathrm{v}}{\sigma^2},$$

où C est un coefficient numérique qui serait le même pour tous les gaz.

En ce qui concerne la conductibilité de la chaleur, la question est un peu plus compliquée, la valeur du coefficient $\varkappa$ dépendant du choix de l'unité de chaleur et de celle de la température. Il est naturel de

prendre pour la première l'unité de travail. Quant à la seconde, je supposerai pour un moment qu'elle ait une telle grandeur que la valeur numérique ϑ de la température soit égale à celle de l'énergie cinétique moyenne d'une molécule. Alors, le coefficient $\varkappa$ sera, lui aussi, entièrement déterminé par les grandeurs m, σ et v. Même, la masse m ne pourra entrer dans le résultat, parce que le coefficient de similitude est trouvé avoir la valeur $\frac{1}{\beta\gamma}$ pour le coefficient de conductibilité.

La formule pour $\varkappa$ sera donc de la forme

$$\varkappa = C' \frac{\mathrm{v}}{\sigma^2},$$

C' étant un coefficient comparable à C, qu'on pourrait déterminer, s'il était possible de soumettre à un calcul rigoureux les mouvements des sphères élastiques.

La formule deviendra

$$\varkappa = C'n \frac{\mathrm{v}}{\sigma^2},$$

quand on adopte une unité de température n fois plus grande, c'est-à-dire telle que l'énergie moyenne d'une molécule soit représentée, non plus par ϑ lui-même, mais par $n\vartheta$.

L'énergie contenue dans l'unité de masse étant alors

$$\frac{n\vartheta}{m},$$

on voit que $\frac{n}{m}$ n'est autre chose que la chaleur spécifique sous volume constant, que je désignerai par c. On en déduit

$$n = cm$$

et

$$\varkappa = C'c \frac{m\mathrm{v}}{\sigma^2},$$

relation qui restera encore vraie lorsqu'on passe à une unité de chaleur quelconque. En effet, cela fera changer dans le même rapport les valeurs numériques de $\varkappa$ et de c.

Plusieurs physiciens ont donné des valeurs plus ou moins approchées des constantes C et C', mais je crois pouvoir dire que les valeurs exactes sont encore inconnues.

Ajoutons que d'après les formules que nous venons d'obtenir, les coefficients μ et $\varkappa$ seraient proportionnels tous les deux à la racine carrée de la température absolue.

V.

Über die Anwendung des Satzes vom Virial in der kinetischen Theorie der Gase.

(Annalen der Physik und Chemie, 12 [1881], p. 127.)

In seiner bekannten Schrift „Over de continuiteit van den gas-en vloeistoftoestand"[1]) hat Hr. van der Waals die Modifikationen betrachtet, welche in der Beziehung zwischen Volumen, Druck und Temperatur eines Gases einerseits wegen der molekularen Attraktion, anderseits wegen der Größe der Moleküle angebracht werden müssen. Die Berücksichtigung beider Umstände führte ihn zu der Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R(1 + \alpha t), \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo mit p, v, t Druck, Volumen und Temperatur, mit α der Ausdehnungskoeffizient eines idealen Gases, mit R, a und b Konstanten, welche von der Natur des betrachteten Gases abhängen, bezeichnet sind. Es hängt dabei a mit der Attraktion, b mit der Größe der Moleküle zusammen, und zwar bedeutet b das vierfache Molekularvolumen.

Bei der Ableitung dieser Beziehung benutzte van der Waals die sogenannte Gleichung des Virials, wie sie zuerst von Clausius für stationäre Bewegungen eines Molekülsystems angegeben wurde. Diese Gleichung lautet:

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz) = \Sigma \tfrac{1}{2} mu^2, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und bedeuten dabei X, Y, Z die Komponenten der auf ein Molekül mit dem Schwerpunkte (x, y, z) wirkenden Kraft, m die Masse des Moleküls, u die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes, während die Summe beiderseits über sämtliche Moleküle ausgedehnt werden muß.

Wird bei der Berechnung des Virials $-\tfrac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz)$ der wirkenden Kräfte nur der äußere Druck in Betracht gezogen, so erhält man die Grundgleichung für Gase in der einfachen Form $pv = R(1 + \alpha t)$. Berücksichtigt man aber auch das Virial für die anziehenden Kräfte, welche die Moleküle aufeinander ausüben, so findet man zu p die in (1) durch das Glied $\frac{a}{v^2}$ angedeutete Korrektion.

---

1) Siehe die Übersetzung: Van der Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, 2. Aufl., Leipzig, 1899, 1900.

Den Einfluß der Molekulargröße berechnet van der Waals in ganz anderer Weise.[1]) Es diente ihm dazu die Erwägung, daß durch die Ausdehnung der Moleküle der Weg, den sie zwischen aufeinanderfolgenden Zusammenstößen zurücklegen, verkürzt wird, und demzufolge die Anzahl der Stöße gegen die einschließenden Wände und dadurch auch der Druck vergrößert werden.

Diese Abweichung von der zuerst benutzten Behandlungsweise scheint mir nicht notwendig zu sein. Die Gleichung vom Virial ist ganz allgemein, sie gilt auch für Moleküle von merklicher Größe, und man muß also aus derselben auch für Gase mit solchen Teilchen die Beziehung zwischen p, v und t herleiten können. Nur muß man zu diesem Zwecke das Virial sämtlicher Kräfte berücksichtigen, also nicht bloß dasjenige des äußeren Druckes und der Molekularanziehung, sondern auch das Virial der abstoßenden Kräfte, welche die Teilchen während der Zusammenstöße aufeinander ausüben. Die Betrachtung dieses Virials — welches wir kurz das repulsive nennen wollen — muß das Glied b in der Gleichung (1) liefern, wenn dieselbe wirklich richtig ist.

Diese Bemerkung machte schon Maxwell in einer Ankündigung der Arbeit von van der Waals[2]); er teilte dabei das Resultat mit, zu welchem ihn eine Berechnung des repulsiven Virials geführt hatte, und welches nicht mit der Formel (1) übereinstimmte. Ich glaube nun aber nachweisen zu können, daß wirklich, wenigstens bei nicht zu großen Dichtigkeiten des betrachteten Stoffes (und die Berechnung von van der Waals ist an eine ähnliche Beschränkung gebunden) die Betrachtung des Virials zu der mit b bezeichneten Korrektion führt. Angesichts des entgegengesetzten Resultates von Maxwell, und weil auch von anderer Seite die Richtigkeit der Gleichung (1) angezweifelt worden ist, hat die Mitteilung meiner Berechnung vielleicht einiges Interesse.

Ich betrachte dabei die Moleküle als elastische Kugeln vom Durchmesser σ und lasse zunächst — da es sich hauptsächlich um das repulsive Virial handelt — die Anziehung außer Acht, welche sie in der Entfernung aufeinander ausüben. In einem bestimmten Augenblick werden in der betrachteten Gasmenge verschiedene Moleküle im Zusammenstoß begriffen sein, also abstoßende Kräfte erleiden, und es entsteht nun die Aufgabe, für diese das Virial $-\frac{1}{2}\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ zu berechnen; der Kürze wegen soll dasselbe mit dem Buchstaben A bezeichnet werden.

Nimmt man zunächst die Größe $-\frac{1}{2}(Xx+Yy+Zz)$ nur für zwei Moleküle P und Q, welche gegeneinander stoßen, so hat man einmal unter x, y, z die Koordinaten des Mittelpunktes von P, das andere Mal

1) Siehe die soeben zitierte Übersetzung, T. 1, Kap. 6.

2) Maxwell, Van der Waals on the continuity of the gaseous and liquid states, Nature, 10 (1874), p, 477.

diejenigen des Mittelpunktes von Q zu verstehen; da außerdem die Komponenten der auf P und der auf Q wirkenden Kraft gleich und entgegengesetzt sind, so treten in dem Beitrage, den P und Q zu der Größe A liefern, nur die Differenzen der Koordinaten ihrer Mittelpunkte auf, so daß wirklich das gesuchte Virial mit der Größe der Moleküle zusammenhängen wird und bei sehr kleinen Teilchen vernachlässigt werden darf. Unter der Annahme, daß während des Zusammenstoßes die Teilchen nur unmerkliche Gestaltsänderungen erleiden, wird der obengenannte Beitrag $-\frac{1}{2}K\sigma$, wenn K die gegenseitige Abstoßung ist, und man erhält

$$A = -\tfrac{1}{2}\Sigma(K\sigma),$$

wo über alle diejenigen Molekülpaare, welche im betrachteten Augenblick in dem Akt des Zusammenstoßes begriffen sind, summiert werden soll.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob für die Berechnung dieser Summe eine nähere Kenntnis der Art und Weise, wie die Stöße vor sich gehen, erforderlich wäre, da hiervon die Kraft K abhängt, welche zwischen den stoßenden Teilchen wirksam ist. Eine einfache Erwägung zeigt aber, daß man auch ohne diese Kenntnis zu einem Resultat gelangen kann.

Anstatt nämlich den Wert von A für einen bestimmten Moment zu berechnen, können wir auch den Mittelwert für irgend eine Zeit τ bestimmen, wobei wir uns letztere der Dauer eines Zusammenstoßes gegenüber sehr groß denken wollen. Wir setzen also

$$A = -\frac{1}{2\tau}\int \Sigma(K\sigma)\,d\tau = -\frac{\sigma}{2\tau}\int \Sigma(K)\,d\tau.$$

Man sieht nun leicht, daß man hierfür auch schreiben darf

$$A = -\frac{\sigma}{2\tau}\Sigma\left[\int K\,d\tau\right], \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei zunächst für jeden Zusammenstoß, der in der Zeit τ abläuft, das Integral $\int K\,d\tau$ über die ganze Stoßdauer genommen werden soll, um dann weiter für alle diese Stöße die Summe der Werte von $\int K\,d\tau$ zu bilden. Nun ist, unabbängig von der Weise, wie der Stoß vor sich geht, $\int K\,d\tau$ gleich dem Produkte aus der Masse m eines Moleküls und der relativen Geschwindigkeit U_n in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale, mit welcher die Teilchen gegeneinander gestoßen sind. Es wird demzufolge

$$A = -\frac{m\sigma}{2\tau}\Sigma(U_n).$$

Um nun $\Sigma(U_n)$ finden zu können, muß man die verschiedenen Zusammenstöße je nach den Umständen, unter welchen sie geschehen,

in Gruppen ordnen und für jede dieser Gruppen die Anzahl der Stöße in der Zeit τ kennen.

Streng genommen müßte man also hier eine Korrektion anbringen, wie sie von van der Waals angegeben wurde; man hätte nämlich bei Berechnung der Stoßzahl die Größe der Moleküle zu berücksichtigen. Die Aufgabe vereinfacht sich aber, sobald man es nur mit einem kleinen Einflusse des repulsiven Virials oder der Molekulargröße zu tun hat und sich mit einer Korrektion erster Ordnung begnügt. Man wird dann bei der Bestimmung des kleinen repulsiven Virials die Stoßzahl anwenden können, wie sie ohne die besprochene Korrektion berechnet wird; letztere würde ja in dem Ausdrucke für das Virial nur zu Gliedern höherer Ordnung führen. Demgemäß berechnen wir im Folgenden die Stoßzahl, wie es gewöhnlich in derartigen Betrachtungen geschieht.

Es sei mit $f(u)du$ die Anzahl der im Gasvolumen v enthaltenen Teilchen bezeichnet, deren Geschwindigkeit zwischen den Werten u und $u + du$ liegt. Man betrachte weiter zunächst diejenigen Stöße, wobei die Geschwindigkeit des einen Teilchens zwischen u und $u + du$, die des zweiten zwischen u' und $u' + du'$, der Winkel zwischen den beiden Geschwindigkeiten zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ und endlich der (spitze) Winkel, den die relative Geschwindigkeit U mit der gemeinschaftlichen Normale bildet, zwischen χ und $\chi + d\chi$ liegt. Die Anzahl dieser Stöße während der Zeit τ ist[1])

$$\frac{\pi \sigma^2 \tau}{v} f(u)\, du\, f(u')\, du'\, U \sin\varphi\, d\varphi \sin\chi \cos\chi\, d\chi. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

1) Um zu diesem Ausdruck zu gelangen, fassen wir von den $f(u)du$ Molekülen ein beliebiges P ins Auge, das sich in der Richtung h bewegen möge, und beschreiben mit den halben Scheitelwinkeln φ und $\varphi + d\varphi$ zwei Kreiskegel, welche ihre Spitze in einem beliebigen Punkte O und ihre Achsen in der Richtung h haben; überdies legen wir um O als Mittelpunkt eine Kugelfläche vom Radius 1. Das ringförmige Element, welches die beiden Kegel aus dieser Kugel herausschneiden, hat die Größe $\omega = 2\pi \sin\varphi\, d\varphi$. Da nun die $f(u')du'$ Teilchen, deren Geschwindigkeiten zwischen den Grenzen u' und $u' + du'$ liegen, sich nach allen Richtungen in gleichem Maße bewegen, so beträgt die Anzahl derselben, deren Bewegungsrichtung einen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ mit h bildet,

$$n = \frac{\omega}{4\pi} f(u')\, du' = \tfrac{1}{2} \sin\varphi\, d\varphi\, f(u')\, du'.$$

In Bezug auf diese hat das Molekül P die relative Geschwindigkeit U, deren Größe im Text angegeben wird, und die gesuchte Stoßzahl hat offenbar dieselbe Größe, als ob die $f(u)du$ Teilchen sich sämtlich mit der Geschwindigkeit U in irgend einer gemeinsamen Richtung k bewegten, in einem Raume, der pro Volumeneinheit $\frac{n}{v}$ ruhende Teilchen Q enthielte.

Wir legen senkrecht zu der Richtung k, in der Entfernung $U\tau$ voneinander, zwei Ebenen E_1 und E_2, von welchen E_1 zuerst von den sich bewegenden Teilchen erreicht werden möge; ohne an der Stoßzahl etwas zu ändern, können wir uns denken, daß alle die $f(u)du$ Teilchen dies in demselben Augenblick tun. Wir

Bei jedem derselben ist die früher eingeführte Größe $U_n = U\cos\chi$, und indem man diese mit (4) multipliziert, erhält man (da $U^2 = u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varphi$ ist) folgenden Beitrag zu $\Sigma(U_n)$:

$$\frac{\pi\sigma^2\tau}{v} f(u)\,du\,f(u')\,du'\,(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\sin\chi\cos^2\chi\,d\chi. \quad (5)$$

Man findet hieraus die ganze Summe $\Sigma(U_n)$, wenn man nach χ, φ, u' und u integriert, wobei die Grenzen für $\chi: 0$ und $\frac{1}{2}\pi$, für $\varphi: 0$ und π, für u' und $u: 0$ und ∞ sind. Nur ist dabei noch zu bemerken, daß man bei dieser Integration jeden Zusammenstoß doppelt mitzählt, und daß man also nur die Hälfte des Resultates nehmen muß. Damit wird schließlich

$$A = -\frac{\pi m\sigma^3}{4v}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(u)\,du\,f(u')\,du'(u^2+u'^2-2uu'\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\sin\chi\cos^2\chi\,d\chi$$

$$= -\frac{\pi m\sigma^3}{6v}\int_0^\infty\int_0^\infty (u^2 + u'^2) f(u) f(u')\,du\,du'.$$

Ist nun N die Anzahl der Moleküle in dem Volumen v, $\overline{u^2}$ ihr mittleres Geschwindigkeitsquadrat, so ist

$$\int_0^\infty f(u)\,du = \int_0^\infty f(u')\,du' = N,$$

$$\int_0^\infty u^2 f(u)\,du = \int_0^\infty u'^2 f(u')\,du' = N\overline{u^2},$$

---

denken uns ferner einen geraden Zylinder, dessen Grundflächen in E_1 und E_2 liegen und die Größe S haben. Um den Mittelpunkt eines jeden in diesem Zylinder liegenden Moleküls Q legen wir eine Kugel vom Radius σ und schneiden aus der nach E_1 gewandten Hälfte derselben ein ringförmiges Element mit Hilfe zweier Kreiskegel, die ihre Spitze im Mittelpunkt, ihre Achsen in der Richtung k und die halben Scheitelwinkel χ nnd $\chi + d\chi$ haben; endlich projizieren wir alle derartigen Elemente auf E_1. Die Größe jedes Ringes in der Projektion ist dann

$$\omega' = 2\pi\sigma^2\sin\chi\cos\chi\,d\chi$$

und die Anzahl dieser Elemente

$$n' = \frac{n}{v}US\tau.$$

Da nun der Mittelpunkt eines der sich bewegenden Teilchen eins der ringförmigen Elemente in der Ebene E_1 treffen muß, wenn das Molekül, während es die Schicht E_1E_2 durchläuft, einen Zusammenstoß der verlangten Art erleiden soll, so erhält man die Zahl der Stöße, wenn man die Gesamtzahl $f(u)\,du$ der betrachteten Moleküle mit dem Bruch multipliziert, welcher angibt, ein wie großer Teil der Ebene S von den Projektionen der ringförmigen Elemente eingenommen wird. Wir sehen ab von dem Fall, daß zwei Projektionen sich teilweise übereinander lagern, und finden somit für jenen Bruch $\frac{n'\omega'}{S}$, woraus sich der Ausdruck (4) leicht ableiten läßt.

und daraus folgt

$$A = -\frac{\pi m \sigma^3}{3v} N^2 \overline{u^2}.$$

Dies ist das Virial der abstoßenden Kräfte. Addiert man es zu dem des äußeren Druckes, welches den Wert $\frac{3}{2} pv$ hat, so gibt die Gleichung (2)

$$\frac{3}{2} pv - \frac{\pi m \sigma^3}{3v} N^2 \overline{u^2} = \Sigma \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} m N \overline{u^2},$$

oder

$$pv = \frac{1}{3} m N \overline{u^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\pi \sigma^3 N}{v}\right).$$

Nun ist $\frac{2}{3} \pi \sigma^3 N$ das vierfache Molekularvolumen, also was van der Waals b nennt. Es wird demnach

$$pv = \frac{1}{3} m N \overline{u^2} \left(1 + \frac{b}{v}\right),$$

oder, wenn man

$$\frac{1}{1 + \frac{b}{v}} = 1 - \frac{b}{v}$$

setzt, was wir um so eher tun dürfen, als die ganze Rechnung doch nur bis auf Größen der ersten Ordnung $\left(\text{wie } \frac{b}{v}\right)$ genau ist,

$$p(v - b) = \frac{1}{3} m N \overline{u^2} = R(1 + \alpha t), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

was genau mit dem Resultate von van der Waals übereinstimmt.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß, wenn die Moleküle sich nicht wie elastische Kugeln von unveränderlicher Größe verhalten, wenn die Entfernung ihrer Schwerpunkte vielmehr während der Abstoßung variiert, dennoch die Gleichung (6) gelten wird, wenn man nur in $b = \frac{2}{3} \pi \sigma^3 N$ unter σ eine gewisse mittlere Entfernung versteht.

Der Vollständigkeit wegen habe ich das repulsive Virial auch für eine Mischung zweier Gase berechnet; aus dem Resultate kann man die Beziehung zwischen p, v und t für ein derartiges Gemisch ableiten, und die Vergleichung derselben mit den Beobachtungen könnte vielleicht etwas über die gegenseitige Einwirkung verschiedenartiger Gasmoleküle lehren.

Es seien m_1 und m_2 die Massen der Moleküle der beiden Gase, σ_1 und σ_2 ihre Durchmesser, und es bezeichne σ den Abstand, den die Zentra zweier verschiedenartiger Moleküle bei einem Zusammenstoße voneinander haben. Verhalten sich die Moleküle wirklich wie elastische Kugeln, so ist $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$; sind aber σ_1, σ_2 und σ gewisse mittlere Entfernungen der Schwerpunkte während der Zusammenstöße, so braucht diese Beziehung nicht zu bestehen.

Das repulsive Virial besteht nun aus drei Teilen. Der erste A_1 gehört zu den Stößen der Teilchen erster Art; ebenso der zweite Teil A_2

zu den Stößen zwischen den Molekülen des zweiten Gases; diese beiden Größen lassen sich ganz wie früher A berechnen. Werden mit N_1 und N_2 die Molekülzahlen der beiden Gase (im Volumen v), mit $\overline{u_1^2}$ und $\overline{u_2^2}$ die mittleren Geschwindigkeitsquadrate bezeichnet, so wird

$$A_1 = -\frac{\pi m_1 \sigma_1^3}{3v} N_1^2 \overline{u_1^2}, \qquad A_2 = -\frac{\pi m_2 \sigma_2^3}{3v} N_2^2 \overline{u_2^2}.$$

Der dritte Teil des Virials rührt von den Stößen her, welche zwischen verschiedenartigen Teilchen stattfinden. Man hat für denselben zunächst die mit (3) übereinstimmende Formel

$$A_3 = -\frac{\sigma}{2\tau} \Sigma \left[\int^{\tau} K d\tau \right],$$

und weiter, da für die hier betrachteten Stöße

$$\int K d\tau = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} U_n$$

ist,

$$A_3 = -\frac{m_1 m_2 \sigma}{(m_1 + m_2)\tau} \Sigma(U_n).$$

Ist nun die Anzahl der Moleküle (im Volumen v), deren Geschwindigkeit zwischen u und $u + du$ liegt, für das erste Gas $f_1(u)\,du$, für das zweite $f_2(u)\,du$, so liefern die Stöße, bei welchen die Geschwindigkeit des Teilchens erster Art zwischen u und $u + du$ liegt, die des zweiten Moleküls zwischen u' und $u' + du'$, und die übrigens unter den auch früher eingeführten beschränkenden Umständen vor sich gehen, für $\Sigma(U_n)$ den Anteil

$$\frac{\pi \sigma^2 \tau}{v} f_1(u)\,du\, f_2(u')\,du'(u^2 + u'^2 - 2uu' \cos\varphi) \sin\varphi\, d\varphi \sin\chi \cos^2\chi\, d\chi.$$

Diesen Ausdruck muß man wie früher (5) integrieren; nur darf jetzt nicht mehr mit 2 dividiert werden. Schließlich wird

$$A_3 = -\frac{2\pi m_1 m_2 \sigma^3}{3(m_1 + m_2)v} N_1 N_2 (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2}).$$

Nach einem bekannten Satze ist für die Mischung zweier Gase $m_1 \overline{u_1^2} = m_2 \overline{u_2^2}$; daraus folgt auch für die in A_3 vorkommende Größe $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2})$ der nämliche Wert. Das gesamte repulsive Virial wird demnach

$$A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{\pi m_1 \overline{u_1^2}}{3v} [\sigma_1^3 N_1^2 + \sigma_2^3 N_2^2 + 2\sigma^3 N_1 N_2]$$

und die Gleichung (2) liefert

$$\frac{3}{2} pv - \frac{\pi m_1 \overline{u_1^2}}{3v} [\sigma_1^3 N_1^2 + \sigma_2^3 N_2^2 + 2\sigma^3 N_1 N_2] = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 (N_1 + N_2).$$

Das Resultat läßt sich wieder auf die Form (6) bringen, wenn man

$$b = \frac{\frac{2}{3}\pi [\sigma_1^3 N_1^2 + \sigma_2^3 N_2^2 + 2\sigma^3 N_1 N_2]}{N_1 + N_2}$$

setzt. Diese Größe ist also jetzt nicht mehr das vierfache Molekularvolumen, sogar nicht, wenn man $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ setzt.[1])

Zum Schluß sei mir noch eine Bemerkung über die zwischen den Molekülen tätigen anziehenden Kräfte gestattet. Wenn man in die Gleichung (2) auch das dazu gehörige Virial einführen will, so gelangt man nur unter einer speziellen, von van der Waals stillschweigend gemachten Voraussetzung zu der Gleichung (1).

Man kann sich um irgend ein Gasmolekül P eine Kugel mit so großem Radius gelegt denken, daß nur die innerhalb derselben liegenden Teilchen eine merkliche Anziehung auf P ausüben. Die erwähnte Voraussetzung besteht darin, daß sich innerhalb dieser Wirkungssphäre sehr viele Moleküle befinden, und daß das Wirkungsgesetz der Anziehung der Art sei, daß, welche zufällige Anordnung diese Teilchen auch haben mögen, dennoch ohne merklichen Fehler die Kugel als mit homogener Materie gefüllt angesehen werden dürfe, und also auf P keine Kraft wirke. Aus dieser Voraussetzung folgt erstens, daß die Geschwindigkeit zwei zusammentreffender Teilchen vor dem Stoß durch die Anziehung nicht merklich vergrößert worden ist, und daß man also bei der Berechnung des repulsiven Virials annehmen darf, daß die Moleküle mit den gleichen Geschwindigkeiten, die sie in den freien Teilen ihrer Bahn besitzen, auch gegeneinander stoßen. Zweitens folgt aus der genannten Annahme, daß nur auf die Teilchen einer dünnen Grenzschicht eine nach innen gerichtete Attraktion wirkt; der hieraus entspringende Molekulardruck liefert eben das Glied $\frac{a}{v^2}$ in der Gleichung (1).

Es ist nun aber leicht einzusehen, daß die erwähnte Voraussetzung nicht immer erfüllt sein wird. Bei genügend weit getriebener Verdünnung wird einmal die Entfernung der Moleküle so groß werden, daß innerhalb der Wirkungssphäre eines Moleküls nur eine geringe Anzahl anderer Teilchen liegt, und in diesem Falle wird man nicht mehr ohne weiteres sagen können, daß auf ein Molekül im Innern der Gasmasse keine Kraft wirke. Einerseits wird dann die Berechnung des Virials der anziehenden Kräfte viel schwieriger, anderseits wird man auch die Beschleunigung der Teilchen von dem Stoß und die daraus hervorgehende Vergrößerung des repulsiven Virials berücksichtigen müssen. Ohne auf diesen, wie mir scheint, sehr schwierigen Punkt weiter einzugehen, bemerke ich noch, daß nach den von van der Waals abgeleiteten Zahlen der hervorgehobene Umstand bereits bei ziemlich großen Dichtigkeiten eintreten muß. Van der Waals berechnet zunächst[2]) eine

1) Van der Waals (Arch. néerl., **12**, p. 217) hat für eine Mischung zweier Gase eine ähnliche Berechnung der mittleren Weglänge ausgeführt wie für ein einzelnes Gas. Das von ihm erhaltene Resultat würde zu einem anderen Wert von b führen, als ich oben erhielt. 2) Die Kontinuität usw., I., p. 114.

Länge x_1, die zwar kleiner als der Radius der Wirkungssphäre, aber wahrscheinlich doch nicht vielemal kleiner ist; für verschiedene Flüssigkeiten schwankt sie zwischen 0,000 0002 und 0,000 0003 mm. Ferner wird für die mittlere Entfernung der Moleküle eines Gases unter Atmosphärendruck und bei 0° 0,000 0025 mm gefunden.[1]) Diese Zahlen machen es wahrscheinlich, daß sogar unter den zuletzt genannten Umständen die um ein Molekül gelegte Wirkungssphäre nur wenige Teilchen enthält, und van der Waals folgert denn auch selbst aus den Werten von x_1, daß die Anziehung zweier Moleküle sich hauptsächlich im Momente der Berührung äußere.

Bei der Schwierigkeit des Gegenstandes konnte zunächst wohl kein anderer Weg, als der von van der Waals gewählte, eingeschlagen werden; immerhin bleibt, wie mir scheint, die Möglichkeit bestehen, daß die genaue Berücksichtigung aller Umstände, namentlich für sehr verdünnte Gase, zu einem von (1) abweichenden Resultate führen wird.

Nachtrag.

(Annalen der Physik und Chemie, 12 [1881], p. 660.)

Obgleich die Berechnung des repulsiven Virials für größere Dichtigkeiten des betrachteten Stoffes sehr schwierig ist, so läßt sich doch etwas über die Form, welche das Resultat annimmt, aussagen. Die Größe $\frac{A}{m} = -\frac{\sigma}{2\tau}\Sigma(U_n)$ kann nämlich[2]) nur von dem Volumen v des Gases, dem vierfachen Molekularvolumen b, der Molekülzahl N und dem mittleren Geschwindigkeitsquadrate $\overline{u^2}$ abhängen, da durch diese Größen das System elastischer Kugeln vollkommen bestimmt ist. Eine einfache Erwägung zeigt nun erstens, daß bei gleichbleibenden v, b und N die Größe $\frac{A}{m}$ proportional mit $\overline{u^2}$ variiert. Läßt man zweitens bei konstantem $\overline{u^2}$ die Größen v, b und N auf das q-fache wachsen (d. h. betrachtet man von dem nämlichen Stoffe ein q-mal größeres Volumen), so wird auch $\frac{A}{m}$ q-mal größer. Drittens kann man den betrachteten Stoff P mit einem zweiten Q vergleichen, dessen Konfiguration in jedem Augenblicke der von P ähnlich ist, und zwar so, daß alle Dimensionen (auch die der Moleküle) in dem zweiten Körper r-mal größer als in P sind. Dann hat in beiden Systemen N denselben Wert, v und b sind in Q r^3-mal größer und $\overline{u^2}$ ist r^2-mal größer als in P (soll nämlich für jede Zeit die Ähnlichkeit der Konfigurationen bestehen, so müssen sich die Geschwindigkeiten wie $1:r$ verhalten).

---

1) Die Kontinuität usw., I, p. 119. 2) Siehe oben, p. 116.

Da weiter in P und Q gleich viel Stöße eintreten, so verhalten sich die Werte von $\frac{A}{m}$ wie die Werte von σU_n für zwei korrespondierende Stöße, also wie 1 zu r^2.

Aus diesen Sätzen läßt sich ableiten, daß

$$\frac{A}{m} = N\overline{u^2} F\left(\frac{b}{v}\right)$$

sein muß, wo mit F eine unbekannte Funktion bezeichnet ist. Die Beziehung zwischen p, v und $\overline{u^2}$ wird daher schließlich

$$pv = \tfrac{1}{3} m N\overline{u^2}\left[1 - 2F\left(\frac{b}{v}\right)\right].$$

Zu dieser Berechnung veranlaßte mich eine Besprechung mit Hrn. Kamerlingh Onnes in Delft, der durch derartige Betrachtungen über zwei ähnliche Molekülsysteme, jedoch ohne Einführung des Virials, eine gleichbedeutende Gleichung abgeleitet hat. Er hat diese dann weiter benutzt[1]) zur Erklärung der Analogien in dem Verhalten verschiedener Stoffe, welche van der Waals neuerdings hervorgehoben hat.[2])

Man kann sich bei nicht zu großen Werten von $\frac{b}{v}$ die Funktion $F\left(\frac{b}{v}\right)$ nach den aufsteigenden Potenzen dieser Größe entwickelt denken. Der Nutzen des Satzes vom Virial besteht nun eben darin, daß er den Wert des ersten Gliedes in der Entwicklung $\left(\text{nämlich } -\frac{1}{2}\frac{b}{v}\right)$ liefert.

Es ist mir nicht gelungen, das zweite Glied der Reihe zu berechnen. Man könnte versuchen, dasselbe zu bestimmen, indem man bei der Berechnung von $\Sigma(U_n)$ an die Stoßzahl die van der Waals'sche Korrektion anbringt. Soll indes die Theorie genau sein, so muß man für jede Art der Zusammenstöße die dazu gehörige Korrektion einführen, und dadurch wird die Rechnung sehr erschwert.

---

1) H. Kamerlingh Onnes, Théorie générale de l'état fluide, Arch. néerl., 30 (1897), p. 101.

2) Die Kontinuität usw., T. 1, Kap. 12.

VI.

Über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft unter Gasmolekülen.

(Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien, 2. Abt., 95 [1887], p. 115.)[1]

I. Über die Umkehrung der Zusammenstöße.

§ 1. In den Betrachtungen des Herrn Boltzmann über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen[2]) wird folgender Satz angewandt: Wenn durch einen Zusammenstoß zwei Moleküle, welche die Bewegungszustände A und B haben, die Bewegungen A' und B' annehmen, so können auch umgekehrt durch einen Stoß zwei Teilchen von den Bewegungszuständen A' und B' zu A und B übergehen.

Dieser Satz scheint mir nicht allgemein gültig zu sein. Zwar kann die Bewegung eines Systems, zwischen dessen Teile nur von der Entfernung abhängige Anziehungen oder Abstoßungen wirken, wenn sie in der einen Richtung möglich ist, auch in der entgegengesetzten Richtung vor sich gehen; man hat sich nur zu denken, daß plötzlich alle Geschwindigkeiten umgekehrt werden. Demgemäß können wir, wenn wir nach einem Stoße die Geschwindigkeiten der Punkte zweier Moleküle umkehren, diese letzteren wieder gegeneinander laufen lassen und einen „umgekehrten" Stoß erhalten. Allein dabei nehmen die Moleküle nicht wieder die Bewegungszustände an, welche sie vor dem ursprünglichen Stoße hatten, sondern andere, welche sich von jenen durch die entgegengesetzte Richtung aller Geschwindigkeiten unterscheiden.

Um dieses kurz auszudrücken, will ich jeden Bewegungszustand durch einen Buchstaben andeuten, und einen Zusammenstoß so bezeichnen, daß ich vor und hinter das Zeichen $\longrightarrow$ die Symbole der Bewegungen schreibe, welche die Teilchen vor und nach dem Stoße haben.

Ein wirklich stattfindender Stoß sei dann

$$[A, B] \rightarrow [A', B'] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn man den Bewegungszustand, der aus A durch Umkehrung aller Geschwindigkeiten entsteht, mit $A\,(-)$ bezeichnet, so wird das

1) Mit einigen Abänderungen.

2) Siehe die oben, p. 73, zitierten Abhandlungen und außerdem: Boltzmann, Über das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äußere Kräfte wirken, Wien. Sitzber., 2. Abt., 72 (1875), p. 427.

Symbol für den Stoß, den man aus (1) erhält, indem man die Bewegungen rückläufig macht

$$[A'(-), B'(-)] \rightarrow [A(-), B(-)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In den Abhandlungen von Boltzmann ist indes nicht von diesem Stoße die Rede, sondern von

$$[A', B'] \rightarrow [A, B] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diesen Zusammenstoß werde ich im folgenden das umgekehrte von (1) nennen.

§ 2. Um der Frage nach der Möglichkeit der Stöße (3) näher zu zu treten[1]), betrachte ich einen speziellen Fall. Ich setze nämlich die Moleküle als glatte, starre, vollkommen elastische Körper von beliebiger Gestalt voraus. Ein solches Molekül wird, solange es frei ist, neben der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes eine rotierende Bewegung um diesen Punkt haben, welche ich kurz eine Poinsot'sche Bewegung nennen will. Beide Bewegungen zusammen bestimmen das, was ich die Bewegungsart des Moleküls nenne; dagegen beziehe ich das Wort Bewegungszustand auf augenblickliche Zustände, so daß bei jeder Bewegungsart eine Reihe von Bewegungszuständen durchlaufen wird, welche man auch als Phasen bezeichnen kann.

Wenn von der Lage eines Moleküls die Rede ist, meine ich damit die Weise, wie dasselbe gerichtet ist, abgesehen von dem Orte des Schwerpunktes.

Die Bewegungsgrößen der verschiedenen Teile eines Moleküls setze ich, indem ich sie nach dem Schwerpunkte verlege, zu einer resultierenden Bewegungsgröße und einem Moment zusammen. Stoß (Momentankraft) nenne ich das Zeitintegral der Kraft, welche ein Molekül während der Begegnung mit einem zweiten erleidet; indem wir diesen Stoß auch nach dem Schwerpunkte versetzen, erhalten wir ein Stoßpaar mit einem bestimmten Momente, das wir auch kurz das Moment des Stoßes nennen können. Natürlich setzt sich der Stoß mit der resultierenden Bewegungsgröße, wie sie vor der Begegnung war, und ebenso das Moment des Stoßes mit dem Momente der Bewegungsgrößen zusammen.

Die Poinsot'sche Bewegung eines Moleküls ist durch das Moment der Bewegungsgrößen und die kinetische Energie der Rotation bestimmt.[2])

1) Mein Kollege Herr Kamerlingh Onnes machte mich zuerst auf diese Frage aufmerksam.

2) Ist nämlich E diese Energie, K das Moment der Bewegungsgrößen, so bestimmt der Ausdruck $\frac{\sqrt{2E}}{K}$ die Entfernung vom Schwerpunkte für die Ebene, welche fortwährend durch das Zentralellipsoid berührt wird.

Der Effekt eines Zusammenstoßes läßt sich in der Weise bestimmen, daß man zunächst die Intensität des Stoßes als Unbekannte einführt, mittels derselben die neuen Bewegungszustände berechnet und nachträglich die Unbekannte aus der Bedingung bestimmt, daß die gesamte kinetische Energie der beiden Moleküle durch die Wechselwirkung nicht geändert wird.

§ 3. Die Frage, ob der umgekehrte Stoß (3) möglich sei, kann man sich stellen, sowohl wenn man unter A, B, A', B' Bewegungszustände, als auch wenn man darunter Bewegungsarten versteht. Ich wähle die letztere Auffassung; erscheint dabei der Stoß unmöglich, so ist er es ebenso, wenn man mit A usw. Bewegungszustände meint.

Es möge also ein Molekül durch einen Stoß von der Bewegungsart A zu der Bewegungsart A' übergehen. In dem Momente, in welchem der Stoß stattfindet, habe dasselbe die in Fig. 1 durch den Durchschnitt P mit der Ebene QZZ' angedeutete Lage; Q sei der getroffene Punkt der Oberfläche des Teilchens, V die Berührungsebene in Q, Z der Schwerpunkt, Z' dessen Projektion auf V, F der Stoß, der natürlich normal zu V ist, mithin $F \times QZ'$ das Moment desselben. Wenn es nötig ist, unterscheide ich die beiden Punkte, den einen auf der Oberfläche des Moleküls, den anderen in der Ebene V, welche in Fig. 1 zusammenfallen, als Q_m und Q_v. Die Gerade ZZ' wird auch LL genannt werden.

Wir fragen nun, ob es möglich ist, daß das Molekül, wenn es die neue Bewegungsart A' hat, durch einen Stoß zu der ursprünglichen Bewegungsart zurückkehrt. Soll das der Fall sein, so müssen durch diesen Stoß die resultierende Bewegungsgröße, das Moment der Bewegungsgrößen und die kinetische Energie Veränderungen erleiden, welche den durch den Stoß F bewirkten gerade entgegengesetzt sind. Wir wollen uns mit der Energie vorläufig nicht beschäftigen. Damit für die beiden anderen Größen die Änderungen denen in Fig. 1 entgegengesetzt werden, muß zunächst bei dem umgekehrten Vorgange der Stoß wieder die Intensität F haben, aber entgegengesetzt wie in jener Figur gerichtet sein. Wenn wir an dem Punkt der Oberfläche, der von dem Stoße $-F$ getroffen wird, eine Tangentialebene legen, so muß diese die Richtung von V haben; wir können sogar, da ein Molekül von bestimmtem Bewegungszustande den Stoß $-F$ empfangen kann, während sich sein Schwerpunkt an jedem beliebigen Orte befindet, annehmen, daß das Teilchen im Momente des Stoßes $-F$ die Ebene V wieder in dem Punkte Q_v berührt. Nur muß dann das Molekül nicht liegen wie in Fig. 1, sondern an der anderen (negativen) Seite von V, und soll nun noch das Moment des Stoßes dem Momente in dieser Figur gleich und entgegengesetzt sein, so muß der Schwerpunkt (Fig. 2) wieder in derselben Geraden LL liegen, wie in Fig. 1.

§ 4. Nicht in jeder Lage kann das Molekül die Ebene V an der negativen Seite in Q_v berühren, so daß gleichzeitig der Schwerpunkt in LL fällt. Denn der Punkt seiner Oberfläche, welcher Berührungspunkt werden soll, muß der Bedingung genügen, daß die Normale in demselben einen bestimmten Abstand ($= Q_v Z'$) zu Z hat. Alle Punkte der Oberfläche, welche diese Eigenschaft haben, liegen in einer Kurve (oder in einem System zweier oder mehrerer Kurven). Jeden Punkt davon kann man zum Berührungspunkt machen; hat man aber einen bestimmten Punkt gewählt, so kann das Molekül nur noch in einer Weise in die Lage der Fig. 2 gebracht werden. Indem man nach und nach jeden Punkt der Kurve zum Berührungspunkt mit V macht, erhält man eine ganze Reihe von Lagen, in welchen der Stoß $-F$ in der erforderlichen Weise geschehen kann. Läßt man das Teilchen, während man den Schwerpunkt festhält, alle diese Lagen durchlaufen, so wird irgend eine im Molekül durch Z gezogene Gerade, etwa eine der Trägheitsachsen, eine Kegelfläche beschreiben, welche zur Versinnlichung der Reihenfolge der erwähnten Lagen dienen kann. Man muß dabei beachten, daß, sobald die eine Trägheitsachse mit einer bestimmten Linie der Kegelfläche zusammenfällt, auch die anderen Achsen ganz bestimmte Richtungen haben müssen. Wenn zwei oder mehr Kurven der genannten Art auf der Oberfläche des Moleküls gezogen werden können, besteht auch der Kegel aus mehreren Teilen.

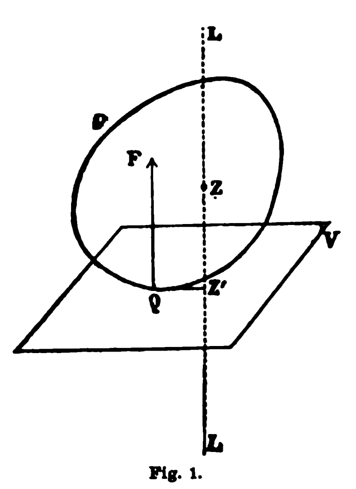


Fig. 1.

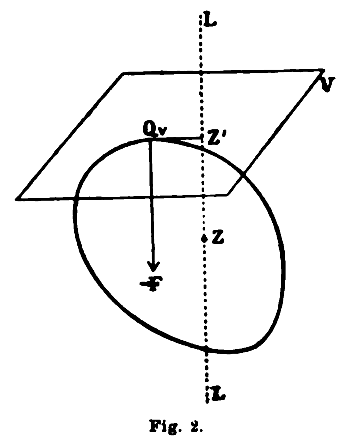


Fig. 2.

Zu den für den Stoß $-F$ geeigneten Lagen gehört in der Regel die Lage P nicht; denn wenn man in Fig. 1 das Molekül in der Richtung von LL nach der negativen Seite von V verschiebt, so wird, besondere Gestalten der Oberfläche ausgenommen, Q_v nicht mehr Berührungspunkt werden können.

Wohl gehört zu den geeigneten Lagen eine andere, welche man aus P erhält, wenn man dem Molekül um die Achse QZ' eine Drehung von 180° gibt. Diese neue Lage ist in Fig. 2 gezeichnet und wird mit P' angedeutet werden.

Welche die übrigen für den Stoß geeigneten Lagen sind, das hängt ganz von der Gestalt der Oberfläche des Moleküls ab.

§ 5. Bei der Poinsot'schen Bewegung A, welche das Teilchen vor dem Stoße F ausführte, durchlief es eine bestimmte Reihe von Lagen; ebenso bei der Bewegung A'. Soll nun das Molekül durch den Stoß $-F$ von der Bewegungsart A' zu A zurückkehren, so muß dieser Stoß bei einer Lage geschehen, welche die beiden Bewegungen miteinander gemein haben; außerdem muß diese Lage zu den oben betrachteten für den Stoß geeigneten gehören. Wird diesen verschiedenen Bedingungen genügt, so läßt sich zeigen, daß der Stoß nicht nur die resultierende Bewegungsgröße und das Moment der Bewegungsgrößen in der erforderlichen Weise verändert, sondern auch die kinetische Energie[1]), daß er also wirklich die Bewegungsart A wieder herstellt.

Die Lage P gehört den beiden Poinsot'schen Bewegungen A und A' gleichzeitig an, aber sie ist, wie wir sahen, für den Stoß nicht geeignet; die Lage P' anderseits ist es wohl, aber sie kommt in der Regel weder bei A noch bei A' vor. Denn, wenn man bei einer Poinsot'schen Bewegung den Körper von einer der wirklich vorkommenden Lagen aus um 180⁰ um eine beliebige Achse dreht, so erhält man eine Lage, welche der Körper bei der Poinsot'schen Bewegung nie erreicht haben würde. Die Richtung QZ' (Fig. 1) ist aber, der Bewegungsart A gegenüber, wirklich eine beliebige Achse.

Ich will jetzt zeigen, daß auch keine andere Lage als P und P' den gestellten Bedingungen genügen kann. Dieser Beweis läßt sich am einfachsten führen, wenn die Bewegungen A und A' derart sind, daß das Molekül nach bestimmten Zeitintervallen immer wieder zu den nämlichen Lagen zurückkehrt. Man betrachte dann eine der Trägheitsachsen α des Moleküls. Dieselbe beschreibt bei A und A' jedesmal einen geschlossenen Kegel; eine solche Fläche beschreibt sie auch, wenn man dem Teilchen sukzessive alle für den Stoß geeigneten Lagen gibt.

---

1) Wie wir in § 2 bemerkten, ist eine Poinsot'sche Bewegung durch das Moment der Bewegungsgrößen und die kinetische Energie bestimmt. Die erstere Größe genügt aber zur Bestimmung der Bewegung, wenn auch eine der Lagen gegeben ist. Denn die Richtung des Momentes der Bewegungsgrößen gibt uns die Richtung der Ebene, welche das Trägheitsellipsoid fortwährend berühren muß, und, da wir eine Lage dieses Ellipsoides kennen, so ist nur eine Entfernung jener Ebene vom Mittelpunkte möglich. Für die gegebene Lage kennt man dann auch die Rotationsachse; die Winkelgeschwindigkeit aber läßt sich aus dem Momente der Bewegungsgrößen ableiten.

Aus dem hier Gesagten geht hervor, daß, wenn ein Molekül in einer Lage, welche zu der Poinsot'schen Bewegung A gehört, ein Moment der Bewegungsgrößen erhält, wie es bei dieser Bewegung vorkommt, es letztere notwendig annehmen muß.

Drei Kegel haben nun im allgemeinen keine erzeugende Linie miteinander gemein; ein spezieller Zusammenhang zwischen den Flächen ist aber im vorliegenden Falle dadurch ausgeschlossen, daß der Kegel der geeigneten Lagen durch die Gestalt der Oberfläche des Moleküls bestimmt wird, während die beiden anderen Kegel davon unabhängig sind.[1])

Und nun haben wir unsere Aufmerksamkeit nur noch auf die eine Trägheitsachse α gerichtet. Betrachtet man auch die beiden anderen Achsen β und γ, so kann man behaupten, daß sogar, ganz abgesehen von der Bewegungsart A', keine einzige Lage, welche bei der Bewegung A vorkommt, für den Stoß geeignet sein kann. Die Kegelfläche, welche die Achse α bei der Bewegung A beschreibt, wird den Kegel, welcher die für den Stoß geeigneten Lagen versinnlicht, in bestimmten erzeugenden Linien schneiden. Gibt man aber der Achse α die Richtung einer dieser Linien L, so muß die Achse β, wenn man eine für den Stoß geeignete Lage erhalten soll, eine Richtung haben, welche von derjenigen abweicht, die sie annimmt, wenn α bei der Poinsot'schen Bewegung mit L zusammenfällt.

§ 6. Komplizierter verhält sich die Sache, wenn die Poinsot'schen Bewegungen nicht periodisch sind. Die Achse α beschreibt dann bei jeder derselben nicht eine geschlossene Kegelfläche, sondern sie durchläuft einen Kegelraum (etwa den Raum zwischen zwei Kegeln), innerhalb dessen sie jede Richtung erreichen kann, wenn nur die Bewegung während hinreichend langer Zeit fortgesetzt wird. Die beiden zu den Bewegungen A und A' gehörigen Kegelräume können nun einen gewissen Raum miteinander gemein haben, welcher alle Richtungen der Achse α enthält, welche sowohl bei A wie auch bei A' vorkommen. Wählt man für α eine beliebige Richtung in diesem Raume, so werden die Richtungen von β, welche bei den Bewegungen A und A' vorkommen, nicht zusammenfallen; da aber dieses Zusammenfallen nur eine weitere Bedingung liefert, so kann es innerhalb des letzterwähnten Kegelraumes eine Kegelfläche (eigentlich ein Stück einer solchen Fläche) geben, welche die Richtungen von α enthält, bei welchen jenes Zusammenfallen stattfinden kann. Diese Kegelfläche kann nun schließlich durch den Kegel, der die für den Stoß geeigneten Lagen vergegenwärtigt, in einzelnen bestimmten erzeugenden Linien geschnitten werden, aber wenn man α in die Richtung einer dieser letzteren legt, und β in die Richtung, welche bei den Bewegungen A und A' vorkommt, dann wird β nicht so orientiert sein, wie das in einer für den Stoß geeigneten Lage der Fall sein muß.

---

1) Man beachte hierbei, daß die Stoffverteilung im Innern des Moleküls keineswegs homogen zu sein braucht; das Trägheitsellipsoid kann also bei einer gegebenen Oberfläche noch jede Gestalt und Lage haben.

§ 7. Zur weiteren Erläuterung wähle ich den Fall, daß die Bewegungsart A der Ruhezustand ist (auch was die progressive Bewegung betrifft). Durch den Stoß F wird dann das Teilchen in fortschreitende Bewegung und in Rotation gesetzt und die Frage nach der Möglichkeit der umgekehrten Zusammenstöße geht darauf hinaus, ob es möglich sei, das Molekül durch einen neuen Stoß wieder plötzlich zur Ruhe zu bringen.

In Betreff der Bedingungen, welchen dieser Stoß $-F$ zu genügen hat, gilt dann wieder das früher Gesagte; auch jetzt kann man die Reihenfolge der für den Stoß geeigneten Lagen aufsuchen. Da die Lage P, bei welcher das Teilchen den Stoß F erhielt, nicht zu dieser Reihe gehört, so ist es unmöglich, dasselbe wieder in der ursprünglichen Lage zur Ruhe zu bringen. Wir können es aber als gleichgültig betrachten, in welcher Lage letzteres geschieht, und dann genügt es, wenn nur eine der für den Stoß geeigneten Lagen bei der Bewegung A' vorkommt.

Das ist nun, wie schon gezeigt wurde, im allgemeinen unmöglich, wenn diese Bewegung eine periodische ist. Ist sie das nicht, so kann allerdings in gewissen Fällen die Bewegung A' zu einer für den Stoß geeigneten Lage führen, braucht es aber nicht immer zu tun. Bei der Poinsot'schen Bewegung kann dann nämlich die eine Trägheitsachse α alle Richtungen innerhalb eines bestimmten Kegelraumes erhalten, und in diesem Raume wird ein Stück der Kegelfläche liegen, welche die für den Stoß geeigneten Richtungen von α repräsentiert. Fügt man nun noch die Bedingung hinzu, welche aus der Betrachtung der Achse β hervorgeht, so sieht man ein, daß in einigen Fällen in dem erwähnten Teile der Kegelfläche eine oder mehrere erzeugende Linien allen Bedingungen genügen können, daß aber ebensogut Fälle denkbar sind, in welchen jener Teil keine einzige derartige Linie enthält.

Speziell können wir die Frage verneinen, ob die Lage, welche ich früher P' genannt habe, bei der Poinsot'schen Bewegung A' vorkomme. Nach dem Stoße F (Fig. 1) wird, da das Molekül vorher in Ruhe war, die Achse des Momentes seiner Bewegungsgrößen senkrecht zur Ebene QZZ' gerichtet sein. Es sei R diese Achse, in einer bestimmten Richtung, etwa in der Figur nach vorn, genommen; man kann sie als die Achse des Kegels betrachten, dessen Grundlinie Poinsot die Herpolodie nennt. Eine der Trägheitsachsen des Moleküls, etwa die früher mit α bezeichnete, ist die Achse des Kegels, welcher über jenen ersten rollt.

Es sind nun Bewegungen möglich, bei welchen eine der beiden Richtungen längs dieser Achse (ich will sagen die positive) fortwährend einen spitzen Winkel mit R bildet. Dreht man dann aus einer der

dabei vorkommenden Lagen das Molekül um 180⁰ um eine Achse, welche mit QZ' (Fig. 1) parallel ist, und also senkrecht zur Richtung R steht, so wird die positive Richtung von α einen stumpfen Winkel mit R bilden; die neue Lage kann also bei der Poinsot'schen Bewegung nicht vorkommen.

§ 8. Beispielsweise betrachte ich den Fall eines Teilchens, das vor dem Stoße in Ruhe ist, noch unter speziellen Voraussetzungen. Ich wähle in Fig. 3 zur Ebene der Zeichnung die Ebene, welche (Fig. 1) durch F und Z gelegt wird; dieselbe schneide die Oberfläche des Moleküls in der Kurve S. Das Molekül sei, was seine Gestalt betrifft, nicht symmetrisch in Bezug auf diese Ebene, wohl aber was die Trägheitsmomente betrifft. Es sei mithin die durch Z senkrecht zur Ebene der Zeichnung gezogene Gerade eine Hauptachse. Durch den Stoß F entsteht dann einfach eine Rotation um diese Achse, und dabei können keine anderen Punkte der Oberfläche mit einer zu V parallelen Ebene in Berührung kommen, keine anderen also den Stoß $-F$ empfangen als die Punkte, in welchen das Teilchen von einer senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehenden Zylinderfläche berührt wird. Da die Oberfläche nicht symmetrisch in Bezug auf jene Ebene ist, so wird der geometrische Ort der erwähnten Berührungspunkte nicht mit S zusammenfallen, sondern er wird im allgemeinen teilweise über, teilweise unterhalb dieser Kurve liegen; es kann der Fall vorkommen, daß er mit S außer Q nur noch einen einzigen Punkt Q' gemein hat. Kein anderer Punkt als Q und Q' kann als Berührungspunkt beim Stoße $-F$ dienen, da bei jedem anderen das Moment des Stoßes nicht in der Ebene der Zeichnung fiele. Q aber ist deshalb nicht geeignet, weil ein dort angebrachter Stoß immer die Rotation, welche von F hervorgebracht wurde, beschleunigen wird, und der Punkt Q' wird, sogar wenn er (wie in der Figur) in letzterer Hinsicht eine geeignete Lage hat, nicht der Bedingung genügen, daß die Normale dort ebensoweit von Z entfernt ist wie in Q.

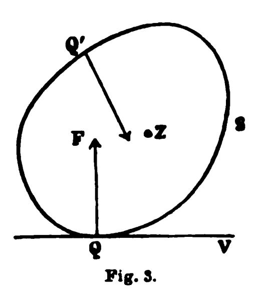


Fig. 3.

§ 9. Nachdem durch diese Betrachtungen die Unmöglichkeit der „umgekehrten“ Zusammenstöße bei der angenommenen Beschaffenheit der Moleküle nachgewiesen ist, wird man diese Stöße auch bei anderen Voraussetzungen über die Natur der Moleküle (wenn man sie z. B. als Systeme sich anziehender Punkte auffaßt) wohl nicht ohne weiteres den Betrachtungen zugrunde legen dürfen.

Eine Frage, welche mit der nach den umgekehrten Zusammen-

stößen zusammenhängt, ist die, ob in einer Gasmasse eine gewisse Bewegungsart der Teilchen, und eine andere, welche sich nur durch die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeiten davon unterscheidet, bei welcher also die nämlichen Lagen und Konfigurationen in umgekehrter Folge durchlaufen werden, in gleichem Maße auftreten, das heißt also, in der Bezeichnungsweise des § 1, ob die Bewegungsart $A\,(-)$ ebenso oft vorkommt wie die Bewegungsart A.

Wenn ruhende Moleküle durch einen Stoß ebensogut die Bewegung $A\,(-)$ als die Bewegung A erhalten könnten, wenn weiter ebensogut Zusammenstöße der Art

$$[A\,(-),\, B(-)] \rightarrow [A'\,(-),\, B'\,(-)],$$

wie solche der Art

$$[A,\, B] \rightarrow [A',\, B']$$

stattfänden, so hätte man Grund, diese Frage bejahend zu beantworten.

Zunächst aber ist es nicht wahr (wenigstens bei der im Vorhergehenden vorausgesetzten Beschaffenheit der Moleküle), daß die beiden genannten Arten von Stößen gleich möglich sind. Denn wenn die Stöße

$$[A,\, B] \rightarrow [A',\, B']$$

vorkommen, so bestehen auch die Stöße

$$[A'\,(-),\, B'\,(-)] \rightarrow [A\,(-),\, B(-)],$$

aber dann sind in der Regel, wie wir sahen, die Stöße

$$[A\,(-),\, B(-)] \rightarrow [A'\,(-),\, B'\,(-)]$$

unmöglich.

Zweitens kann man auch nicht behaupten, daß ruhende Moleküle durch einen Stoß ebensogut die eine wie die andere der Bewegungsarten A und $A\,(-)$ erhalten können. Wenn nämlich ein Molekül in einer gewissen Lage durch einen Stoß aus dem Ruhezustand in die Bewegung $A\,(-)$ versetzt wird, so würde es, wenn es zuerst die Bewegung A gehabt hätte, und dann in der nämlichen Lage den gleichen Stoß erhielte, zur Ruhe gebracht werden. Das wäre aber gleichbedeutend mit der oben als unrichtig hingestellten Aussage, daß ein Teilchen ebensogut die Bewegung A durch einen Stoß gewinnen wie verlieren könne.

§ 10. Für die Annahme, daß die Bewegungsarten oder die Bewegungszustände A und $A\,(-)$ in gleicher Häufigkeit unter den Molekülen eines Gases vertreten seien, scheint mir nach diesen Betrachtungen kein hinreichender Grund zu bestehen. Man könnte noch meinen, einen solchen Grund durch Erwägungen über die Gleichheit der Eigenschaften eines Gases in verschiedenen Richtungen und dergleichen ge-

winnen zu können. Allerdings wird man zugeben, daß, wenn zwei Bewegungsarten betrachtet werden, bei welchen gleiche Geschwindigkeiten des Schwerpunktes in verschiedenen Richtungen bestehen, und bei welchen die inneren Bewegungen in Bezug auf diese Richtungen die nämlichen sind, ebenso viele Moleküle die eine wie die andere Bewegungsart zeigen werden. Ebenso, daß Bewegungsarten, deren eine als das Spiegelbild der anderen in Bezug auf eine feste Ebene betrachtet werden kann, in gleicher Häufigkeit auftreten. Daß aber hieraus keineswegs auf das in gleichem Maße Vorkommen der Bewegungszustände A und $A(-)$ geschlossen werden darf, ist leicht zu zeigen. Man kann sich vorstellen, daß an jedem Molekül zwei Endpunkte zu unterscheiden sind, welche durch irgend eine Eigentümlichkeit voneinander verschieden sind, und welche ich als die Pole P und Q bezeichnen will. Es ist nun ein Bewegungszustand A denkbar, bei welchem immer in Bezug auf die fortschreitende Bewegung der Pol P nach vorn gerichtet ist, und wobei dennoch den oben ausgesprochenen allgemeinen Bedingungen genügt wird. Bei dem entgegengesetzten Bewegungszustande $A(-)$ würde aber der Pol Q vorwärts gerichtet sein.

Die über das Auftreten der Bewegungsarten A und $A(-)$ gemachten Bemerkungen scheinen mir deshalb nicht ohne Interesse, weil sich zeigen läßt, daß die Annahme, daß entgegengesetzte Bewegungszustände in gleichem Maße vertreten seien, genügt, um den Schlüssen von Boltzmann über die Bewegungen mehratomiger Moleküle wieder Gültigkeit zu verschaffen. Bevor ich aber diesen Beweis mitteile, möge eine einleitende Betrachtung über einatomige Gasmoleküle hier ihren Platz finden. Ich betrachte diese der Einfachheit wegen als elastische Kugeln; sie können aber auch materielle Punkte sein, welche sich, wenn sie einander sehr nahe kommen, mit von der Entfernung abhängigen Kräften anziehen oder abstoßen.

II. Vereinfachter Beweis des Satzes, daß bei einatomigen Gasen die durch das Maxwell'sche Gesetz bestimmte Geschwindigkeitsverteilung die einzig mögliche ist.

§ 11. Es seien ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten eines Moleküls, und es sei zur Zeit t

$$F(t, \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit, für welche die Geschwindigkeiten zwischen

$$\xi \text{ und } \xi + d\xi, \quad \eta \text{ und } \eta + d\eta, \quad \zeta \text{ und } \zeta + d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

liegen. Die Bewegungsart dieser Teilchen heiße A.

Von den Zusammenstößen, welche diese Moleküle erleiden, betrachten wir eine bestimmte Gruppe, jene Stöße nämlich, bei welchen die Summen der gleichgerichteten Geschwindigkeitskomponenten der beiden Moleküle zwischen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$ eingeschlossen sind, während die Richtung der gemeinschaftlichen Normale innerhalb eines unendlich schmalen Kegels von bestimmter Richtung im Raume und mit der Öffnung $d\omega$ liegt. Die Anzahl dieser Zusammenstöße ist in der Volumeneinheit und während der Zeit δt[1])

$$dn = \sigma^2 F(\xi, \eta, \zeta) F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) V \cos\vartheta \, dx\, dy\, dz\, d\omega\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \delta t. \quad (5)$$

Dabei bedeutet σ den Durchmesser der Moleküle, V die relative Geschwindigkeit, ϑ den spitzen Winkel, welchen diese im Momente des Zusammenstoßes mit der gemeinschaftlichen Normale bildet.

Das Fortschreiten mit den Geschwindigkeiten $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ will ich die Bewegungsart B nennen.

Durch den Stoß entstehen neue Bewegungsarten A' und B'; wenn bei A' die Geschwindigkeiten ξ', η' ζ' sind, so sind sie bei B'

$$x - \xi', \; y - \eta', \; z - \zeta'.$$

Bei Molekülen von der angenommenen Beschaffenheit sind nun auch die umgekehrten Stöße

$$[A', B'] \rightarrow [A, B]$$

möglich. Die Anzahl derselben, oder, genauer gesagt, der Stöße, bei welchen eines der Teilchen nach dem Stoße Geschwindigkeiten zwischen den Grenzen (4) besitzt, während die Summen der Geschwindigkeitskomponenten der beiden Teilchen und die Richtung der gemeinschaftlichen Normale wieder den angegebenen Bedingungen genügen, ist[2])

$$dn' = \sigma^2 F(\xi', \eta', \zeta') F(x-\xi', y-\eta', z-\zeta') V \cos\vartheta \, dx\, dy\, dz\, d\omega\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \delta t. \quad (6)$$

1) Bei der Berechnung dieser Zahl kann man so verfahren, als ob alle Teilchen der durch die Grenzen (4) bestimmten Gruppe die gleiche Geschwindigkeit (ξ, η, ζ) hätten. Die Geschwindigkeitskomponenten müssen dann für die zweite in Betracht kommende Gruppe zwischen $x - \xi$ und $x - \xi + dx$, $y - \eta$ und $y - \eta + dy$, $z - \zeta$ und $z - \zeta + dz$ eingeschlossen sein, so daß diese Gruppe pro Volumeneinheit $F(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)\, dx\, dy\, dz$ Teilchen enthält. Die Rechnung verläuft weiter so wie in der Anmerkung zu p. 117, nur müssen wir jetzt jeden mit den halben Scheitelwinkeln χ und $\chi + d\chi$ beschriebenen Doppelkegel durch einen Kegel mit der Öffnung $d\omega$ und von der gewählten Richtung ersetzen.

2) Nachdem wir in (5) die Anzahl der Zusammenstöße $[A, B] \rightarrow [A', B']$ gefunden haben, können wir uns die Frage stellen, was bei denselben aus der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ) wird; dabei können wir den Größen x, y, z ganz bestimmte Werte und der gemeinschaftlichen Normale eine bestimmte Richtung, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bilden möge, zuschreiben. Die Geschwindigkeitskomponenten sind dann nach dem Stoße

$$\xi' = \xi + \cos\alpha \{ (x - 2\xi) \cos\alpha + (y - 2\eta) \cos\beta + (z - 2\zeta) \cos\gamma \}, \text{ usw.}$$

§ 12. Wenn φ eine Größe ist, welche von den Geschwindigkeiten eines Moleküls abhängt, also eine Funktion von ξ, η, ζ, so kann man in einem bestimmten Augenblicke für jedes Teilchen den Wert von φ nehmen und über alle Teilchen der Volumeneinheit summieren. Ich bezeichne das Resultat mit $\Sigma\varphi$.

Man kann diese Berechnung ausführen vor und nach der Zeit δt und die Differenz der beiden Resultate bilden, also $\delta\Sigma\varphi$.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Es ist möglich, daß φ zu allen Zeiten dieselbe Funktion von ξ, η, ζ ist; die Natur der Funktion kann sich aber auch mit der Zeit ändern, d. h. φ kann von ξ, η, ζ und t abhängen.

Im ersten Falle wird für jedes Molekül, das während der Zeit δt seine Bewegung ungeändert behalten hat, auch φ ungeändert bleiben und die Variation von $\Sigma\varphi$ entsteht nur dadurch, daß einige Teilchen durch Zusammenstöße andere Geschwindigkeiten erhalten haben, mithin auch ein anderes φ.

Ändert sich die Gestalt der Funktion mit der Zeit, so ist auch für ein Molekül, das keinen Zusammenstoß erleidet, der Wert von φ zur Zeit $t + \delta t$ von dem Werte zur Zeit t verschieden. Man kann dann setzen

$$\delta\Sigma\varphi = \delta_1\Sigma\varphi + \delta_2\Sigma\varphi,$$

Dieses Resultat läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Wenn man nämlich in einer Hilfsfigur, die wir das Geschwindigkeitsdiagramm nennen können, zwei Punkte P und P' bestimmt, deren Koordinaten in Bezug auf Achsen, die den in der Gasmasse benutzten parallel laufen, ξ, η, ζ, bezw. ξ', η', ζ' sind, so ist der eine dieser Punkte das Spiegelbild des anderen in Bezug auf eine Ebene E, die man durch den Punkt $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$ senkrecht zur Richtung (α, β, γ) legt. Ebenso wie dem Teilchen mit der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ) der Punkt P als „Geschwindigkeitspunkt", wie wir sagen wollen, entspricht, so hat auch jedes andere Molekül seinen Geschwindigkeitspunkt, und man kann sagen, es sei (5) die Anzahl der unter den festgesetzten Bedingungen stattfindenden Stöße, bei welchen vor dem Zusammentreffen das eine Teilchen seinen Geschwindigkeitspunkt im Inneren eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ hat. Wir hätten nun die hervorgehobene Gruppe von Molekülen auch dadurch charakterisieren können, daß die Geschwindigkeitspunkte, statt in jenem Parallelepiped in einem beliebig gestalteten Volumenelement $d\lambda$ am Punkte (ξ, η, ζ) enthalten sind. Dann wäre in dem Ausdrucke (5) $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ durch $d\lambda$ zu ersetzen. Da bei den Zusammenstößen jeder Geschwindigkeitspunkt P in sein Spiegelbild in Bezug auf die Ebene E übergeht, so werden die neuen Geschwindigkeitspunkte alle in einem Elemente $d\lambda'$ liegen, welches das Spiegelbild von $d\lambda$ ist. Umgekehrt werden die Geschwindigkeitspunkte sich nach dem Stoße in $d\lambda$ befinden, wenn sie vorher in $d\lambda'$ lagen; also hat man, um dn' zu erhalten, in (5) ξ, η, ζ durch ξ', η', ζ', und $d\lambda$ durch $d\lambda'$ zu ersetzen. Da aber $d\lambda' = d\lambda$, so kann, wenn für das Element $d\lambda$ das rechtwinklige Parallelepiped gewählt wird, $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ stehen bleiben.

Daß an $V\cos\vartheta$ nichts geändert zu werden braucht, und daß bei den jetzt betrachteten Stößen nicht nur das eine Molekül zu dem Bewegungszustande A, sondern auch das andere zu dem Zustande B zurückgeführt wird, ist leicht ersichtlich.

wo $\delta_1 \Sigma\varphi$ von den Zusammenstößen, $\delta_2 \Sigma\varphi$ von der Gestaltsänderung der Funktion φ herrührt.

§ 13. Um $\delta_1 \Sigma\varphi$ zu berechnen, betrachte man zunächst einen der Zusammenstöße

$$[A, B] \rightarrow [A', B'].$$

Wir wollen zur Abkürzung mit φ_1 und φ_2 die Werte der Funktion für die beiden Teilchen vor dem Zusammenstoße, mit φ'_1 und φ'_2 die Werte nach dem Zusammenstoße bezeichnen. Diese vier Zeichen stehen also an der Stelle von

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta), \ \ \varphi(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)', \ \ \varphi(\xi', \eta', \zeta'), \ \ \varphi(x-\xi', y-\eta', z-\zeta').$$

Die beiden Moleküle liefern vor dem Stoße zu $\Sigma\varphi$ den Beitrag $\varphi_1 + \varphi_2$, nach dem Stoße den Beitrag $\varphi'_1 + \varphi'_2$; es wird also durch einen Zusammenstoß $\Sigma\varphi$ um

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 - \varphi_1 - \varphi_2$$

vergrößert, und durch die dn Zusammenstöße um

$$(\varphi'_1 + \varphi'_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\, dn.$$

Ebenso findet man, daß $\Sigma\varphi$ durch die dn' Zusammenstöße

$$[A', B'] \rightarrow [A, B]$$

um

$$(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi'_1 - \varphi'_2)\, dn'$$

zunimmt. Die beiden Gruppen von Stößen zusammen liefern also zu $\delta_1 \Sigma\varphi$ den Beitrag

$$(\varphi'_1 + \varphi'_2 - \varphi_1 - \varphi_2)(dn - dn'),$$

oder, wenn man (5) und (6) berücksichtigt,

$$\sigma^2 (\varphi'_1 + \varphi'_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\{F(\xi, \eta, \zeta) F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$$
$$- F(\xi', \eta', \zeta') F(x-\xi', y-\eta', z-\zeta')\}\, V \cos\vartheta\, dx\, dy\, dz\, d\omega\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \delta t. \quad (7)$$

Die Zusammenstöße, welche wir jetzt berücksichtigt haben, sind diejenigen, welche der Gruppe von Teilchen, deren Geschwindigkeiten zwischen den Grenzen (4) liegen, und welche ich die Gruppe P nennen will, entweder ein Molekül entziehen, oder ein Molekül zuführen, und außerdem unter den durch x, y, z und durch die Kegelfläche $d\omega$ näher vorgeschriebenen Bedingungen stattfinden. In dem Ausdrucke (7) sind $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ und die zwei Winkel, welche die Richtung der gemeinschaftlichen Normale bestimmen, und deren Differentiale in $d\omega$ enthalten sind, als die unabhängigen Veränderlichen zu betrachten, $\vartheta, V, \xi', \eta', \zeta'$ als die abhängigen Variablen.

Wenn man nun den Ausdruck (7) zunächst nach den beiden genannten Winkeln integriert über alle Werte, welche sie bei bestimmten

$\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ haben können, und wenn man dann weiter, während ξ, η, ζ konstant gehalten werden, nach x, y, z integriert zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so erhält man die Zunahme von $\Sigma\varphi$ durch alle Stöße ohne Einschränkung, durch welche die Molekülzahl der Gruppe P ab- oder zunimmt.

Um daraus die Änderung von $\Sigma\varphi$ durch alle Stöße abzuleiten, hat man noch nach ξ, η, ζ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zu integrieren. Nur ist dabei zu bemerken, daß jeder Zusammenstoß zwei Gruppen von Teilchen ein Molekül entzieht und zwei anderen Gruppen ein Molekül zuführt, so daß man bei dem angegebenen Verfahren jeden Zusammenstoß viermal mitzählt. Deutet man alle angegebenen Operationen durch ein einziges Integralzeichen an, so wird schließlich

$$\delta_1\Sigma\varphi = \frac{1}{4}\sigma^2\delta t\int(\varphi'_1 + \varphi'_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\{F(\xi,\eta,\zeta)F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$$
$$-F(\xi',\eta',\zeta')F(x-\xi', y-\eta', z-\zeta')\}\,V\cos\vartheta\,dx\,dy\,dz\,d\omega\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \quad (8)$$

Was $\delta_2\Sigma\varphi$ betrifft, so bemerke man zunächst, daß für jedes Teilchen, das keinen Zusammenstoß erleidet, die Größe φ während der Zeit δt um

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta t$$

zunimmt, wo, bei Ausführung der Differentation nach t, die Größen ξ, η, ζ als konstant zu betrachten sind. Die Gruppe von Teilchen, deren Geschwindigkeiten zwischen den Grenzen (4) liegen, liefert also für $\delta_2\Sigma\varphi$ den Beitrag

$$F(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\xi\,d\eta\,d\zeta\,\delta t. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Zwar sollte man eigentlich $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta t$ multiplizieren mit der Anzahl derjenigen Teilchen in dieser Gruppe, welche keinen Zusammenstoß erleiden; da aber die Anzahl der Moleküle, welche mit anderen in Kollision geraten sind, von der Ordnung δt ist, so hat man im Ausdrucke (9) nur eine Größe von der Ordnung δt^2 fortgelassen.

Aus (9) erhält man $\delta_2\Sigma\varphi$, wenn man in Bezug auf ξ, η, ζ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ integriert; es ist also

$$\delta_2\Sigma\varphi = \delta t\int F(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\xi\,d\eta\,d\zeta. \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Natürlich kann man schreiben

$$\Sigma\varphi = \int F(\xi,\eta,\zeta)\varphi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

und ergibt sich hieraus

$$\delta\Sigma\varphi = \delta t\int\frac{\partial F}{\partial t}\varphi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \delta t\int F\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Aus den mitgeteilten Betrachtungen geht hervor, daß der Wert des Gliedes

$$\delta t \int \frac{\partial F}{\partial t} \varphi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

durch die Gleichung (8) gegeben wird.

§ 14. Wir können in Betreff der Funktion φ jede beliebige Annahme machen, da über die Art und Weise, wie sie von ξ, η, ζ, t abhängt, nichts vorausgesetzt wurde. Es wird sogar an unseren Deduktionen nichts geändert, wenn die Funktion, welche über die verschiedenen Moleküle summiert wird, zufälligerweise mit der Funktion, welche die Geschwindigkeitsverteilung darstellt, zusammenhängt. Es ist demnach erlaubt zu setzen

$$\varphi = \log F(\xi, \eta, \zeta).$$

Dadurch geht zunächst die Gleichung (10) über in

$$\delta_2 \Sigma \varphi = \delta t \int F \frac{\partial \log F}{\partial t} d\xi \, d\eta \, d\zeta = \delta t \int \frac{\partial F}{\partial t} d\xi \, d\eta \, d\zeta$$
$$= \delta t \cdot \frac{d}{dt} \int F \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Da aber

$$\int F \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

die Anzahl der Teilchen in der Volumeneinheit bedeutet, welche Anzahl sich im Laufe der Zeit nicht ändert, so erhält man

$$\delta_2 \Sigma \varphi = 0.$$

Die ganze Änderung von $\Sigma \varphi$ wird demnach durch (8) gegeben, und man hat folglich, wenn man zur Abkürzung

$$F(\xi, \eta, \zeta), \quad F(x - \xi, y - \eta, z - \zeta), \quad F(\xi', \eta', \zeta'), \quad F(x - \xi', y - \eta', z - \zeta')$$

mit

$$F_1, \quad F_2, \quad F'_1, \quad F'_2$$

bezeichnet,

$$\delta \int F \log F \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$
$$= \frac{1}{4} \sigma^2 \delta t \int \log \left(\frac{F'_1 F'_2}{F_1 F_2} \right) (F_1 F_2 - F'_1 F'_2) V \cos \vartheta \, dx \, dy \, dz \, d\omega \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Sobald nicht $F_1 F_2 = F'_1 F'_2$ ist, hat der Ausdruck unter dem Integralzeichen stets das negative Vorzeichen, und es kann demnach, wenn wir mit einem willkürlichen Zustande des Gases anfangen, die Größe

$$H = \int F \log F \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

nur abnehmen. Diese Abnahme wird fortdauern, bis ein stationärer Zustand erreicht ist, in welchem H ein Minimum ist.

Es muß dann aber bei jedem Zusammenstoß

$$F_1 F_2 = F'_1 F'_2$$

sein, woraus in bekannter Weise das Maxwell'sche Gesetz abgeleitet werden kann.[1])

III. Betrachtung mehratomiger Moleküle unter einer Hypothese.

§ 15. Jedes der einander gleichen Gasmoleküle möge aus r Atomen bestehen und der Bewegungszustand desselben sei, ähnlich wie bei Boltzmann, durch die Größen

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \ldots \zeta_{r-1}, u_1, v_1, w_1, u_2, \ldots w_r$$

bestimmt, von welchen die $3r - 3$ ersten relative Koordinaten der Atome in Bezug auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, und die $3r$ letzten Geschwindigkeiten bedeuten. Es sind nämlich für das k^{te} Atom ξ_k, η_k, ζ_k jene relativen Koordinaten, und u_k, v_k, w_k die vollen Geschwindigkeitskomponenten. Da die Koordinaten des letzten Atoms in Bezug auf den Schwerpunkt von den Koordinaten der übrigen abhängen, so sind ξ_r, η_r, ζ_r nicht unter die Variablen aufgenommen.

Zur Zeit t mögen in der Volumeneinheit

$$f(t, \xi_1, \ldots \zeta_{r-1}, u_1, \ldots w_r)\, d\xi_1 \ldots d\zeta_{r-1}\, du_1 \ldots dw_r$$

---

1) Wenn das Gas sich im ganzen genommen in Ruhe befindet, und also die Molekularbewegung nach allen Seiten in derselben Weise vor sich geht, kann die Funktion F nur von der Größe $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ der Geschwindigkeit, wir können auch sagen von dem Geschwindigkeitsquadrat s abhängen Bezeichnen wir die Werte von s vor einem Zusammenstoße mit s_1, s_2, die Werte nach dem Stoße mit s'_1, s'_2 und setzen wir $\log F = \varphi(s)$, so muß also gelten

$$\varphi(s_1) + \varphi(s_2) = \varphi(s'_1) + \varphi(s'_2).$$

Nun kommen bei den Stößen alle Kombinationen s_1, s_2, s'_1, s'_2 vor, welche der Bedingung

$$s_1 + s_2 = s'_1 + s'_2$$

genügen; folglich muß für alle Werte von s_1, s_2, s'_1 (mit der Einschränkung $s_1 + s_2 > s'_1$)

$$\varphi(s_1) + \varphi(s_2) = \varphi(s'_1) + \varphi(s_1 + s_2 - s'_1)$$

sein. Differenziert man dies nach s_1, so erhält man

$$\varphi'(s_1) = \varphi'(s_1 + s_2 - s'_1).$$

Hier sind s_1 und $s_1 + s_2 - s'_1$ völlig voneinander unabhängige positive Zahlen, folglich ist die abgeleitete Funktion φ' eine Konstante. Wir bezeichnen sie mit $-h$, und haben dann, wenn C eine weitere Konstante ist,

$$\varphi'(s) = -h, \quad \varphi(s) = \log C - hs,$$
$$F = Ce^{-hs} = Ce^{-hr^2},$$

was der Ausdruck des Maxwell'schen Gesetzes ist. Die Konstante h ist positiv, weil sonst für $r = \infty$, $F = \infty$ wäre.

Teilchen vorkommen, für welche die Variablen zwischen den Grenzen

$$\xi_1 \text{ und } \xi_1 + d\xi_1, \ldots \zeta_{r-1} \text{ und } \zeta_{r-1} + d\zeta_{r-1}, \; u_1 \text{ und } u_1 + du_1, \ldots \ldots w_r \text{ und } w_r + dw_r \quad (11)$$

eingeschlossen sind; den Bewegungszustand dieser Moleküle will ich mit a andeuten.

Wie es durch die Aufnahme von t unter die unabhängigen Variablen ausgedrückt ist, braucht der Zustand, den wir betrachten, vorläufig nicht stationär zu sein, wobei noch zu bemerken ist, daß jetzt nicht nur durch die Zusammenstöße, sondern auch durch die inneren Bewegungen der Teilchen eine Änderung von f mit der Zeit eintreten kann. Bei jedem sich selbst überlassenen Molekül ändert sich ja fortwährend der Bewegungszustand.

Es sei weiter φ eine vorläufig willkürliche Funktion von $\xi_1, \ldots \zeta_{r-1}$, $u_1, \ldots w_r$ und t. Man kann dann wieder in jedem Augenblicke für alle Teilchen der Volumeneinheit den Wert dieser Funktion nehmen; $\Sigma\varphi$ sei die Summe aller dieser Werte. Wir betrachten die Änderung $\delta\Sigma\varphi$, welche diese Größe zwischen den Augenblicken t und $t + \delta t$ erleidet.

Es besteht nun $\delta\Sigma\varphi$ wieder aus zwei Teilen, beide, wie δt, unendlich klein. Der erste, den ich mit $\delta_1\Sigma\varphi$ bezeichne, rührt daher, daß während der Zeit δt eine unendlich kleine Zahl von Molekülen einen Zusammenstoß erleiden und dadurch einen ganz neuen Bewegungszustand, also auch einen neuen Wert von φ erhalten. Die zweite Zunahme $\delta_2\Sigma\varphi$ hat die unendlich kleine Änderung, welche für jedes der übrigen Moleküle in dem Werte von φ auftritt, zur Ursache. Während diese Änderung in dem vorhergehenden Abschnitte nur dadurch hervorgebracht wurde, daß sich φ bei konstanten ξ, η, ζ mit der Zeit änderte, wird sie jetzt auch teilweise durch die Änderungen verursacht, welchen die Größen $\xi_1, \ldots \zeta_{r-1}, u_1, \ldots w_r$ in einem frei weiterfliegenden Molekül unterworfen sind.

§ 16. Berechnung von $\delta_1\Sigma\varphi$. Neben den Teilchen mit dem Bewegungszustande a betrachten wir eine zweite Gruppe, für welche die Variablen zwischen den Grenzen

$$\xi'_1 \text{ und } \xi'_1 + d\xi'_1, \ldots \zeta'_{r-1} \text{ und } \zeta'_{r-1} + d\zeta'_{r-1}, \; u'_1 \text{ und } u'_1 + du'_1, \ldots \ldots w'_r \text{ und } w'_r + dw'_r \quad (12)$$

liegen; dieser Bewegungszustand möge a' heißen.

Es können nun zwischen einem Molekül mit dem Zustande a und einem mit dem Zustande a' Zusammenstöße unter sehr verschiedenen Umständen stattfinden. Wir wählen eine bestimmte Art von Stößen aus, indem wir die Bedingung stellen, daß zu Anfang der Wechselwirkung die parallel OX und OY laufenden Koordinaten des einen Schwerpunktes in Bezug auf den anderen zwischen bestimmten Grenzen liegen.

Wir wollen, wie das auch Boltzmann tut, die Größen

$$\xi_1, \eta_1, \ldots \zeta_{r-1}, \xi'_1, \ldots \zeta'_{r-1}$$

mit

$$p_1, p_2, \ldots p_{3r-3}, p_{3r-2}, \ldots p_{s-6}$$

bezeichnen, wobei

$$s = 6r$$

ist, und ebenso an die Stelle von

$$u_1, v_1, \ldots w_r, u'_1, \ldots w'_r$$

schreiben

$$q_1, q_2, \ldots q_{3r}, q_{3r+1}, \ldots q_s.$$

Sind weiter die Koordinaten des Schwerpunktes des ersten Moleküls x, y, z, die des Schwerpunktes des zweiten Teilchens x', y', z', so bezeichnen wir die relativen Koordinaten

$$x' - x, \; y' - y, \; z' - z$$

mit

$$p_{s-5}, p_{s-4}, p_{s-3}.$$

Die Anzahl der Stöße, zu deren Anfang p_{s-5} und p_{s-4} zwischen den Grenzen

$$p_{s-5} \text{ und } p_{s-5} + dp_{s-5}, \; p_{s-4} \text{ und } p_{s-4} + dp_{s-4}$$

liegen, ist von Boltzmann berechnet worden. Man kann für dieselbe schreiben

$$dn = f(\xi_1, \ldots w_r) f(\xi'_1, \ldots w'_r) [\omega] dp_1 dp_2 \ldots dp_{s-4} dq_1 \ldots dq_s \delta t. \quad (13)$$

Ich habe hier mit $[\omega]$ den absoluten Wert der Größe angedeutet, welche Boltzmann ω nennt und die bestimmt wird durch die Gleichung

$$\omega = \frac{\frac{\partial F}{\partial p_1} \varrho_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \varrho_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_{s-3}} \varrho_{s-3}}{\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}}, \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

wenn

$$F(p_1, p_2, \ldots p_{s-3})$$

eine solche Funktion ist, daß ein bestimmter konstanter Wert derselben den Beginn oder das Ende der Zusammenstöße charakterisiert, und wenn

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{s-3}$$

die Werte sind, welche

$$\frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}, \ldots \frac{dp_{s-3}}{dt}$$

zu Anfang des Stoßes haben.

§ 17. Die Formel (13) kann man in folgender Weise ableiten.

Indem wir die Bewegungszustände zweier Moleküle durch die Größen $p_1, \ldots p_{s-6}, q_1, \ldots q_s$ und ihre gegenseitige Lage durch p_{s-5}, p_{s-4}, p_{s-3} bestimmen, können wir die Anzahl der Molekülpaare in der

Volumeneinheit, für welche diese Bestimmungsstücke zwischen den Grenzen

$$p_1 \text{ und } p_1 + dp_1, \dots p_{s-3} \text{ und } p_{s-3} + dp_{s-3},$$
$$q_1 \text{ und } q_1 + dq_1, \dots q_s \text{ und } q_s + dq_s$$

eingeschlossen sind, mit

$$\mathrm{N}\, dp_1 \dots dp_{s-3}\, dq_1 \dots dq_s \quad \dots \dots \quad (15)$$

bezeichnen, wo N ein Faktor ist, den wir alsbald näher betrachten werden.

Man kann nun aber auch statt der einen Variablen p_{s-3} die Größe $F(p_1, p_2, \dots p_{s-3})$ einführen. Bei konstanten $p_1, p_2, \dots p_{s-4}$ ist

$$dF = \frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}\, dp_{s-3}$$

und wir finden somit

$$\mathrm{N}\, dp_1 \dots dp_{s-4}\, dq_1 \dots dq_s \left[\frac{dF}{\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}}\right] \quad \dots \quad (16)$$

für die Anzahl der Molekülpaare, bei welchen in einem bestimmten Augenblick $p_1, \dots p_{s-4}, q_1, \dots q_s$ zwischen den angegebenen Grenzen liegen und zugleicherzeit F zwischen F und $F + dF$.

Die rechteckigen Klammern dienen hier — und ebenso in späteren Formeln — wieder dazu, den absoluten Wert der eingeschlossenen Größe anzudeuten.

Wir wollen nun unter F den bestimmten Wert F_0 verstehen, welchen die Funktion am Anfang eines Zusammenstoßes hat, und unter dF die mit dem negativen Vorzeichen genommene Änderung, welche während des Zeitelementes δt stattfindet. Also:

$$dF = -\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\varrho_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2}\varrho_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}\varrho_{s-3}\right)\delta t,$$

wodurch (16) in

$$\mathrm{N}\, dp_1 \dots dp_{s-4}\, dq_1 \dots dq_s [\omega]\, \delta t \quad \dots \dots \quad (17)$$

übergeht.

Es ist klar, daß bei allen Molekülpaaren, für welche der Anfangswert von F zwischen den Grenzen F_0 und $F_0 - \frac{dF}{dt}\delta t$ liegt, die Funktion im Laufe der Zeit δt den Wert F_0 erreichen wird, und daß wir also wirklich in (17) die gesuchte Anzahl der Zusammenstöße gefunden haben. Der Umstand, daß $p_1, \dots p_{s-4}, q_1, \dots q_s$ sich, bevor der Stoß eintritt, noch etwas ändern, und daß sie also beim Stoßanfang nicht mehr genau zwischen den angegebenen Grenzen liegen, eben weil sie zu Anfang des Zeitelementes δt dieser Bedingung genügten, kann unberücksichtigt bleiben, da er in (17) nur eine Änderung von der Ordnung δt^2 herbeiführen kann.

Wir haben jetzt noch den Wert von N näher zu betrachten, d. h. den Ausdruck (15) zu berechnen. Zu diesem Zwecke fassen wir zunächst die erste Gruppe von Molekülen ins Auge, die Gruppe nämlich, deren Bewegungszustand durch (11) festgesetzt ist; die Anzahl dieser Teilchen pro Volumeneinheit nennen wir α. Soll nun in Bezug auf ein Molekül M, welches dieser Gruppe angehört, der Schwerpunkt eines anderen Teilchens eine solche Lage haben, daß $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ zwischen den Grenzen

$$p_{s-5} \text{ und } p_{s-5}+dp_{s-5},\ p_{s-4} \text{ und } p_{s-4}+dp_{s-4},\ p_{s-3} \text{ und } p_{s-3}+dp_{s-3}$$

eingeschlossen sind, dann muß offenbar jener Schwerpunkt in einem mit dem Molekül M festverbundenen Raum von der Größe

$$dp_{s-5}\,dp_{s-4}\,dp_{s-3}$$

liegen. Es gibt nun α derartiger Räume in der Volumeneinheit, und wenn wir die ebenfalls pro Volumeneinheit genommene Anzahl der Teilchen der zweiten durch (12) bestimmten Gruppe für einen Augenblick mit α' bezeichnen, erhalten wir

$$\alpha\alpha'\,dp_{s-5}\,dp_{s-4}\,dp_{s-3}$$

für die Zahl der Molekülpaare, um die es sich handelt. Das ist der Wert von (15) und man hat also

$$\mathrm{N}\,dp_1\ldots dp_{s-6}\,dq_1\ldots dq_s = \alpha\alpha'.$$

Wenn man dies in (17) substituiert, und für α und α' die Werte

$$\alpha = f(\xi_1,\ldots w_r)\,dp_1\ldots dp_{3r-3}\,dq_1\ldots dq_{3r}$$
$$\alpha' = f(\xi'_1,\ldots w'_r)\,dp_{3r-2}\ldots dp_{s-6}\,dq_{3r+1}\ldots dq_s$$

einsetzt, ergibt sich der Ausdruck (13).

§ 18. Wir können das gefundene Resultat noch etwas verallgemeinern, wenn wir uns einer in die Lehre von einer n-fachen Mannigkeit, oder, wie wir auch sagen können, in die n-dimensionale Geometrie gehörenden Betrachtung bedienen.[1]) Gesetzt, wir haben n Größen

$$x_1,\ x_2,\ldots x_n,$$

die den Zustand eines Systems (oder irgend einen Vorgang) bestimmen, und es gebe unzählig viele derartige Systeme (oder Vorgänge), bei welchen die x allerhand verschiedene Werte haben. Wir können dann, indem wir die Gesamtheit der Systeme gleichsam statistisch betrachten, die Anzahl der Fälle ins Auge fassen, in welchen $x_1, x_2, \ldots x_n$ innerhalb eines gewissen unendlich kleinen Spielraums oder Gebietes liegen. Ein solches Gebiet kann in verschiedener Weise begrenzt sein und ver-

1) Vgl. auch den folgenden Artikel.

schiedene Größe haben. Eine sehr einfache Begrenzung erhalten wir, wenn wir verlangen, daß die Veränderlichen zugleicherzeit zwischen den Werten

$$x_1 \text{ und } x_1 + dx_1,\ x_2 \text{ und } x_2 + dx_2, \ldots x_n \text{ und } x_n + dx_n$$

liegen sollen, wo $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ gewisse positive Zuwächse sind; wir wollen sagen, daß wir es dann mit einem „nach den x begrenzten" Gebiet zu tun haben. Indem wir nun festsetzen, daß die Größe eines solchen nach dem Wert des Produktes

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

beurteilt werden soll, können wir auch die Größe eines in beliebiger anderer Weise begrenzten Gebietes bestimmen. Wie man in der dreidimensionalen Geometrie jeden gegebenen Raum in unendlich viele rechtwinklige Parallelepipede zerlegen kann, wobei die an den Grenzen des Raumes übrigbleibenden Teile im Verhältnis zu der ganzen Ausdehnung verschwindend klein sind, so kann man auch in der n-fachen Mannigfaltigkeit $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ jedes beliebige Gebiet als die Summe unendlich vieler nach den x-begrenzten Gebiete auffassen.

Unter zwei gleichen, unendlich wenig voneinander entfernten, nach den x begrenzten Bereichen verstehen wir solche, für welche die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ gleiche Werte haben, die Anfangswerte $x_1, x_2, \ldots x_n$ aber unendlich wenig voneinander verschieden sind. Wenn wir uns auf die Größen von der Ordnung $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ beschränken, so dürfen wir sagen, daß solche Gebiete gleich viel Systeme oder Fälle umfassen. Es rührt dies daher, daß die Umstände, welche darüber entscheiden, ob ein System in das Gebiet hineingehört oder nicht, und die sich mit den Werten der x ändern, für die beiden unendlich wenig auseinander liegenden Spielräume nur unendlich wenig verschieden sein können. Wir schließen dann weiter, daß auch bei beliebiger Gestaltung eines unendlich kleinen Spielraumes die Anzahl der von demselben umfaßten Fälle seiner Größe proportional ist. Ist diese Zahl für ein nach den x begrenztes Gebiet $k\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, so ist sie $k\, d\lambda$ für jedes unendlich kleine Gebiet von der Größe $d\lambda$.

Der Ausdruck (13) bezieht sich auf die $(2s - 4)$-fache Mannigfaltigkeit $(p_1, \ldots p_{s-4}, q_1, \ldots q_s)$, und zwar stellt er die Zahl der Stöße dar, welche in ein nach den p und q begrenztes unendlich kleines Gebiet dieser Mannigfaltigkeit hineingehören. Setzen wir nun die Grenzen, innerhalb welcher die Variablen $p_1, \ldots p_{s-4}, q_1, \ldots q_s$ sich bewegen dürfen, in anderer Weise fest, d. h. begrenzen wir den unendlich kleinen Spielraum, den wir für diese Variablen offen lassen wollen, in anderer Weise, so dürfen wir, wenn $d\lambda$ die Größe des Spielraumes bedeutet, für die Zahl der Zusammenstöße noch immer schreiben

$$dn = f(\xi_1, \ldots w_r)\, f(\xi'_1, \ldots w'_r)\, [\omega]\, d\lambda\, \delta t. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

§ 19. Die Größen, welche am Ende des Zusammenstoßes die Konfiguration der beiden Moleküle bestimmen, wollen wir mit

$$\Xi_1, H_1, \ldots Z_{r-1}, \quad \Xi'_1, \ldots Z'_{r-1},$$

oder auch mit

$$P_1, P_2, \ldots P_{3r-3}, P_{3r-2}, \ldots P_{s-6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

bezeichnen, ebenso die Geschwindigkeiten der Atome nach Ablauf der Wechselwirkung mit

$$U_1, V_1, \ldots W_r, U'_1, \ldots W'_r,$$

oder

$$Q_1, Q_2, \ldots Q_{3r}, Q_{3r+1}, \ldots Q_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und die Werte von

$$x'-x, \quad y'-y, \quad z'-z$$

mit

$$P_{s-5}, P_{s-4}, P_{s-3}.$$

Da die Anfangswerte der die Bewegungszustände bestimmenden Variablen nicht für alle Molekülpaare gleich waren, und überdies nicht alle Zusammenstöße unter genau denselben Umständen stattgefunden haben, so sind auch die Werte der P und Q nicht für alle Fälle genau dieselben. Dürften wir sagen, daß am Ende des Zusammenstoßes die den Bewegungszustand bestimmenden Variablen für das erste Molekül zwischen

$$\Xi_1 \text{ und } \Xi_1 + d\Xi_1, \ldots Z_{r-1} \text{ und } Z_{r-1} + dZ_{r-1}, \; U_1 \text{ und } U_1 + dU_1 \ldots \ldots W_r \text{ und } W_r + dW_r, \quad (21)$$

für das zweite zwischen

$$\Xi'_1 \text{ und } \Xi'_1 + d\Xi'_1, \ldots Z'_{r-1} \text{ und } Z'_{r-1} + dZ'_{r-1}, \; U'_1 \text{ und } U'_1 + dU'_1, \ldots \ldots W'_r \text{ und } W'_r + dW'_r. \quad (22)$$

m. a, W. die Größen (19) und (20) zwischen den Grenzen

$$P_1 \text{ und } P_1 + dP_1, \quad P_2 \text{ und } P_2 + dP_2, \ldots Q_s \text{ und } Q_s + dQ_s$$

und zugleicherzeit die Differenzen

$$x'-x, \quad y'-y$$

zu Ende des Zusammenstoßes zwischen den Grenzen

$$P_{s-5} \text{ und } P_{s-5} + dP_{s-5}, \quad P_{s-4} \text{ und } P_{s-4} + dP_{s-4} \quad . \quad (23)$$

liegen, so hätten wir es jetzt in der Mannigfaltigkeit ($P_1, \ldots P_{s-4}$, $Q_1, \ldots Q_s$) mit einem Gebiete von der Größe

$$dP_1 \ldots dP_{s-4}\, dQ_1 \ldots dQ_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

zu tun. Im allgemeinen wird nun aber das Gebiet, welches die neuen Bewegungszustände und gegenseitigen Lagen umfaßt, nicht gerade nach den $P_1, \ldots P_{s-4}, Q_1, \ldots Q_s$ (vgl. § 18) begrenzt sein. Nichtsdestoweniger wird es eine bestimmte Größe haben. Diese wollen wir mit $d\Lambda$ bezeichnen.

Man kann ferner für den Schluß des Zusammenstoßes eine Größe Ω berechnen, welche der Größe ω, die sich auf den Anfang bezieht, analog ist.

Sind nämlich

$$R_1, R_2, \ldots R_{s-3}$$

die zu Ende der Wechselwirkung bestehenden Werte von

$$\frac{dP_1}{dt}, \frac{dP_2}{dt}, \ldots \frac{dP_{s-3}}{dt}$$

und versteht man jetzt unter F die Funktion

$$F(P_1, P_2, \ldots P_{s-3}),$$

so ist

$$\Omega = \frac{\frac{\partial F}{\partial P_1} R_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2} R_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial P_{s-3}} R_{s-3}}{\frac{\partial F}{\partial P_{s-3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Boltzmann zeigt nun, daß immer[1])

$$[\Omega]\, d\Lambda = [\omega]\, d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

ist.

§ 20. Wenn wir die Bewegungszustände, welche die beiden Teilchen nach dem betrachteten Zusammenstoße besitzen, mit A und A' bezeichnen, kann der Stoß selbst durch das Symbol

$$[a, a'] \rightarrow [A, A'] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

vorgestellt werden.

Umgekehrte Zusammenstöße nach dem Schema

$$[A, A'] \rightarrow [a, a']$$

sind nun in der Regel nicht möglich, wohl aber die Zusammenstöße

$$[A(-), A'(-)] \rightarrow [a(-), a'(-)], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

welche wir die entgegengesetzten von

$$[a, a'] \rightarrow [A, A']$$

nennen können.

Wären nun am Ende der Zusammenstöße die die Bewegungszustände bestimmenden Variablen zwischen den Grenzen (21) und (22), und die Werte von $x' - x$ und $y' - y$ zwischen den Grenzen (23) eingeschlossen, so hätte man offenbar für den Bewegungszustand $A(-)$ die Grenzen

$$\Xi_1 \text{ und } \Xi_1 + d\Xi_1, \ldots Z_{r-1} \text{ und } Z_{r-1} + dZ_{r-1}, -U_1 \text{ und } -(U_1 + dU_1), \ldots -W_r \text{ und } -(W_r + dW_r),$$

für $A'(-)$ die Grenzen

$$\Xi'_1 \text{ und } \Xi'_1 + d\Xi'_1, \ldots Z'_{r-1} \text{ und } Z'_{r-1} + dZ'_{r-1}, -U'_1 \text{ und } -(U'_1 + dU'_1), \ldots -W'_r \text{ und } -(W'_r + dW'_r)$$

1) Siehe den folgenden Artikel, §§ 17 und 18.

und für die Größen $x' - x$ und $y' - y$

$$P_{s-5} \text{ und } P_{s-5} + dP_{s-5}, \quad P_{s-4} \text{ und } P_{s-4} + dP_{s-4}.$$

Für die Anfangswerte der verschiedenen Größen bei den entgegengesetzten Zusammenstößen bestände dann also ein Spielraum von genau derselben Größe wie der Spielraum (24), der, was die Endwerte bei den Stößen (27) betrifft, in Betracht kam. Wir dürfen daraus schließen, daß auch dann, wenn das zuletzt genannte Gebiet in irgend einer anderen Weise begrenzt ist, das Gebiet, welches die Anfangswerte bei den Stößen (28) umfaßt, dieselbe Größe $d\varLambda$ hat.

Die Anzahl der entgegengesetzten Zusammenstöße in der Zeit δt erhält man nun aus (13) durch geeignete Änderung der Buchstaben. Sie ist nämlich

$$dN = f(\Xi_1, \ldots Z_{r-1}, -U_1, \ldots -W_r) f(\Xi'_1, \ldots Z'_{r-1}, -U'_1 \ldots -W'_r) [\Omega_1] d\varLambda \delta t. \quad (29)$$

Da aber zu Anfang der jetzt betrachteten Stöße die Differentialquotienten von $P_1, P_2, \ldots P_{s-3}$ nach der Zeit die Werte

$$-R_1, -R_2, \ldots -R_{s-3}$$

haben, so findet man, analog mit (14)

$$\Omega_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial P_1} R_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2} R_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial P_{s-3}} R_{s-3}}{\frac{\partial F}{\partial P_{s-3}}},$$

wo F gleichbedeutend ist mit F in (25). Mithin ist

$$[\Omega_1] = [\Omega]$$

und nach (26)

$$[\Omega_1] d\varLambda = [\omega] d\lambda.$$

Stellt man den gemeinschaftlichen Wert beider Größen durch dA vor, so wird

$$dn = f(\xi_1, \ldots w_r) f(\xi'_1, \ldots w'_r) dA \delta t,$$
$$dN = f(\Xi_1, \ldots -W_r) f(\Xi'_1, \ldots -W'_r) dA \delta t.$$

§ 21. Bei jedem der dn Zusammenstöße hat nun die Größe φ für die beiden Moleküle vor der Wechselwirkung die Werte

$$\varphi(t, \xi_1, \ldots w_r) \text{ und } \varphi(t, \xi'_1, \ldots w'_r),$$

nach der Wechselwirkung die Werte

$$\varphi(t, \Xi_1, \ldots W_r) \text{ und } \varphi(t, \Xi'_1, \ldots W'_r),$$

so daß durch diese Zusammenstöße die Summe $\Sigma\varphi$ um

$$\{\varphi(t, \Xi_1, \ldots W_r) + \varphi(t, \Xi'_1, \ldots W'_r) - \varphi(t, \xi_1, \ldots w_r) - \varphi(t, \xi'_1, \ldots w'_r)\} dn = \psi\, dn$$

zugenommen hat.

Ebenso ist die Zunahme von $\Sigma\varphi$, welche von den dN Stößen herrührt,

$$\{\varphi(t, \xi_1 \ldots -w_r) + \varphi(t, \xi'_1, \ldots -w'_r) - \varphi(t, \Xi_1, \ldots -W_r) \\ - \varphi(t, \Xi'_1, \ldots -W'_r)\}\, dN = \Psi\, dN.$$

Wir wollen nun die Beschränkung einführen, daß die bis jetzt unbestimmt gelassene Funktion φ der Bedingung

$$\varphi(t, \xi_1, \ldots \zeta_{r-1}, -u_1, \ldots -w_r) = \varphi(t, \xi_1, \ldots \zeta_{r-1}, u_1, \ldots w_r) \quad (30)$$

genügt. Dann wird

$$\Psi = -\psi$$

und man erhält für die Zunahme von $\Sigma\varphi$, welche aus den dn und den dN Stößen zusammen hervorgeht,

$$\psi\,[f(\xi_1, \ldots w_r)\, f(\xi'_1, \ldots w'_r) - f(\Xi_1, \ldots -W_r)\, f(\Xi'_1, \ldots -W'_r)]\, dA\, \delta t.$$

Wenn man diesen Ausdruck nach $p_1, \ldots p_{s-4}, q_1, \ldots q_s$ integriert, erhält man, wie bei der analogen Integration im vorhergehenden Abschnitte, das Vierfache von $\delta_1 \Sigma\varphi$. Mithin ist

$$\delta_1 \Sigma\varphi = \frac{1}{4}\,\delta t \int \psi\,[f(\xi_1, \ldots w_r) f(\xi'_1, \ldots w'_r) - f(\Xi_1, \ldots -W_r) f(\Xi'_1, \ldots -W'_r)]\, dA.$$

§ 22. Wir wollen ferner die allerdings nicht beweisbare Voraussetzung machen, daß in dem Gase, wenn dasselbe seinen stationären Zustand angenommen hat, neben jeder Gruppe von Molekülen, mit dem Bewegungszustande A, eine andere ebenso zahlreiche bestehe, deren Teilchen gerade den entgegengesetzten Bewegungszustand $[A\,(-)]$ haben, wie die der ersten Gruppe. Wir nehmen also an, daß dieses gleichmäßige Auftreten der Zustände A und $A\,(-)$, wenn es in irgend einem Augenblicke nicht besteht, durch die Zusammenstöße von selbst hervorgerufen wird.

Wir können uns weiter Zustände des Gases denken, welche von dem stationären Zustande abweichen, aber dennoch jenes gleichmäßige Vorkommen zeigen; wir wollen nun annehmen, daß diese Eigentümlichkeit fortwährend bestehen bleibt, während ein solcher abweichender Zustand in den stationären Zustand übergeführt wird.

Kürzer ausgedrückt, wir nehmen an, daß im stationären Zustande

$$f(\xi_1, \ldots -w_r) = f(\xi_1, \ldots w_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

sei, und daß, wenn in einem nicht stationären Zustand diese Relation besteht, dieselbe immerfort bestehen bleibe.

Das Gas befinde sich nun in einem willkürlichen Zustand, für welchen die Gleichung (31) gilt. Wir können dann, ohne mit der Voraussetzung (30) in Widerspruch zu geraten, den speziellen Fall betrachten, daß

$$\varphi = \log f(\xi_1, \ldots w_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

ist. Dann wird, wenn wir zur Abkürzung

$$f(\xi_1, \ldots w_r) = f_1, \; f(\xi'_1, \ldots w'_r) = f_2,$$
$$f(\Xi_1, \ldots W_r) = f'_1, f(\Xi'_1, \ldots W'_r) = f'_2$$

setzen,

$$\delta_1 \Sigma \varphi = \frac{1}{4} \delta t \int \log\left(\frac{f'_1 f'_2}{f_1 f_2}\right) (f_1 f_2 - f'_1 f'_2) dA. \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

§ 23. Um $\delta_2 \Sigma \varphi$ zu berechnen, setzen wir für ein frei weiterfliegendes Molekül

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varkappa_1, \; \frac{d\eta_1}{dt} = \varkappa_2, \ldots \frac{d\zeta_{r-1}}{dt} = \varkappa_{3r-3},$$
$$\frac{du_1}{dt} = \lambda_1, \; \frac{dv_1}{dt} = \lambda_2, \ldots \frac{dw_r}{dt} = \lambda_{3r}.$$

Die Änderung, welche für dasselbe während der Zeit δt die Größe

$$\varphi(t, \xi_1, \ldots \zeta_{r-1}, u_1, \ldots w_r)$$

erleidet, ist dann

$$\delta t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varkappa_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} + \ldots + \varkappa_{3r-3} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_{r-1}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \ldots + \lambda_{3r} \frac{\partial \varphi}{\partial w_r}\right]. \; (34)$$

Man erhält hieraus $\delta_2 \Sigma \varphi$, indem man mit der Molekülzahl einer Gruppe

$$f(t, \xi_1 \ldots w_r) \, d\xi_1 \ldots dw_r$$

multipliziert, und nach $\xi_1 \ldots w_r$ integriert.

Betrachten wir gleich den speziellen, durch (32) angegebenen Fall. Das erste Glied in (34) führt dann zum Integral

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\xi_1 \ldots dw_r,$$

dessen Wert 0 ist, weil die Zahl der Moleküle sich nicht ändert.

Das zweite Glied gibt uns

$$\int \varkappa_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} d\xi_1 \ldots dw_r.$$

Da die Größe $\varkappa_1$ nicht von $\xi_1, \ldots \zeta_{r-1}$ abhängt, so kann die Integration nach ξ_1 unmittelbar ausgeführt werden. Weil man nun annehmen muß, daß die Funktion f für die äußersten Werte, welche die Größen $\xi_1, \ldots w_r$ haben können, verschwindet, wird auch das jetzt betrachtete Integral gleich Null.

Gleiches findet man für die Integrale, welche aus den übrigen die Größen $\varkappa$ enthaltenden Gliedern von (34) hervorgehen, und ebenso auch für die darauf folgenden Glieder. Es sind ja die Beschleunigungen λ, wie wir annehmen wollen, von $u_1, \ldots w_r$ unabhängig.

Schließlich erhalten wir

$$\delta_2 \Sigma \varphi = 0,$$

und wir können dann weiter, da durch die Gleichung (33) der vollständige

Wert von $\delta\Sigma\varphi$ gegeben ist, behaupten, daß im stationären Zustande für jede Art von Zusammenstößen

$$f_1 f_2 = f'_1 f'_2 \qquad (35)$$

sein muß.

Dieser Bedingung genügt Boltzmann, indem er setzt

$$f = Ce^{-h\varepsilon}, \qquad (36)$$

wo C und h positive Konstanten sind, und ε die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie eines Moleküls bedeutet. In der Tat wird hierdurch die Gleichung (35) befriedigt, da die Gesamtenergie der beiden Moleküle durch den Stoß nicht geändert wird.[1])

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß für die in (36) ausgedrückte Zustandsverteilung unsere Voraussetzung (31) wirklich zutrifft.

§ 24. Die Gleichung (35) enthält, wie auch Boltzmann fand, die notwendige Bedingung für den stationären Zustand. Daß die Bedingung auch hinreichend ist, geht nach seiner Ansicht hervor aus der Betrachtung der Anzahl einer gewissen Gruppe von Stößen und der Anzahl der umgekehrten Stöße, welche er als möglich voraussetzt. Diese Zahlen findet er gleich, wenn die Relation besteht.

Nach unseren Betrachtungen ist (35) auch die hinreichende Bedingung, sobald man nur die Hypothese des § 22 annimmt. Denn aus (35) folgt, daß die früher mit dn und dN bezeichneten Zahlen einander gleich sind, und daß also, wenn in der Zeit δt eine gewisse Anzahl von Molekülen den Bewegungszustand A verlieren, ebenso viele andere den Zustand $A\,(-)$ annehmen. Natürlich wird es dann auch nebst Molekülen, welche letzteren Zustand verlieren, ebenso viele andere geben, welche den Zustand A annehmen. Ist nun P die Anzahl der Teilchen, welche die Bewegung A und Q die Zahl derjenigen, welche die Bewegung $A\,(-)$ besitzen, so ist also

$$P + Q = \text{konst.}$$

Da aber nach der Voraussetzung des § 22 immer

$$P = Q$$

ist, so muß auch

$$P = \text{konst.}$$

und der Zustand stationär sein.

1) Boltzmann hat später in seinen Vorlesungen über Gastheorie (Leipzig, 1895, 1898) das Verteilungsgesetz (36) in anderer Weise begründet. Siehe auch seine Abhandlung: Neuer Beweis zweier Sätze über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen, Wien. Sitzungsber., 2. Abt., 95 (1887), p. 153.

VII.

Über die Größe von Gebieten in einer n-fachen Mannigfaltigkeit.

(1905.)

§ 1. Es seien

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

n veränderliche Größen, die, an und für sich betrachtet, viele Werte, wir können uns denken alle möglichen positiven und negativen Werte annehmen können. Aus allen diesen Wertsystemen können wir diejenigen herausgreifen, welche einer gewissen einschränkenden Bedingung unterworfen sind, oder, wie wir sagen wollen, in einem gewissen Bereiche oder Gebiete liegen. Es soll im folgenden von der Größe derartiger Gebiete die Rede sein.

§ 2. Ein Gebiet kann in sehr verschiedener Weise begrenzt sein. Zum Beispiel kann verlangt werden, daß, wenn $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}$ gewisse feste Werte sind, die Summe

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + \cdots + (x_n - x_{n0})^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

unterhalb einer festgesetzten positiven Größe a bleiben soll.

§ 3. Eine Begrenzung sehr einfacher Art erhalten wir, wenn wir festsetzen, daß die Veränderlichen zugleicherzeit zwischen den Grenzen

$$x_1 \text{ und } x_1 + \Delta x_1, \;\; x_2 \text{ und } x_2 + \Delta x_2, \ldots x_n \text{ und } x_n + \Delta x_n$$

liegen. Wir sagen in diesem Fall, das Gebiet sei nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ begrenzt, und nennen $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ seine Elemente. Diese Größen sollen stets positiv sein.

§ 4. Ein Gebiet kann in vielfacher Weise in Teile, die sich aneinander schließen, zerlegt werden. Zum Beispiel besteht der in § 2 genannte Bereich aus zwei Teilen, in welchen x_1 positiv bezw. negativ ist; jeder Teil zerfällt wieder in zwei Gebiete, die sich durch das Vorzeichen von x_2 voneinander unterscheiden, usw. Auch könnte man die Teilgebiete, in welchen der Ausdruck (1) $>$ und $< \frac{1}{2} a$ ist, betrachten.

In ähnlicher Weise läßt sich ein nach den x begrenztes Gebiet in kleinere von derselben Beschaffenheit zerlegen, indem man z. B. das Element Δx_1 in eine gewisse Anzahl kleinerer Zuwächse teilt.

§ 5. Der Größen- oder Inhaltsbestimmung eines Gebietes legen wir die Festsetzungen zugrunde, daß die Größe eines aus verschiedenen Teilen zusammengesetzten Gebietes der Summe der Größen der einzelnen Teile gleich sein soll, und daß zwei nach den x begrenzte Gebiete, deren Elemente gleich sind, als von gleichem Inhalt angesehen werden sollen. In naheliegender Weise folgt hieraus, daß die Größe eines nach den x begrenzten Gebietes dem Produkte seiner Elemente proportional ist und durch den Zahlenwert dieses Produktes dargestellt wird, wenn wir den Inhalt eines solchen Gebietes, bei dem alle Elemente die Größe 1 haben, zur Einheit wählen. Wir haben hiermit auch das Mittel gewonnen, den Inhalt jedes Gebietes, dessen Begrenzung gegeben ist, zu bestimmen. Ein solches kann ja immer als die Summe unendlich vieler nach den x begrenzten Gebiete aufgefaßt werden.

§ 6. Ein Gebiet J wird immer dadurch gekennzeichnet, daß die Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gewissen Ungleichheiten genügen. Wenn wir nun in diesen letzteren x_1 durch $x_1 - a$, wo a eine Konstante ist, ersetzen, so definieren die neuen Ungleichheiten ein Gebiet J', welches alle Wertsysteme der x enthält, die sich von den in J eingeschlossenen dadurch unterscheiden, daß x_1 um den Betrag a größer ist. Wir können füglich sagen, das gegebene Gebiet sei in der Richtung x_1 um die Strecke a verschoben. Dabei bleibt der Inhalt ungeändert, denn wir können J in unendlich viele nach den x begrenzte Gebiete zerlegen, die an der Verschiebung teilnehmen und dabei nach § 5 keine Größenänderung erleiden.

Auch in jeder der Richtungen $x_2, \ldots x_n$ oder in mehreren Richtungen zugleicherzeit kann ein Gebiet verschoben werden. Die Größe bleibt dabei immer ungeändert.

§ 7. Es seien $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, so daß

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_1 + a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_n + a_{n1}\, x_1 + \cdots + a_{nn}\, x_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und umgekehrt

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_1 + b_{11}\, y_1 + \cdots + b_{1n}\, y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_n + b_{n1}\, y_1 + \cdots + b_{nn}\, y_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

mit konstanten Koeffizienten a und b. Wir betrachten ein Gebiet, in welchem zugleicherzeit $y_1, y_2, \ldots y_n$ zwischen den Grenzen

$$y_1 \text{ und } y_1 + \Delta y_1,\ y_2 \text{ und } y_2 + \Delta y_2, \ldots y_n \text{ und } y_n + \Delta y_n$$

eingeschlossen sind. Wir bezeichnen dieses als ein nach den y begrenztes Gebiet und nennen die als positiv vorausgesetzten Größen $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots \Delta y_n$ seine Elemente.

Für den Inhalt J dieses Gebietes, für welches

$$J = (\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots \Delta y_n) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

ein geeignetes Symbol ist, gelten nun folgende von Jacobi herrührende Sätze.

Führt man die Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } D' = \begin{vmatrix} b_{11}, \ldots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n1}, \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

ein, so ist[1])

$$J = \frac{1}{[D]} \Delta y_1 \Delta y_2 \ldots \Delta y_n \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

und

$$J = [D'] \Delta y_1 \Delta y_2 \ldots \Delta y_n . \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

§ 8. Dem Beweise schicken wir die fast überflüssige Bemerkung voraus, daß man in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ das oben Gesagte mit Hilfe einer geometrischen Darstellung erläutern kann, indem man x_1 und x_2, bezw. x_1, x_2 und x_3 als Koordinaten eines Punktes betrachtet. Manche Aussage in den bisherigen Paragraphen erinnert denn auch an Betrachtungen der Elementargeometrie und die in (5) und (6) ausgedrückten Sätze sind als Erweiterungen bekannter Theoreme, den Inhalt eines Parallelogramms oder Parallelepipeds betreffend, zu betrachten. Folgende Beweisführung ist einem Verfahren der dreidimensionalen Geometrie nachgebildet, dem Verfahren nämlich, bei welchem man, ohne etwas an dem Inhalt zu ändern, die drei Paare sich gegenüber stehender Seitenflächen eines Parallelepipeds nach und nach durch Flächen, welche den Koordinatenebenen parallel laufen, ersetzt.

Wir benutzen ferner den Umstand, daß man einen Bezirk auch zum Teil nach den x, zum Teil nach den y begrenzen kann, wobei wir immer eine Schreibweise wie (4) anwenden werden. Also bedeutet

$$(\Delta x_1, \ldots \Delta x_k, \Delta y_{k+1}, \ldots \Delta y_n)$$

ein Gebiet, das hierdurch gekennzeichnet ist, daß $x_1, \ldots x_k$, sowie $y_{k+1}, \ldots y_n$ zwischen bestimmten Grenzen, die um $\Delta x_1, \ldots \Delta x_k$, $\Delta y_{k+1}, \ldots \Delta y_n$ auseinander liegen, eingeschlossen sind. Wir verstehen dabei unter Δx und Δy immer positive Größen und heben noch hervor, daß es, was den Inhalt betrifft, nur auf die Größen dieser Spielräume, nicht aber auf die Anfangswerte ankommt. Dies folgt aus dem Satze, daß sich der Inhalt bei Verschiebung des Gebietes nicht ändert.

§ 9. Wir betrachten nun eine Reihe von Gebieten, von welchen das gegebene (4) das erste ist, während die übrigen die folgenden sind

1) Die eckigen Klammern deuten die absoluten Werte an.

$$J_1 = (\Delta x_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots \Delta y_n),$$
$$J_2 = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_3, \dots \Delta y_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$J_n = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots \Delta x_n).$$

Hier ist jedesmal ein weiteres Δy durch ein Δx ersetzt, und zwar behält jedes Δy, solange es in der Reihe stehen bleibt, den Wert, den es in (4) hatte, und hat jedes Δx für alle weiteren Gebiete denselben Wert, wie für das Gebiet, wo es zuerst erscheint. Was aber diese Werte betrifft, so setzen wir sie folgendermaßen fest.

Unter Δx_1 verstehen wir die mit dem positiven Vorzeichen genommene Änderung, welche x_1 erleidet, wenn bei konstant gehaltenen $y_2, \dots y_n$ die Variable y_1 um Δy_1 zunimmt. Für diese Änderung hat man nach der ersten der Gleichungen (3)

$$\Delta x_1 = b_{11} \Delta y_1$$

und wir setzen also, da wir alle Elemente mit positivem Vorzeichen nehmen wollen,

$$\Delta x_1 = [b_{11}] \Delta y_1 \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

Das zweite Element Δx_2 soll die wieder mit dem positiven Vorzeichen genommene Änderung von x_2 sein für den Fall, daß man, während $x_1, y_3, \dots y_n$ ungeändert bleiben, die Variable y_2 um Δy_2 zunehmen läßt. Mit Rücksicht darauf, daß sich dabei auch y_1 ändern wird, folgern wir aus den beiden ersten der Beziehungen (3)

$$0 = b_{11} \; \Delta y_1 + b_{12} \Delta y_2,$$
$$\Delta x_2 = b_{21} \; \Delta y_1 + b_{22} \Delta y_2.$$

Löst man diese Gleichungen nach Δy_1 und Δy_2 auf, so kommt

$$\Delta y_2 = \frac{b_{11}}{\begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{vmatrix}} \Delta x_2,$$

also

$$\Delta x_2 = \frac{\begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{bmatrix}}{[b_{11}]} \Delta y_2, \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

wo wir, wie wir das auch weiter tun werden, den absoluten Wert der Determinante durch Einschließung in Klammern angedeutet haben.

Allgemein soll Δx_k den absoluten Wert der Änderung bedeuten, die x_k erfährt, wenn man $x_1, x_2, \dots x_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n$ ungeändert läßt, der Variablen y_k aber den Zuwachs Δy_k erteilt. Um ihn zu bestimmen, bedienen wir uns der k ersten der Gleichungen (3). Diese ergeben

$$0 = b_{11} \Delta y_1 + \cdots \qquad + b_{1k} \Delta y_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$0 = b_{(k-1)1} \Delta y_1 + \cdots + b_{(k-1)k} \Delta y_k,$$
$$\Delta x_k = b_{k1} \Delta y_1 + \cdots \qquad + b_{kk} \Delta y_k,$$

und hieraus folgt, durch Auflösung nach den Δy,

$$\Delta y_k = \frac{\begin{vmatrix} b_{11}, \dots\dots & b_{1(k-1)} \\ \cdot & \cdot \\ b_{(k-1)1}, \dots & b_{(k-1)(k-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11}, \dots & b_{1k} \\ \cdot & \cdot \\ b_{k1}, \dots & b_{kk} \end{vmatrix}} \Delta x_k.$$

Wir haben daher zu setzen

$$\Delta x_k = \frac{\begin{bmatrix} b_{11}, \dots & b_{1k} \\ \cdot & \cdot \\ b_{k1}, \dots & b_{kk} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} b_{11}, \dots\dots & b_{1(k-1)} \\ \cdot & \cdot \\ b_{(k-1)1}, \dots & b_{(k-1)(k-1)} \end{bmatrix}} \Delta y_k. \quad \dots \quad (9)$$

§ 10. Um die Gleichheit aller Gebiete $J, J_1, \dots J_n$ zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß

$$J_k = J_{k-1}.$$

Nun sind bei diesen beiden die Grenzen, was

$$x_1, \dots x_{k-1}, \quad y_{k+1}, \dots y_n \quad \dots\dots \quad (10)$$

betrifft, genau dieselben. Was aber x_k anbelangt, so geht diese Variable, wenn wir die Größen (10) festhalten, bei J_{k-1} von einem gewissen von diesen Größen abhängigen Wert, den wir q nennen wollen, bis zu dem Werte $q + \Delta x_k$; daß letzteres richtig ist, folgt eben aus der Weise, wie wir Δx_k definiert haben. In J_k dagegen sind die äußersten Werte von x_k: q' und $q' + \Delta x_k$, wo q' ein beliebiger von den Größen (10) unabhängiger Wert ist. In möglichst kurzer Bezeichnung schreiben wir daher

$$J_{k-1} = \{q, q + \Delta x_k\}, \quad J_k = \{q', q' + \Delta x_k\}.$$

Bei dieser und den weiteren Formeln, wo nur die Begrenzung in Bezug auf x_k angegeben wird, ist fortwährend an dieselbe Begrenzung in Bezug auf die Größen (10) zu denken.

Wir nehmen jetzt an, was uns freisteht, daß die Differenz $q' - q$ des konstanten q' und des variablen q für alle in Betracht kommenden Werte jener Größen positiv ist, und betrachten das Gebiet

$$\{q, q' + \Delta x_k\}.$$

Dieses läßt sich in zweierlei Weise zerlegen. Einmal ist

$$\{q, q' + \Delta x_k\} = \{q, q'\} + \{q', q' + \Delta x_k\} = \{q, q'\} + J_k$$

und zweitens

$$\{q, q' + \Delta x_k\} = \{q, q + \Delta x_k\} + \{q + \Delta x_k, q' + \Delta x_k\}$$
$$= J_{k-1} + \{q + \Delta x_k, q' + \Delta x_k\}.$$

Folglich gilt

$$J_k + \{q, q'\} = J_{k-1} + \{q + \Delta x_k, q' + \Delta x_k\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Man sieht leicht, daß alle in dem Gebiet $\{q, q'\}$ liegenden Wertsysteme in die in dem Gebiet $\{q + \Delta x_k, q' + \Delta x_k\}$ eingeschlossenen übergehen, wenn man, bei konstant gehaltenen $x_1, \ldots x_{k-1}, y_{k+1}, \ldots y_n$, die Werte von x_k um Δx_k zunehmen läßt. Wegen der linearen Beziehungen zwischen den x und den y erleiden dabei auch $x_{k+1}, \ldots x_n$ gewisse für alle Wertsysteme gleiche Änderungen. Das eine Gebiet entsteht also aus dem anderen durch eine Verschiebung, es ist

$$\{q, q'\} = \{q + \Delta x_k, q' + \Delta x_k\}$$

und also auch nach (11), wie zu beweisen war

$$J_k = J_{k-1}.$$

§ 11. Da somit alle Gebiete $J, J_1, \ldots J_n$ gleich sind, und das letzte nach den x begrenzt ist, so daß sein Inhalt durch das Produkt der Elemente $\Delta x_1, \ldots \Delta x_n$ gegeben ist, so hat man auch

$$J = \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n.$$

Führen wir nun hier für Δx_1 und Δx_2 die Werte (7) und (8) ein, und ebenso für die weiteren Elemente die nach der Formel (9) berechneten, so gelangt man sofort zu der Gleichung (6).

Um die Formel (5) zu beweisen, hat man den umgekehrten Weg zu gehen. Indem man mit einem Gebiete

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

anfängt und hier Schritt für Schritt die Begrenzungen nach den x durch solche nach den y ersetzt, was, ähnlich wie oben, ohne Änderung des Inhalts geschehen kann, zeigt es sich, daß ein Gebiet wie (12) und ein Gebiet

$$(\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots \Delta y_n)$$

gleichen Inhalt haben, wenn zwischen den Produkten der Elemente die Beziehung

$$\Delta y_1 \Delta y_2 \ldots \Delta y_n = [D] \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$$

besteht. Daraus folgt die Gleichung (5).

Zugleich ist damit bewiesen, daß $[DD'] = 1$ ist, in Übereinstimmung mit dem Satze der Determinantentheorie, nach welchem $DD' = 1$.

§ 12. Aus den vorstehenden Betrachtungen ergibt sich, wenigstens was die absoluten Werte betrifft, noch ein anderer bemerkenswerter Satz. Um zu diesem zu gelangen, denken wir uns n neue Variablen $z_1, z_2, \ldots z_n$, die nach den linearen Gleichungen

$$z_1 = a_1' + a'_{11} y_1 + \cdots + a'_{1n} y_n,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$z_n = a_n' + a'_{n1} y_1 + \cdots + a'_{nn} y_n$$

von $y_1, \dots y_n$ abhängen, und also auch, wenn man (2) heranzieht, etwa in der Form

$$z_1 = a_1'' + a_{11}'' x_1 + \cdots + a_{1n}'' x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_n = a_n'' + a_{n1}'' x_1 + \cdots + a_{nn}'' x_n$$

in den x ausgedrückt werden können. Zur Unterscheidung bezeichnen wir jetzt die früher D genannte Determinante mit D_{yx} und setzen in ähnlicher Weise

$$D_{zy} = \begin{vmatrix} a_{11}', & \dots & a_{1n}' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}', & \dots & a_{nn}' \end{vmatrix} \text{ und } D_{zx} = \begin{vmatrix} a_{11}'', & \dots & a_{1n}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}'', & \dots & a_{nn}'' \end{vmatrix}.$$

Wir können uns nun drei Gebiete J_x, J_y, J_z denken, die nach den x, den y und den z begrenzt sind, so daß sie durch $(\varDelta x_1, \dots \varDelta x_n)$, $(\varDelta y_1, \dots \varDelta y_n)$, $(\varDelta z_1, \dots \varDelta z_n)$ vorgestellt werden können. Die Größe der Elemente möge dabei so gewählt werden, daß diese Gebiete gleichen Inhalt haben. Dann ist nach dem Gefundenen

$$\varDelta x_1 \dots \varDelta x_n = \frac{1}{[D_{yx}]} \varDelta y_1 \dots \varDelta y_n.$$

Ebenso hat man

$$\varDelta x_1 \dots \varDelta x_n = \frac{1}{[D_{zx}]} \varDelta z_1 \dots \varDelta z_n$$

und man kann in derselben Weise zeigen, daß

$$\varDelta y_1 \dots \varDelta y_n = \frac{1}{[D_{zy}]} \varDelta z_1 \dots \varDelta z_n.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$[D_{zx}] = [D_{yx} \, D_{zy}].$$

§ 13. Es ist weiter folgendes zu bemerken. Wir haben § 5 in willkürlicher Weise festgesetzt, daß ein nach den x begrenztes Gebiet, dessen Elemente sämtlich die Größe 1 haben, den Inhalt 1 hat; wir wollen sagen, wir haben den Inhalt der betrachteten Gebiete **nach dem x-Maß** bestimmt. Ebensogut hätten wir nun aber auch den Inhalt eines nach den y begrenzten Gebietes mit den Elementen 1 zur Einheit wählen können; das könnte man das **y-Maß** nennen. Die beiden Einheiten sind voneinander verschieden, und zwar besteht zwischen denselben ein solches Verhältnis, daß, wenn dasselbe Gebiet im x-Maß die Größe $J_{(x)}$, im y-Maß dagegen die Größe $J_{(y)}$ hat,

$$J_{(x)} = \frac{1}{[D]} J_{(y)} \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

ist. Man kann dies sofort daraus ableiten, daß das Gebiet (4) im x-Maß, wie wir fanden, den Inhalt (5), im y-Maß dagegen den Inhalt $\varDelta y_1 \dots \varDelta y_n$ hat.

§ 14. Wenn wir nur unendlich kleine Änderungen der Variablen betrachten, können wir die Beschränkung auf lineare Relationen zwischen den x und den y fallen lassen; es können ja die letzteren Größen, auch wenn sie beliebige stetige Funktionen der x sind, innerhalb eines unendlich kleinen Bereiches als lineare Funktionen betrachtet werden. Die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, usw. in den Gleichungen (2) sind dabei die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \text{ usw.}$$

und die Determinante D wird zur sogenannten Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

wofür wir kürzer schreiben wollen

$$D = \frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)}.$$

Ebenso wird D' die Funktionaldeterminante der x nach den y

$$D' = \frac{\partial (x_1, \dots x_n)}{\partial (y_1, \dots y_n)}.$$

Unsere Sätze nehmen jetzt folgende Form an. Wenn wir einen unendlich kleinen Spielraum nach solchem Maß messen, daß ein nach den x begrenztes Gebiet mit den Elementen $dx_1, \dots dx_n$ die Größe $dx_1 \dots dx_n$ hat (x-Maß), so hat ein nach den y begrenztes Gebiet mit den Elementen $dy_1, \dots dy_n$ die Größe

$$\left[\frac{\partial (x_1, \dots x_n)}{\partial (y_1, \dots y_n)}\right] dy_1 \dots dy_n = \frac{1}{\left[\frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)}\right]} dy_1 \dots dy_n.$$

Hat aber dasselbe unendlich kleine Gebiet im x-Maß die Größe $J_{(x)}$, nach dem y-Maß aber die Größe $J_{(y)}$, dann ist

$$J_{(x)} = \left[\frac{\partial (x_1, \dots x_n)}{\partial (y_1, \dots y_n)}\right] J_{(y)} = \frac{1}{\left[\frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)}\right]} J_{(y)}. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nebenbei gelangen wir zu den Sätzen

$$\left[\frac{\partial (x_1, \dots x_n)}{\partial (y_1, \dots y_n)} \frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)}\right] = 1$$

und, wenn $z_1, \dots z_n$ Funktionen der y und also auch der x sind,

$$\left[\frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)} \frac{\partial (z_1, \dots z_n)}{\partial (y_1, \dots y_n)} \frac{\partial (x_1, \dots x_n)}{\partial (z_1, \dots z_n)}\right] = 1.$$

§ 15. Es möge noch ein Theorem angeführt werden, das einem bekannten Satze der Stereometrie analog ist.

Nachdem wir eine bestimmte Einheit gewählt hatten, fanden wir für die Größe eines unendlich kleinen nach den x begrenzten Gebietes in der n-fachen Mannigfaltigkeit $(x_1, x_2, \dots x_n)$

$$dx_1 \, dx_2 \dots dx_{n-1} \, dx_n. \qquad (15)$$

Wir können dies auffassen als das Produkt von dx_n mit dem in geeignetem Maß ausgedrückten Inhalt $dx_1 \dots dx_{n-1}$ eines Gebietes in der $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit $(x_1, \dots x_{n-1})$; also wenn wir dieses letztere mit $J^{(n-1)}$ und das Gebiet (15) mit $J^{(n)}$ bezeichnen,

$$J^{(n)} = J^{(n-1)} \, dx_n. \qquad (16)$$

Nach dem erwähnten Satze bleibt nun diese Beziehung auch dann bestehen, wenn man unter $J^{(n-1)}$ ein in beliebiger Weise begrenztes Gebiet in der Mannigfaltigkeit $(x_1, \dots x_{n-1})$ versteht und unter $J^{(n)}$ ein Gebiet, das in Bezug auf $x_1, \dots x_{n-1}$ in derselben Weise wie $J^{(n-1)}$, und dann außerdem noch nach x_n begrenzt ist. Man sieht das leicht, wenn man erwägt, daß man in diesem Fall das Gebiet $J^{(n-1)}$ in kleinere Gebiete, die nach $x_1, \dots x_{n-1}$ begrenzt sind, zerlegen kann, und daß jedem dieser Gebiete ein Teil von $J^{(n)}$ der nach $x_1, \dots x_n$ begrenzt ist, entspricht. Da nun für jeden Teil von $J^{(n-1)}$ und dem dazu gehörigen Teil von $J^{(n)}$ eine Formel wie (16) gilt, muß die Gleichung auch für die ganzen Gebiete richtig sein.

Wollen wir nun endlich bei dem Gebiete $J^{(n)}$ die Begrenzung nach x_n durch eine Begrenzung nach irgend einer Größe y_n, die eine Funktion von $x_1, \dots x_n$ ist, ersetzen, so verwandelt sich, wie man leicht sieht, (16) in

$$J^{(n)} = J^{(n-1)} \frac{dy_n}{\left[\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right]}. \qquad (17)$$

Diese Formel folgt übrigens auch direkt aus dem § 14 Gefundenen, wenn wir annehmen, daß $y_1, \dots y_{n-1}$ nur von $x_1, \dots x_{n-1}$, nicht aber von x_n abhängen. In der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)}$$

haben dann die in der letzten Kolumne stehenden Elemente

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_n}, \dots \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n}$$

den Wert 0, so daß

$$\frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)} = \frac{\partial (y_1, \dots y_{n-1})}{\partial (x_1, \dots x_{n-1})} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

wird. Für die Größe eines nach den y begrenzten Gebietes mit den Elementen $dy_1, \dots dy_{n-1}, dy_n$ läßt sich daher schreiben

$$J^{(n)} = \frac{dy_1 \dots dy_{n-1} \, dy_n}{\left[\frac{\partial (y_1, \dots y_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)}\right]} = \frac{dy_1 \dots dy_{n-1}}{\left[\frac{\partial (y_1, \dots y_{n-1})}{\partial (x_1, \dots x_{n-1})}\right]} \cdot \frac{dy_n}{\left[\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right]}.$$

In dem letzten Ausdruck bedeutet der erste Faktor den Inhalt $J^{(n-1)}$ eines in beliebiger Weise begrenzten Gebietes in der Mannigfaltigkeit $(x_1, \ldots x_{n-1})$ und da $J^{(n)}$, was diese Mannigfaltigkeit betrifft, in derselben Weise begrenzt ist (nämlich nach $y_1, \ldots y_{n-1}$), und außerdem nach y_n, so sind wir gerade wieder zu der Formel (17) gekommen.

§ 16. In den Anwendungen kommt oft der Fall vor, daß die Variablen $y_1, y_2, \ldots y_n$ nur unendlich wenig von $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschieden sind.

Ist

$$y_1 = x_1 + \eta_1, \quad y_2 = x_2 + \eta_2, \ldots y_n = x_n + \eta_n,$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ unendlich kleine von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängige Größen von derselben Ordnung, wir wollen sagen von der ersten Ordnung, sind, dann sind in der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(y_1, \ldots y_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)}$$

die auf der Hauptdiagonale stehenden Elemente

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1 + \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}, \; \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 1 + \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n}, \quad \cdot \quad \cdot \qquad (18)$$

während alle übrigen Elemente unendlich klein sind. Beschränkt man sich also auf die Größen erster Ordnung, so reduziert sich die Determinante auf das Produkt der Größen (18), und man erhält

$$\frac{\partial(y_1, \ldots y_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)} = 1 + \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n}.$$

Die Funktionaldeterminante hat somit den Wert 1, sobald jedes η unabhängig ist von dem entsprechenden x, also η_1 von x_1, η_2 von x_2 usw.

§ 17. Wir sind jetzt imstande die von Boltzmann herrührende Gleichung (26) der vorstehenden Abhandlung (p. 146) zu beweisen.

Zu diesem Zwecke fassen wir den Vorgang eines Zusammenstoßes etwas näher ins Auge. Obgleich wir in unseren Betrachtungen die Dauer der Wechselwirkung stillschweigend als sehr kurz vorausgesetzt haben, nimmt dieselbe in Wirklichkeit eine gewisse Zeit τ in Anspruch, während welcher sich die Größen $p_1, \ldots p_{s-6}$ und $q_1, \ldots q_s$, welche die Konfiguration der Moleküle und die Geschwindigkeiten der einzelnen Atome charakterisieren, sowie auch die Größen $p_{s-5}, p_{s-4}, p_{s-3}$, welche die gegenseitige Lage der Schwerpunkte bestimmen, kontinuierlich ändern. Wir wollen die Werte dieser Variablen für irgend einen Zeitpunkt t mit ungestrichenen Buchstaben, die Werte für die Zeit $t + dt$ aber mit den entsprechenden gestrichenen Buchstaben $p_1', \ldots q_s'$ bezeichnen.

Wir betrachten nun eine sehr große Zahl von Zusammenstößen, die sich, was die Konfiguration der Moleküle, die Geschwindigkeiten

der Atome, die gegenseitige Lage der Schwerpunkte und den Zeitpunkt, in dem die Wechselwirkung anfängt, betrifft, unendlich wenig voneinander unterscheiden. Zur Zeit t ist dann den Größen p und q ein gewisser Spielraum J offen gelassen, und ebenso liegen zur Zeit $t + dt$ die Variablen p' und q' in einem Gebiete J', und zwar wollen wir die Größe von J in p, q-Maß, und die von J' in p', q'-Maß angeben. Hiermit ist gemeint, daß wenn J gerade nach den p und q begrenzt wäre, $J = dp_1 \ldots dq_s$ sein würde; ebenso hätte man $J' = dp_1' \ldots dq_s'$, wenn das zweite Gebiet nach den Größen $p_1', \ldots q_s'$ begrenzt wäre.

Offenbar liegt hier der bei der Gleichung (14) vorausgesetzte Fall vor, daß dasselbe unendlich kleine Gebiet nach zwei verschiedenen Maßen angegeben wird, und ist also

$$J' = \left[\frac{\partial (p_1', \ldots q_s')}{\partial (p_1, \ldots q_s)}\right] J.$$

Die hier stehende Funktionaldeterminante hat nun aber, wie aus dem in § 16 Gesagten hervorgeht, den Wert 1, wenn wir annehmen, daß die bei dem Zusammenstoß wirkenden Kräfte nur von der gegenseitigen Lage der Atome und nicht von den Geschwindigkeiten abhängen. Man hat nämlich für jedes p und jedes q

$$p' = p + \dot{p}\,dt, \quad q' = q + \dot{q}\,dt.$$

Da die p relative Koordinaten sind, so sind die $\dot{p}$ relative Geschwindigkeiten, die sich sämtlich in den Geschwindigkeiten $q_1, \ldots q_s$ ausdrücken lassen und dann die p nicht enthalten. Andererseits sind die $\dot{q}$ Beschleunigungen; diese hängen mit den Kräften zusammen und werden also nach unserer Voraussetzung, unabhängig von den Werten der q, durch die relativen Koordinaten p bestimmt. Jedes $\dot{p}\,dt$ ist somit von dem entsprechenden p, und jedes $\dot{q}\,dt$ von dem entsprechenden q unabhängig.

§ 18. Es zeigt sich also, daß

$$J' = J,$$

d. h. daß der Spielraum, der die gleichzeitig bestehenden Werte von $p_1, \ldots p_{s-3}, q_1, \ldots q_s$ umfaßt, wenn wir ihn für jeden Augenblick in p, q-Maß ausdrücken, sich im Laufe der Wechselwirkung nicht ändert. Folglich haben wir auch

$$J_{t1} = J_{t2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

wenn t_1 die Zeit ist, wo der erste der betrachteten Stöße anfängt, und t_2 die Zeit, wo der letzte derselben zu Ende gekommen ist.

Wir wollen nun das Gebiet J_{t1}, was die Variablen

$$p_1, \ldots p_{s-4}, q_1, \ldots q_s \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

anbelangt, in beliebiger Weise begrenzen, so daß wir es mit einem gewissen Bezirke $d\lambda$ in der Mannigfaltigkeit (20) zu tun haben; dem entspricht zu der Zeit t_2 ein bestimmtes Gebiet dA in der Mannigfaltigkeit

$$P_1, \dots P_{s-4}, Q_1, \dots Q_s. \quad \dots \dots \quad (21)$$

Die noch fehlende Begrenzung von J_{t1} soll nicht etwa nach der Variablen p_{s-3}, sondern, was einfacher ist, nach der in der vorigen Abhandlung (p. 141) eingeführten Größe F vorgenommen werden. Wir setzen als die eine Grenze den Wert F_0 fest, der den Anfang eines Zusammenstoßes charakterisiert, als die andere Grenze aber $F_0 + dF$, wobei wir dF positiv oder negativ wählen, je nachdem zu Anfang der Wechselwirkung

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t1} = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\varrho_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2}\varrho_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}\varrho_{s-3}\right)_{t1} \quad \dots \quad (22)$$

negativ oder positiv ist. Nach der Formel (17) ist dann

$$J_{t1} = d\lambda \frac{[dF]}{\left[\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}\right]_{t1}} \quad \dots \dots \quad (23)$$

Der zuletzt angenommenen Begrenzung des Bezirkes J_{t1} entspricht nun auch eine ganz bestimmte Begrenzung von J_{t2}, die wir der bereits in dA enthaltenen hinzuzufügen haben. Um sie zu finden, achten wir auf die Stöße, welche mit bestimmten Werten der Größen (20) einsetzen. Diese finden alle in genau derselben Weise statt und enden also mit denselben Werten der Variablen (21); sie unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß sie zu verschiedenen Zeiten anfangen. Da die Dauer für alle gleich ist, so kommen sie auch zu verschiedenen Zeiten zu Ende, und zwar liegen die Endzeiten ebenso weit auseinander wie die Anfangszeiten.

Während für diejenigen Molekülpaare, für welche zu der Zeit t_1 die Funktion F gerade den Wert F_0 hat, die Wechselwirkung eben zu dieser Zeit beginnt, wird für die, welchen der Wert $F_0 + dF$ zukommt, noch eine Zeit

$$\frac{dF}{\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t1}} \quad \dots \dots \quad (24)$$

verstreichen, bevor der für die Wechselwirkung entscheidende Wert von F erreicht ist. Folglich liegen auch zu der Zeit t_2 für die verschiedenen Molekülpaare, welche bestimmte Werte von $P_1, \dots P_{s-4}, Q_1, \dots Q_s$ haben, die seit dem Ende des Zusammenstoßes verflossenen Zeiten in einem Intervall von der Länge (24), und die Werte von F, die alle unendlich wenig von dem das Ende charakterisierenden Werte verschieden sind, in einem Intervall von der Größe

$$dF_{t2} = \left[\frac{dF}{\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t1}} \left(\frac{dF}{dt}\right)_{t2}\right]. \quad \dots \dots \quad (25)$$

Bei Vernachlässigung von Größen, die in J_{t2} Glieder bringen würden, unendlich klein gegen J_{t2} selbst, dürfen wir hier unter $\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t2}$ den Wert verstehen, der gleich nach Beendigung der Wechselwirkung besteht; auch ist es erlaubt, die Größe dF_{t2} für alle in Betracht kommenden Werte der Variablen (21) als gleich anzusehen. Man ersieht hieraus, daß das Gebiet J_{t2} dadurch charakterisiert ist, daß die äußersten bei bestimmten $P_1, \ldots P_{s-4}, Q_1, \ldots Q_s$ vorkommenden Werte von F um dF_{t2} auseinander liegen. Wir dürfen daher den Inhalt nach der Regel berechnen, die für ein nach F begrenztes Gebiet gilt, und finden, mit abermaliger Benutzung der Formel (17),

$$J_{t2} = dA \frac{[dF_{t2}]}{\left[\frac{\partial F}{\partial P_{s-3}}\right]_{t2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Es erübrigt nur noch, die gefundenen Werte (23) und (26) in (19) einzusetzen. Mit Rücksicht auf (25) erhalten wir

$$\left[\frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{\partial F}{\partial P_{s-3}}}\right]_{t2} dA = \left[\frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{\partial F}{\partial p_{s-3}}}\right]_{t1} d\lambda,$$

was gerade die zu beweisende Gleichung ist. Für die Zeit t_1 gilt nämlich (22) und ebenso für die Zeit t_2

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial P_1} R_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2} R_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial P_{s-3}} R_{s-3}$$

(vgl. oben p. 146); die mit dA und $d\lambda$ multiplizierten Faktoren sind also, was früher mit $[\Omega]$ und $[\omega]$ bezeichnet wurde.

VIII.

Über die Entropie eines Gases.

(Umarbeitung der Abhandlung: Over de entropie eener gasmassa, Amsterdam, Zittingsverslag Akad. v. Wet. 5 [1896], p. 252.)

Der bekannte, zuerst von Boltzmann bewiesene Satz der kinetischen Gastheorie, nach welchem sich eine gewisse von der Molekularbewegung abhängige Funktion H angeben läßt, die infolge der Zusammenstöße nur abnehmen kann, erinnert sofort an das Entropiegesetz und man findet denn auch, daß für stationäre Zustände des Gases der Entropiewert mit dem Werte der Größe $-H$ nahe zusammenhängt. Daß letztere Größe, ihrer Bedeutung nach, sich auch bei unendlich langsamen Zustandsänderungen notwendig wie die Entropie verhalten muß, möge im folgenden gezeigt werden.

§ 1. Wir betrachten eine Gasmasse, deren Moleküle vollkommen glatte und starre, elastische Kugeln, jede mit der Masse m, sind, und denken uns in einer Hilfsfigur, von einem festen Punkte O aus, eine große Zahl von Vektoren gezogen, deren jeder die Geschwindigkeit eines Moleküls in Richtung und Größe darstellt. Die Endpunkte dieser Vektoren nennen wir Geschwindigkeitspunkte, so daß jedes Molekül seinen Geschwindigkeitspunkt hat.

Es seien ferner: σ eine ruhende geschlossene Fläche in der Gasmasse, S der von derselben eingeschlossene Raum, $d\sigma$ irgend ein Flächen- und dS ein Volumenelement. Mit $d\lambda$ bezeichnen wir ein Raumelement in der Hilfsfigur, dem Geschwindigkeitsdiagramm, wie diese heißen möge, mit x, y, z die Koordinaten eines Punktes in der Gasmasse, und mit ξ, η, ζ die auf O bezogenen Koordinaten eines Punktes in dem Geschwindigkeitsdiagramm, so daß, wenn letzterer gerade ein Geschwindigkeitspunkt ist, ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten des betreffenden Moleküls sind.

Für die Anzahl der Moleküle, welche sich zur Zeit t in einem Elemente dS am Punkte (x, y, z) befinden, und deren Geschwindigkeitspunkte in dem Elemente $d\lambda$ am Punkte (ξ, η, ζ) liegen, können wir nun schreiben[1])

$$F(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)\, d\lambda\, dS, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

1) Siehe diese Sammlung, p. 75.

wo die Funktion F von dem Zustande des Gases abhängt und ihrerseits diesen Zustand völlig bestimmt. Ist sie bekannt, so kann man die Anzahl n der Moleküle pro Volumeneinheit, sowie die mittlere Geschwindigkeit (u, v, w) der in einem Element dS liegenden Teilchen berechnen nach den Formeln

$$\int F\,d\lambda = n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\int F\xi\,d\lambda = nu, \quad \int F\eta\,d\lambda = nv, \quad \int F\zeta\,d\lambda = nw, \quad \ldots \quad (3)$$

in welchen über den ganzen Raum des Geschwindigkeitsdiagramms zu integrieren ist. Das Resultat kann von x, y, z, t abhängen. Wir nehmen indes an, daß die Molekülzahl n sich nur unendlich langsam von Punkt zu Punkt ändert. Was die Geschwindigkeiten u, v, w betrifft, so mögen diese an allen Stellen unendlich klein sein.

Die Gruppe von Molekülen, deren Anzahl durch den Ausdruck (1) gegeben wird, wollen wir kurz die Gruppe (1) nennen.

§ 2. Die Funktion F genügt einer Gleichung, welche man als die Grundformel für alle Probleme, die das Molekülsystem uns bietet, betrachten kann. Oben, p. 75—77, wurde bereits gezeigt, auf welchem Wege man zu derselben gelangen kann. Indes muß die Ableitung hier kurz wiederholt werden, da wir, was die äußeren Kräfte betrifft, jetzt eine etwas allgemeinere Voraussetzung zugrunde legen wollen. Wir denken uns nämlich, daß die Kraft zwar für alle Moleküle einer bestimmten Gruppe wie (1) gleiche Richtung und Größe hat, daß sie aber von einer Gruppe zur anderen in irgend einer Weise variieren kann; auch möge sie sich im Laufe der Zeit ändern. Die Komponenten X, Y, Z der durch die äußere Kraft verursachten Beschleunigung eines Moleküls sind somit als Funktionen von $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$ zu betrachten.

Wir wollen jetzt sehen, was im Laufe eines Zeitelementes dt aus der Gruppe (1) wird, die wir für den Augenblick t ins Auge gefaßt haben. Abstrahieren wir dabei zunächst von den Zusammenstößen, so dürfen wir sagen, die Teilchen befinden sich zur Zeit $t + dt$ in einem Volumenelemente dS' am Punkte $(x + \xi\,dt,\ y + \eta\,dt,\ z + \zeta\,dt)$, während ihre Geschwindigkeitskomponenten in ein Element $d\lambda'$ gekommen sind, das an einem Punkte mit den Koordinaten

$$\xi' = \xi + X dt, \quad \eta' = \eta + Y dt, \quad \zeta' = \zeta + Z dt \quad \ldots \quad (4)$$

liegt.

Man sieht leicht, daß

$$dS' = dS \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

und

$$d\lambda' = \Delta\,d\lambda, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

wenn Δ die Funktionaldeterminante der Größen (4) nach ξ, η, ζ be-

deutet. Da wir uns auf Glieder von der Ordnung dt beschränken dürfen, so ist

$$\Delta = 1 + \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

zu setzen.

Wir haben nun ferner auch die Zusammenstöße zu berücksichtigen. Bezeichnen wir mit

$$a\, d\lambda\, dS\, dt$$

die Anzahl derselben, in der Zeit dt, bei welchen **vor** dem Zusammentreffen eins der Teilchen zu der Gruppe (1) gehört, mit

$$b\, d\lambda\, dS\, dt$$

aber die Anzahl der Stöße, bei welchen dies **nach** dem Zusammentreffen der Fall ist, so kommen wir zum Schluß, daß zur Zeit $t + dt$ in dem Elemente dS'

$$F(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)\, d\lambda\, dS + (b - a)\, d\lambda\, dS\, dt \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

Teilchen enthalten sind, die ihre Geschwindigkeitspunkte im Elemente $d\lambda'$ an dem durch (4) bestimmten Ort haben. Der Ausdruck (8) muß also denselben Wert haben wie

$$F(\xi + X dt,\ \eta + Y dt,\ \zeta + Z dt,\ x + \xi dt,\ y + \eta dt,\ z + \zeta dt,\ t + dt)\, d\lambda' dS',$$

wofür wir, mit Rücksicht auf (5), (6) und (7), auch schreiben dürfen

$$\begin{aligned} & F(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)\, d\lambda\, dS + \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) F\, d\lambda\, dS\, dt \\ & + \left(X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) d\lambda\, dS\, dt \\ & = F(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)\, d\lambda\, dS \\ & + \left(\frac{\partial (XF)}{\partial \xi} + \frac{\partial (YF)}{\partial \eta} + \frac{\partial (ZF)}{\partial \zeta} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) d\lambda\, dS\, dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt die gesuchte Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\xi \frac{\partial F}{\partial x} - \eta \frac{\partial F}{\partial y} - \zeta \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial (XF)}{\partial \xi} - \frac{\partial (YF)}{\partial \eta} - \frac{\partial (ZF)}{\partial \zeta} + (b - a). \quad (9)$$

§ 3. Die Größe H, deren Änderung mit der Zeit wir jetzt zu untersuchen haben, definieren wir durch die Gleichung

$$H = \iint F \log F\, d\lambda\, dS,$$

wo das doppelte Integrationszeichen bedeuten soll, daß sowohl über den ganzen von der Fläche σ eingeschlossenen Raum S als auch über die volle Ausdehnung des Geschwindigkeitsdiagramms integriert werden muß. Wir können auch sagen, es handle sich um die Summe aller Werte, die man erhält, wenn man für jedes Molekül $\log F$ mit den demselben zur Zeit t zukommenden Werten von $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ bildet.

Bei der Berechnung von $\frac{dH}{dt}$ beachten wir, daß für festgehaltene Werte von $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$,

$$\frac{\partial (F \log F)}{\partial t} = (1 + \log F) \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Außerdem setzen wir

$$\iint F \, d\lambda \, dS = N,$$

welche Größe offenbar die Anzahl der Moleküle bedeutet, welche zur Zeit t in dem betrachteten Raum liegen.

Es ist dann zunächst

$$\frac{dH}{dt} = \iint (1 + \log F) \frac{\partial F}{\partial t} d\lambda \, dS = \frac{dN}{dt} + \iint \log F \cdot \frac{\partial F}{\partial t} d\lambda \, dS \quad (10)$$

und hier zerfällt das letzte Glied, wenn wir den Wert (9) einführen, in mehrere Integrale, in deren drei ersten man die Integration nach x, y oder z völlig durchführen kann, da

$$\log F \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(F \log F - F), \quad \text{usw.}$$

Man erhält in dieser Weise für die Summe jener drei Integrale, wenn man die Richtungswinkel der an der Fläche σ nach außen gezogenen Normale α, β, γ nennt,

$$-\iint (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma)(F \log F - F) \, d\lambda \, d\sigma$$
$$= -\iint (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma) F \log F \, d\lambda \, d\sigma - \frac{dN}{dt},$$

wobei ich den Satz benutzt habe, daß

$$\iint (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma) F \, d\lambda \, d\sigma = -\frac{dN}{dt}.$$

Es geht dies daraus hervor, daß für die Moleküle, deren Geschwindigkeitspunkte in $d\lambda$ liegen und deren Anzahl pro Volumeneinheit $F d\lambda$ beträgt, $\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma$ die Komponente der Geschwindigkeit nach der Richtung der Normale ist. Die Anzahl der zu jener Gruppe $d\lambda$ gehörigen Moleküle, welche in der Zeit dt das Element $d\sigma$ durchsetzen, mit dem positiven oder negativen Vorzeichen genommen, je nachdem die Bewegung nach außen oder nach innen stattfindet, ist infolgedessen

$$(\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma) F \, d\lambda \, d\sigma \, dt.$$

Was die den Gliedern

$$-\frac{\partial (XF)}{\partial \xi}, \quad \text{usw.}$$

entsprechenden Teile des letzten Integrals in (10) betrifft, so lassen sich diese mittels partieller Integration nach ξ, η oder ζ umformen.

Die integrierten Glieder verschwinden dabei wegen der raschen Abnahme von F für unendlich große positive oder negative Werte der Geschwindigkeitskomponenten und man hat

$$-\int\int\frac{\partial(XF)}{\partial\xi}\log F\,d\lambda\,dS=\int\int X\frac{\partial F}{\partial\xi}\,d\lambda\,dS,\ \text{usw.}$$

Schließlich wird

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt}=&-\int\int(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)\,F\log F\,d\lambda\,d\sigma\\&+\int\int\left(X\frac{\partial F}{\partial\xi}+Y\frac{\partial F}{\partial\eta}+Z\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)d\lambda\,dS\\&+\int\int(b-a)\log F\,d\lambda\,dS\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(11)\end{aligned}$$

§ 4. Bevor wir die noch übrig gebliebenen Integrale näher besprechen, wollen wir noch etwas an der Fassung des Problems ändern. Während nämlich im Vorhergehenden die Fläche σ als ruhend vorausgesetzt wurde, wollen wir jetzt annehmen, daß jeder Punkt derselben sich mit der an der betreffenden Stelle bestehenden mittleren Geschwindigkeit des Gases verschiebt, und daß also die Fläche fortwährend gleich viel Moleküle umschließt. Berechnet man in dieser Voraussetzung für jeden Augenblick die Größe H für den von der Fläche begrenzten Raum, dann erhält man für den Differentialquotienten nach der Zeit einen Wert, der von dem bis jetzt betrachteten verschieden ist, und den wir daher zur Unterscheidung mit

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)$$

bezeichnen wollen.

Hatte nun die bewegliche Fläche zur Zeit t die Lage, die im obigen σ genannt wurde, dann erreicht sie zur Zeit $t+dt$ eine andere, unendlich wenig davon entfernte Lage σ'. Die Schicht zwischen σ und σ' läßt sich in Elemente zerlegen, für deren Größe wir schreiben können

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\sigma\,dt,$$

und zwar ist dieser Ausdruck positiv oder negativ, je nachdem das betreffende Element außerhalb oder innerhalb σ liegt. Daraus folgt für die Differenz der Werte, welche sich für H ergeben, wenn man einmal σ' und dann σ als Grenze des Integrationsgebietes nimmt,

$$dt\int\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,F\log F\,d\lambda\,d\sigma,$$

was, mit dt dividiert, den Wert von

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)-\frac{dH}{dt}$$

liefert. Der neue Differentialquotient hat demnach den Wert

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) = \int\int [(u-\xi)\cos\alpha + (v-\eta)\cos\beta + (w-\zeta)\cos\gamma] F \log F \, d\lambda \, d\sigma$$
$$+ \int\int \left(X\frac{\partial F}{\partial \xi} + Y\frac{\partial F}{\partial \eta} + Z\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) d\lambda \, dS$$
$$+ \int\int (b-a) \log F d\lambda \, dS. \quad (12)$$

Wir fügen hinzu, daß, wie man leicht sieht, und wie sich auch aus (2) und (3) folgern läßt,

$$\int [(u-\xi)\cos\alpha + (v-\eta)\cos\beta + (w-\zeta)\cos\gamma] F d\lambda = 0. \quad (13)$$

§ 5. Wir wenden uns jetzt den Vereinfachungen zu, welche in dem Ausdruck (12) möglich sind, wenn das Gas sich nur sehr wenig von einem stationären Zustande entfernt.

In einem Elemente dS haben zur Zeit t die Anzahl n der Moleküle pro Volumeneinheit und die mittlere kinetische Energie der neben der Strömungsgeschwindigkeit bestehenden Molekularbewegung, d. h. der Mittelwert k von

$$\tfrac{1}{2} m [(\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + (\zeta - w)^2],$$

ganz bestimmte Größe. Beständen nun diese Werte von n und k in einem ruhenden im stationären Zustand befindlichen Gase, dann hätte nach dem Maxwell'schen Gesetz die Funktion F die Gestalt

$$F_0 = C e^{-\frac{3m}{4k}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}, \quad (14)$$

$$C = n\sqrt{\left(\frac{3m}{4\pi k}\right)^3}, \quad (15)$$

und von dieser Funktion F_0 soll nun F nur unendlich wenig verschieden sein. Man bemerke, daß

$$\int F_0 d\lambda = n,$$

$$\int \xi F_0 d\lambda = 0, \quad \int \eta F_0 d\lambda = 0, \quad \int \zeta F_0 d\lambda = 0$$

und also

$$\int [(u-\xi)\cos\alpha + (v-\eta)\cos\beta + (w-\zeta)\cos\gamma] F_0 d\lambda$$
$$= n(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma).$$

Setzt man nun

$$F = F_0 + f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t), \quad (16)$$

so ist, wie aus der soeben erhaltenen Gleichung, in Verbindung mit (13) folgt,

$$\int [(u-\xi)\cos\alpha + (v-\eta)\cos\beta + (w-\zeta)\cos\gamma] f d\lambda$$
$$= -n(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma). \quad (17)$$

§ 6. Die Größen

$$dt\int a \log F d\lambda \quad \text{und} \quad dt\int b \log F d\lambda$$

bedeuten offenbar die Summen, für alle in der Volumeneinheit einen Stoß erleidenden Moleküle, der Werte von $\log F$, welche den Anfangs-, bzw. den Endgeschwindigkeiten entsprechen. Das letzte Glied in (12) hängt daher aufs engste mit der oben, p. 138, betrachteten Änderung von H infolge der Zusammenstöße zusammen und läßt sich in der dort angegebenen Weise berechnen. Man gelangt dabei zu einem Integral, in welchem jedes Element einen Faktor von der Gestalt

$$\log\left(\frac{F'_1 F'_2}{F_1 F_2}\right)(F_1 F_2 - F'_1 F'_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

enthält, und zwar läßt sich die Bedeutung der Symbole F_1, F_2, F'_1, F'_2 in folgender Weise angeben.

Sind bei irgend einem Zusammenstoße (ξ_1, η_1, ζ_1) und (ξ_2, η_2, ζ_2) die beiden Anfangs-, $(\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1)$ und $(\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2)$ aber die Endgeschwindigkeiten, dann sind F_1, F_2, F'_1, F'_2 die diesen vier Wertsystemen entsprechenden Werte der Funktion F.

Das Eigentümliche des Maxwell'schen Gesetzes liegt nun darin, daß es die beiden Faktoren in (18) zum Verschwinden bringt, indem es die Gleichung

$$F_1 F_2 = F'_1 F'_2$$

zur Folge hat. Wir dürfen daraus schließen, daß bei der vorausgesetzten Abweichung von jenem Gesetz beide Faktoren unendlich klein werden. Somit dürfen wir von dem letzten Gliede in (12) absehen; es wird ja unendlich klein zweiter Ordnung.

§ 7. In dem ersten Gliede von (12) setzen wir, da die Funktion f in (16) unendlich klein ist,

$$F \log F = F \log F_0 + f = F \log C - \frac{3m}{4k}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)F + f,$$

und es ergibt sich dann, mit Rücksicht auf (13) und (17)

$$-\frac{3m}{4k}\int\int[(u-\xi)\cos\alpha + (v-\eta)\cos\beta + (w-\zeta)\cos\gamma](\xi^2+\eta^2+\zeta^2)F d\lambda\, d\sigma$$
$$-\int n(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\sigma. \quad (19)$$

Der erste Teil dieses Ausdrucks hat eine einfache Bedeutung. Da nämlich ein Element der sich bewegenden Fläche in der Zeit dt von

$$[(\xi - u)\cos\alpha + (\eta - v)\cos\beta + (\zeta - w)\cos\gamma)]F d\lambda\, d\sigma\, dt$$

Molekülen der Gruppe (1) durchsetzt wird, und jedes dieser Teilchen eine kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

mit sich führt, so haben wir es mit dem mit $-\frac{3}{2k}$ multiplizierten und mit dt dividierten Betrag an kinetischer Energie zu tun, welcher in der Zeit dt durch die Fläche hindurch mehr nach innen als nach außen getragen wird. Schreiben wir für diesen Betrag dT, dann verwandelt sich (19) in

$$-\frac{3}{2k}\frac{dT}{dt} - \int n(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\sigma.$$

§ 8. Was endlich das zweite Integral in (12) anbelangt, so dürfen wir in demselben einfach F durch die Funktion F_0 ersetzen; wir betrachten ja auch die äußeren Kräfte als unendlich klein. Wir substituieren also

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{3m}{2k}\xi F_0, \quad \text{usw.},$$

wobei wir schließlich, was offenbar gestattet ist, wieder F statt F_0 schreiben wollen. Das Resultat lautet dann

$$-\frac{3}{2k}\int\int m(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\,F\,d\lambda\,dS.$$

Man sieht sofort, daß das hier auftretende Integral die für die Zeiteinheit berechnete Arbeit aller auf die Teilchen wirkenden äußeren Kräfte (mX, mY, mZ) bedeutet.

Wäre nun die äußere Kraft unabhängig von der Geschwindigkeit der Moleküle, so hätte dieses Integral den Wert

$$\int m(Xu + Yv + Zw)\,n\,dS,$$

was eine Größe zweiter Ordnung ist. Die Arbeit kann aber von der ersten Ordnung sein und auch für $u = v = w = 0$ einen von Null verschiedenen Wert haben, sobald die Kraft für Moleküle verschiedener Geschwindigkeit nicht gleich ist. Z. B. ergibt sich ein positiver Wert, wenn für jedes Molekül die Kraft die Richtung der Geschwindigkeit hat.

Derartige die Molekularbewegung direkt affizierende Kräfte, welche etwa im Fall der Absorption strahlender Wärme existieren könnten, würden das Gas „erwärmen", und man kann daher die Energie, welche sie dem System erteilen, füglich als eine zugeführte Wärmemenge auffassen. Für diese Wärmezufuhr, in Arbeitseinheiten ausgedrückt und für das Zeitelement dt genommen, wollen wir das Zeichen dQ_i einführen, wobei der Index i daran erinnern soll, daß es sich jetzt um eine dem Innern des Körpers mitgeteilte Wärme handelt.

Zusammenfassend erhalten wir, wenn wir jetzt die Klammern um $\frac{dH}{dt}$ in (12) fortlassen,

$$dH = -\frac{3}{2k}(dT + dQ_i) - dt\int n(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\sigma. \quad (20)$$

§ 9. Um zu dem Satze zu gelangen, den wir beweisen wollen, stellen wir uns jetzt vor, das Gas sei von einer festen Hülle Σ eingeschlossen, von welcher es einen Druck erleidet und mit der es, infolge einer unendlich kleinen Temperaturdifferenz, Wärme austauschen kann. Die verwickelten und der mathematischen Behandlung unzugänglichen Vorgänge, welche dabei stattfinden, bleiben auf eine sehr dünne, sich der Wand anlagernde Schicht beschränkt, und wir können daher annehmen, daß die Fläche σ, von der in unseren Formeln die Rede ist, ganz nahe an der Wand liegt. Wir denken uns, daß sie den Bewegungen dieser letzteren, wenn solche bestehen, folgt, und daß dabei ihre Entfernung von der Wand fortwährend eine sehr kleine Größe Δ behält. Es wird dann auch der Bedingung genügt (§ 4), daß die Fläche sich mit der mittleren Geschwindigkeit (u, v, w) des Gases bewegen soll. Wegen der kleinen Dicke der zwischen σ und Σ liegenden Schicht dürfen wir nämlich annehmen, jedes Element derselben enthalte fortwährend gleich viel Moleküle; es muß also jedes Element $d\sigma$ (dessen Dimensionen wir uns sehr groß gegen Δ denken) in beiden Richtungen von gleich viel Molekülen durchsetzt werden. Die Größen u, v, w in Gleichung (20) können wir nun auch als die Geschwindigkeiten eines Punktes der Hülle Σ betrachten.

Wir sind jetzt imstande, auch den Wert des letzten Integrals in (20) anzugeben. Nach der Grundgleichung der Gastheorie hat man für den Druck des Gases

$$p = \tfrac{2}{3} n k, \qquad (21)$$

so daß wir n durch $\frac{3p}{2k}$ ersetzen dürfen. Sieht man nun von den Änderungen ab, die k von Punkt zu Punkt erleidet, was wegen der unendlich kleinen Werte von u, v, w gerechtfertigt erscheint, und bezieht man die Integration auf die Hülle Σ, so wird das letzte Glied in (20)

$$-\frac{3}{2k}\, dt \int p(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, d\Sigma = \frac{3}{2k}\, dA,$$

wenn dA die Arbeit des auf das Gas ausgeübten Druckes bedeutet. Unsere Gleichung wird infolgedessen

$$dH = \frac{3}{2k}(dA - dT - dQ_i).$$

Es sei ferner dQ_a die Wärmemenge, welche von der Wand auf das Gas übergeht (äußere Wärmezufuhr), dq_i die mit dQ_i vergleichbare Wärmezufuhr in dem Raume der Grenzschicht, und dE die Änderung der in letzterer enthaltenen Energie. Dann ist, da die Schicht die Energie dT an das innere Gas abgibt,

$$dE = dA + dQ_a + dq_i - dT,$$

und also

$$dH = \frac{3}{2k}(dE - dQ_a - dQ_i - dq_i).$$

Die in der Grenzschicht enthaltene Gasmenge ist nun so klein im Vergleich zu der Gesamtmenge, daß wir von ihrer Energie, also auch von der Änderung dE absehen dürfen. Auch dürfen wir sagen, es beziehe sich dH nicht bloß auf den von σ eingeschlossenen Raum, sondern auf das ganze Volum. Schließlich beachten wir, daß die Summe

$$dQ_a + dQ_i + dq_i$$

die gesamte dem Gase zugeführte Wärmemenge dQ vorstellt, und daß die mittlere kinetische Energie eines Moleküls der absoluten Temperatur ϑ proportional ist, so daß

$$k = \mu\vartheta, \qquad (22)$$

wenn μ eine Konstante bedeutet. Bei Einführung dieser Werte ergibt sich

$$\frac{dQ}{\vartheta} = -\tfrac{2}{3}\mu\, dH.$$

Die mit der Temperatur dividierte zugeführte Wärmemenge stellt sich also wirklich als ein vollständiges Differential, und zwar als das Differential der Funktion

$$-\tfrac{2}{3}\mu H$$

heraus. Letztere Funktion spielt somit bei den betrachteten Zustandsänderungen die Rolle der Entropie.

§ 10. Zum Schluß möge noch, obgleich es nach dem Vorhergehenden eigentlich überflüssig ist, der Wert von $-\frac{2}{3}\mu H$ für ein im stationären Zustande befindliches Gas berechnet und mit der bekannten Formel für die Entropie verglichen werden.

Aus (14) folgt

$$\int F_0 \log F_0\, d\lambda = \log C \cdot \int F_0\, d\lambda - \frac{3m}{4k}\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, F_0\, d\lambda,$$

also, mit Rücksicht darauf, daß

$$\tfrac{1}{2} m \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, F_0\, d\lambda$$

die kinetische Energie nk pro Volumeneinheit bedeutet,

$$\int F_0 \log F_0\, d\lambda = n(\log C - \tfrac{3}{2}).$$

Hieraus ergibt sich für die ganze Masse

$$H = N(\log C - \tfrac{3}{2}).$$

Wir bezeichnen nun mit v das Volum und substituieren in (15)

$$n = \frac{N}{\mathrm{v}}, \qquad k = \mu\vartheta.$$

Dann erhalten wir, indem wir alle additiven Konstanten in eine e zige C' zusammenziehen

$$-\tfrac{2}{3}\mu H = \tfrac{2}{3}\mu N \log \mathrm{v} + \mu N \log \vartheta + C'. \quad . \quad . \quad (2$$

Anderseits ist, wenn man von der Zustandsgleichung .

$$p\mathrm{v} = R\vartheta$$

ausgeht und die innere Energie mit $c\vartheta$ bezeichnet, wo c eine K stante ist, das Differential der Entropie

$$\frac{p\,d\mathrm{v} + c\,d\vartheta}{\vartheta} = R\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + c\frac{d\vartheta}{\vartheta},$$

und die Entropie selbst

$$R \log \mathrm{v} + c \log \vartheta + C'.$$

Dieser Ausdruck stimmt nun wirklich mit (23) überein, da na (21) und (22)

$$p\mathrm{v} = \tfrac{2}{3}Nk = \tfrac{2}{3}\mu N\vartheta,$$

und somit

$$R = \tfrac{2}{3}\mu N,$$

ist, während anderseits die Energie des Gases den Wert

$$Nk = \mu N\vartheta,$$

und also der mit c bezeichnete Koeffizient die Größe μN hat.

IX.

Sur la théorie moléculaire des dissolutions diluées.

(Archives néerlandaises, 25 [1892], p. 107.)

Les lois relatives à la pression osmotique d'une solution étendue et aux phénomènes qui s'y rattachent sont si simples, qu'on est naturellement conduit à essayer de les déduire directement de la théorie cinétique, sans se servir de la thermodynamique. Les résultats d'une étude entreprise dans cette direction offriront peut-être quelque intérêt, quoique je n'aie pas atteint complètement le but proposé.

I. Influence de forces extérieures sur la concentration.

§ 1. Dès que la pression osmotique est connue pour différents degrés de concentration, on peut, au moyen de la seconde loi de la thermodynamique, calculer les différences de concentration produites par des forces extérieures, telles que la pesanteur. Je commencerai par faire ce calcul[1]), après quoi je chercherai jusqu'à quel point la théorie moléculaire peut, à elle seule, rendre compte des résultats que nous obtiendrons.

Pour simplifier, j'admettrai que les forces extérieures soient dirigées verticalement, de haut en bas, et qu'elles aient la même intensité en tous les points d'un plan horizontal. Nous supposerons d'ailleurs qu'elles varient avec la hauteur et que, pour l'unité de masse du dissolvant et l'unité de masse du corps dissous, elles aient des intensités différentes. Désignons par A le dissolvant ou le „liquide", par B le corps dissous, le corps „étranger".

Soit maintenant un vase à parois très minces et semiperméables, rempli de la dissolution très diluée qu'on veut considérer, et complètement immergé dans une masse du dissolvant pur. Ce système étant maintenu à une température constante, il s'établit, comme nous l'ap-

---

1) Le résultat auquel nous parviendrons n'est pas nouveau; on le trouve, par exemple, quoique sous une autre forme, dans le mémoire de M. van der Waals sur la „Théorie moléculaire d'une substance composée de deux matières différentes", Arch. néerl., 24 (1891), p. 1. Voir aussi: Van der Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, T. 2.

prend la seconde loi de la thermodynamique, un état d'équilibre que nous allons examiner.

§ 2. Donnons au vase la forme d'un cylindre à axe vertical et à base de grandeur 1, et appelons:

p et p' les pressions existant dans le liquide extérieur, au niveau des bases inférieure et supérieure du cylindre;

P et P' les valeurs de la pression osmotique en ces points, valeurs qui seront différentes si la concentration change dans le sens vertical;

F_1 la force extérieure totale qui agit sur le contenu du cylindre; F_2 la force extérieure pour la portion du liquide ambiant qui est contenue dans un espace cylindrique de même grandeur que le vase et compris entre les mêmes plans horizontaux.

Les conditions de l'équilibre sont alors: pour le liquide extérieur

$$p - p' = F_2,$$

et pour la dissolution, dans laquelle la pression, en bas et en haut, doit avoir les valeurs $p + P$ et $p' + P'$,

$$(p + P) - (p' + P') = F_1.$$

De ces deux équations il résulte

$$P - P' = F_1 - F_2.$$

J'admets que les liquides dont il s'agit soient incompressibles. A la température choisie, le vase pourrait alors contenir une quantité parfaitement déterminée M, du dissolvant pur. S'il est rempli de la solution, il contient une quantité moindre M', du dissolvant, et l'on peut se représenter la dissolution comme résultant de ce que le corps étranger est venu prendre la place de la quantité $M - M'$ du liquide. Cette quantité sera dite la quantité „déplacée“ du dissolvant. Si maintenant la force extérieure qui agirait sur cette quantité est f_2, et si les molécules du corps dissous contenues dans le cylindre sont soumises à la force extérieure totale f_1, on aura évidemment

$$F_1 - F_2 = f_1 - f_2,$$

de sorte que la condition d'équilibre devient

$$P - P' = f_1 - f_2. \qquad (1)$$

§ 3. M. van 't Hoff a montré que la pression osmotique d'une solution diluée est égale à la pression exercée, à la même témperature, par un gaz dont le nombre de molécules, par unité de volume, est égal à celui du corps dissous, à la concentration qu'il a dans le liquide. Pour abréger, je nommerai cette pression la „pression gazeuse“; à cha-

que degré de concentration elle a une valeur déterminée et, si G et G' sont les valeurs relatives à la couche inférieure et à la couche supérieure de la solution contenue dans notre cylindre, on a, en vertu de (1),

$$G - G' = f_1 - f_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On comprend facilement que cette équation reste encore applicable lorsqu'il n'y a aucune paroi semi-perméable et que la solution occupe un espace de grandeur et de forme quelconques. A l'état d'équilibre, la concentration a la même valeur en tous les points d'un plan horizontal, et la différence de ses valeurs en deux pareils plans est déterminée par la formule (2). G et G' sont alors les pressions gazeuses qui correspondent aux concentrations dans ces plans, et par f_1 il faut entendre la force qui agit sur la quantité du corps B qui se trouve dans un cylindre C compris entre les deux plans et ayant une base égale à 1. D'autre part, f_2 est la force qui agirait sur le liquide qui a été déplacé par la quantité nommée.

Nous admettrons maintenant la règle exprimée par l'équation (2) et nous chercherons à en rendre compte au moyen de la théorie moléculaire. Dans cette explication, il ne sera plus question de parois semi-perméables.

§ 4. Soit S, au sein de la solution, une surface fermée quelconque. Je dirai qu'une molécule appartient à l'espace limité par S, dès que son centre de gravité s'y trouve; cela posé, cet espace renfermera à chaque instant un nombre parfaitement déterminé de molécules de B. A l'état d'équilibre, ce nombre restera constant, bien qu'il y ait continuellement des molécules qui sortent de l'espace et d'autres qui y entrent. Une seconde condition d'équilibre consiste en ce que, au total, les molécules B situées à l'intérieur de la surface S ne possèdent, ni dans un sens ni dans l'autre, une quantité de mouvement résultante. Or, la quantité de mouvement qui existe à l'intérieur de S, — il ne s'agit toujours que des molécules B, — pourrait varier, d'abord parce que les centres de gravité d'un certain nombre de molécules traversent la surface, et ensuite par l'action de forces d'origine différente. La somme algébrique de toutes les variations devra être nulle.

§ 5. Supposons d'abord une solution libre de toute action de forces extérieures et par conséquent homogène. Un plan quelconque ayant l'unité de surface est traversé dans l'unité de temps par un certain nombre de molécules de la substance dissoute B, dont les unes se meuvent dans un sens, — disons du côté négatif vers le côté positif, — les autres, en nombre égal, dans le sens contraire. Les premières possèdent ensemble une quantité de mouvement α, normale à la surface et dirigée vers le côté positif; les secondes une quantité

égale, mais dirigée en sens opposé. En somme, la quantité de mouvement s'accroît donc, du côté positif, de 2α. Comme le même changement se produirait si aucune particule matérielle ne traversait le plan, mais si une pression 2α agissait sur la matière B située du côté positif, je donnerai à cette quantité 2α le nom de „pression cinétique“ du corps dissous. Sa valeur numérique K est toujours les deux tiers de celle de l'énergie cinétique que les molécules B contenues dans l'unité de volume possèdent en vertu du mouvement de leurs centres de gravité.[1])

---

1) La démonstration suivante fera ressortir la généralité de ce théorème connu.

Dans un espace très étendu, menons un grand nombre de droites parallèles et égales, dont les points de départ soient distribués uniformément, et demandons-nous combien de ces droites sont coupées par une portion d'un certain plan, de la grandeur 1.

Soient n le nombre des points de départ dans l'unité de volume, l la longueur des droites, φ l'angle aigu qu'elles font avec la normale au plan choisi. Ce plan étant rencontré par toutes les droites dont les points de départ se trouvent dans un cylindre de volume $l \cos \varphi$, le nombre cherché est $n l \cos \varphi$.

Que l'on se représente maintenant l'ensemble des chemins parcourus, dans un temps infiniment petit dt, par les centres de gravité des molécules du corps dissous. En tant que ces éléments sont coupés par un plan tel que celui dont il vient d'être parlé, les molécules en question contribuent à la pression cinétique K perpendiculaire à ce plan.

De tous ces éléments de trajectoires je ne considère d'abord qu'un seul groupe, savoir, celui des éléments décrits dans une direction déterminée et avec une vitesse déterminée v.

Ce groupe présente avec le plan des intersections, au nombre de $n v \cos \varphi dt$, et donne pour la pression cinétique le terme $n m v^2 \cos^2 \varphi$, si l'on représente par m la masse d'une molécule et par n le nombre des molécules qui se trouvent dans l'unité de volume et qui appartiennent au groupe considéré.

En prenant la somme pour tous les groupes analogues, on a $K = \Sigma n m v^2 \cos^2 \varphi$, expression qu'on peut aussi écrire $K = S m v^2 \cos^2 \varphi$, si l'on indique par S une somme à laquelle chacune des molécules contenues dans l'unité de volume fournit un terme. Supposons l'axe des x normal au plan considéré et les deux autres axes situés dans ce plan et perpendiculaires entre eux. Alors, si v_x, v_y, v_z sont les composantes de la vitesse v, il vient $K = S m v^2_x$. Mais, puisque la dissolution a dans toutes les directions les mêmes propriétés,

$$S m v^2_x = S m v^2_y = S m v^2_z;$$

chacune de ces expressions est donc égale au tiers de leur somme, de sorte qu'on obtient

$$K = \tfrac{1}{3} S m v^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème peut d'ailleurs être étendu à des mélanges de plusieurs matières. Toujours, la partie de la pression cinétique qui dépend d'un seul des corps constituants est égale aux deux tiers de l'énergie cinétique que possèdent, en vertu du mouvement de leurs centres de gravité, les molécules de ce corps qui sont contenues dans l'unité de volume.

Ce théorème est depuis longtemps établi dans la théorie cinétique des gaz. Il est toutefois indépendant de l'hypothèse que les molécules se meuvent en lignes

A vitesse moyenne constante, K est donc proportionnel à la concentration.

§ 6. Revenons maintenant à la dissolution soumise à l'influence de forces extérieures, et prenons pour la surface S (§ 4) la surface du cylindre C dont il a été question tantôt (§ 3). On voit immédiatement que le mouvement moléculaire près de la surface cylindrique n'apporte aucun changement à la quantité de mouvement en direction verticale. Quant à l'influence des molécules B qui traversent les bases inférieure et supérieure, elle peut être représentée, tout comme dans une solution homogène, au moyen de la pression cinétique; seulement, il faut ici donner à cette pression, pour les deux bases, des valeurs différentes, K et K'. La différence $K - K'$ fait connaître de combien s'accroîtrait, dans l'unité de temps, la quantité de mouvement des molécules B comprises à l'intérieur du cylindre, la direction de bas en haut étant prise pour direction positive.

Si maintenant f_1 est de nouveau la force extérieure agissant de haut en bas sur la substance dissoute contenue dans le cylindre, et Q la force exercée sur cette substance, dans la même direction, par les autres molécules du système, $f' + Q$ sera la quantité de mouvement

---

droites, et peut être appliqué à tous les états d'agrégation. Dans la démonstration donnée, les trajectoires peuvent être des courbes quelconques. Il est vrai qu'il n'y a pas été question de changements brusques de direction durant le temps dt; mais la possibilité en peut être admise, sans que le résultat se trouve modifié.

Pour vérifier ce qui précède, je citerai un exemple. Imaginons une masse gazeuse dans laquelle sont plongés un grand nombre de corps solides immobiles, dont les dimensions et les distances mutuelles sont très considérables par rapport aux dimensions moléculaires du gaz et qui n'agissent sur les particules gazeuses qu'au contact immédiat.

Si l'unité de longueur est prise beaucoup plus grande que la distance mutuelle des corps solides, la pression cinétique du gaz, pour une portion de surface de la grandeur 1, peut être déterminée par le théorème trouvé; elle doit donc avoir la valeur $\frac{2}{3} U$, si U est l'énergie cinétique du gaz qui se trouve dans l'unité de volume. On arrive au même résultat par le raisonnement suivant. Si μ est la fraction de l'unité de volume qui est occupée par les corps solides immobiles, l'espace réellement rempli de gaz contient une énergie cinétique qui, calculée pour l'unité de volume, s'élève à $\frac{U}{1-\mu}$. La pression cinétique pour une surface plane de la grandeur ω, située tout entière dans le gaz, a par conséquent la valeur $\frac{2}{3} \cdot \frac{U}{1-\mu} \omega$. D'un autre côté une surface de la grandeur 1 traverse un grand nombre des corps immergés; si la somme des surfaces d'intersection est ν, il n'y a plus qu'une portion $1 - \nu$ qui reste accessible aux molécules du gaz. Il en résulte, pour la pression cinétique sur l'unité de surface entière, la valeur $\frac{2}{3} \cdot \frac{1-\nu}{1-\mu} U$, ce qui revient à $\frac{2}{3} U$; en effet on démontre facilement que $\mu = \nu$.

produite par les forces dans l'unité de temps, et on aura la condition d'équilibre

$$K - K' = f_1 + Q. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

§ 7. La force Q se compose des forces Y et Z, qui proviennent, la première des molécules B environnant le cylindre et la seconde des molécules du dissolvant. En ce qui concerne d'abord la force Y, il faut remarquer que les molécules B situées à l'intérieur du cylindre peuvent être attirées par les molécules de même espèce qui l'environnent, et qu'en outre quelques-uns des chocs entre deux molécules B auront lieu de façon que l'une ait son centre de gravité en dedans du cylindre, l'autre en dehors. Les répulsions qui sont en jeu dans de pareils chocs devraient entrer en ligne de compte dans le calcul de la force Y.

La question se simplifie quand il s'agit de solutions très étendues. L'attraction entre les molécules du corps dissous qui se trouvent de part et d'autre d'un plan quelconque est proportionnelle au carré de la concentration; il en est de même du nombre des collisions mutuelles. Les deux parties de la force Y peuvent donc être négligées si la concentration est regardée comme infiniment petite; on peut même ajouter que la force Y devient une quantité du second ordre, quelle que soit la nature des actions réciproques.

Par conséquent la formule (3) devient

$$K - K' = f_1 + Z,$$

ce qui conduit à l'équation (2) quand on fait les hypothèses suivantes:

a) En vertu de son mouvement progressif, une molécule du corps dissous a, en moyenne, une énergie cinétique égale à celle que possède à la même température une molécule d'un gaz. D'après cette hypothèse, la pression cinétique devient, quelle que soit la concentration, égale à la „pression gazeuse“ (§ 3), de sorte que $K = G$, $K' = G'$.

b) On a $Z = -f_2$, c'est-à-dire que la partie considérée de la matière dissoute éprouve, de la part du dissolvant, une force égale et opposée à la force extérieure qui agirait sur la quantité déplacée du liquide.[1])

---

1) Suivant cette proposition, on doit avoir $Z = 0$ quand aucune force extérieure n'agit sur le dissolvant. C'est ce que confirmera une légère modification de l'exemple donné à la fin de la note du § 5. Supposons, en effet, que les corps solides immergés dans la masse gazeuse, considérés dans cet exemple, — corps qui représenteront maintenant les molécules du dissolvant, — soient mobiles, mais que leur masse soit infiniment grande. Si aucune force extérieure n'agit sur ces corps, ils ne pourront, une fois au repos, jamais entrer en mouvement. Admettons que le gaz, au contraire, soit soumis à l'action de la pesanteur.

Considérons un cylindre vertical de hauteur h et de base 1, dont les dimensions soient beaucoup plus grandes que les intervalles entre les corps solides. Dans

Si ces hypothèses, dont la seconde rappelle la loi d'Archimède, pouvaient être déduites des principes de la mécanique, la loi des différences de concentration serait expliquée par la théorie moléculaire. Dans l'état actuel de la théorie on peut regarder les propositions a) et b) comme des conséquences de la seconde loi de la thermodynamique, ou, plus exactement, l'une de ces propositions découle de cette loi dès que l'autre est admise. Dans ce qui va suivre, les deux propositions seront appliquées toutes les deux.

II. Tension de vapeur des dissolutions diluées.

§ 8. La règle qui détermine la tension de vapeur d'une dissolution étendue, et qu'on peut obtenir au moyen de la thermodynamique, peut être mise sous la forme suivante:

L'abaissement de la tension de vapeur, produit par l'introduction dans un liquide d'un corps qui s'y dissout, mais ne s'évapore pas lui-même, est à la pression osmotique de la dissolution, — c'est-à-dire à la pression cinétique du corps dissous, — dans le même rapport que le volume spécifique du liquide au volume spécifique de la vapeur saturée.

Dans cet énoncé il n'est aucunement question d'une attraction moléculaire; au contraire, l'abaissement de la tension de vapeur est mis en relation avec le *mouvement* des molécules. Je vais démontrer que la règle s'accorde cependant avec la conception ordinaire, suivant laquelle le corps étranger retient par son attraction les particules du liquide et tend ainsi à empêcher l'évaporation.

Dans les raisonnements qui vont suivre je me servirai d'une hypothèse, non conforme, il est vrai, à la réalité, mais contribuant à simplifier l'analyse des phénomènes, sans trop changer leur véritable caractère. Elle consiste à regarder la distance la plus grande, à laquelle deux molécules du dissolvant agissent l'une sur l'autre, comme très petite par rapport à la distance jusqu'à laquelle reste sensible l'attraction de molécules d'espèces différentes. On a ainsi l'avantage de pou-

---

l'espace réellement occupé par le gaz, la pression obéit aux lois ordinaires de l'hydrostatique. Pour deux éléments plans égaux ω, situés l'un à la base inférieure du cylindre, l'autre à la base supérieure, et qui se trouvent tous les deux entièrement en dehors des corps solides, la différence des pressions cinétiques est donc égale au poids d'une masse gazeuse qui serait contenue dans un cylindre de hauteur h et de base ω, en admettant que ce cylindre ne renferme pas d'autres corps. Il suit de là que la différence des pressions cinétiques à la base inférieure et à la base supérieure du grand cylindre, — bases de chacune desquelles il n'y a à considérer qu'une portion $1 - \nu$, — est égale au poids d'une masse gazeuse de volume $h(1 - \nu)$. Or, à cause de l'égalité $\nu = \mu$, c'est là précisément le poids des molécules de gaz qui se trouvent réellement dans le grand cylindre. Celles-ci ne sont donc pas soutenues par les corps solides, c'est-à-dire qu'on a $Z = 0$.

voir regarder comme parfaitement tranchée la délimitation du liquide et de la vapeur. L'épaisseur de la couche qui, en réalité, forme la transition de l'un à l'autre, est, en effet, du même ordre de grandeur que le rayon de la sphère d'activité des particules du liquide; la question de savoir si cette épaisseur est négligeable, ou non, dépend seulement des autres longueurs qui jouent un rôle dans les problèmes dont on s'occupe.

Or, dans le problème actuel, la distance à laquelle s'attirent des molécules d'espèces différentes est une telle longueur; si elle a une grandeur suffisante, nous pouvons regarder la limite du liquide et de la vapeur comme une surface mathématique.

Un raisonnement bien connu peut être appliqué à l'attraction qui existe entre le liquide et une molécule du corps dissous B. J'admets, conformément à ce qui précède, que cette attraction agisse encore à une distance dépassant de beaucoup celle qui sépare les molécules liquides voisines; je suppose, en outre, que les particules les plus rapprochées n'aient pas une part trop prépondérante dans l'attraction totale. Si ces conditions sont remplies, l'attraction résultante éprouvée par une molécule B est indépendante de l'arrangement accidentel des molécules voisines A; elle est uniquement déterminée par la distance de la molécule à la surface. Les différentes forces auxquelles est soumise une molécule B située à l'intérieur de la dissolution se détruisent mutuellement; mais les molécules B qui se trouvent au voisinage de la surface sont soumises à une force résultante, dirigée vers l'intérieur du liquide. La concentration diminuera donc lorsqu'on s'approche de la surface, et nous admettrons que cette diminution soit assez rapide pour que, à la surface même, la concentration ait une valeur insensible. On s'explique alors que les molécules B ne prennent point part à l'évaporation; si elles se trouvaient encore à la surface, quelques-unes d'entre elles devraient, à raison de leurs grandes vitesses, s'élancer dans l'espace occupé par la vapeur.

§ 9. Parallèlement à la surface V, qui sera supposée plane et horizontale, menons un plan V' par les points les plus élevés où la concentration a encore la même valeur qu'à l'intérieur du liquide. De la „couche superficielle“ comprise entre les deux plans, considérons une portion cylindrique $abcd$, ayant pour base l'unité de surface. Soit Z la force totale, — positive lorsqu'elle est dirigée vers la solution, — avec laquelle le liquide agit sur les molécules B contenues dans le cylindre. Dans l'unité de temps, cette force donnerait lieu à une quantité de mouvement Z, si d'autres causes ne s'y opposaient.

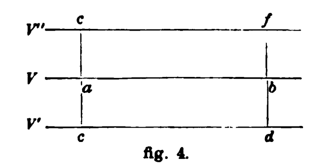


fig. 4.

A cause de sa faible densité, la vapeur n'exerce aucune attraction sensible et, dans le cas de dissolutions très étendues, on peut négliger toutes les actions réciproques entre les particules du corps dissous Si donc K est la pression cinétique à la base cd, la condition d'équilibre est

$$Z = K. \quad \dots \dots \dots \dots (4)$$

La force Z provient d'abord de l'attraction qui est exercée par le dissolvant et que, pour la quantité totale du corps B contenue dans le cylindre, je désigne par Z_1. En outre, parmi les chocs survenant entre une molécule B et une molécule A, il y a à tenir compte de ceux dans lesquels le centre de gravité de la première particule se trouve à l'intérieur du cylindre; en réunissant les répulsions résultant de tous ces chocs, on obtient une force Z_2, qui, jointe à Z_1, constitue la force entière Z.

Mais, pour les dissolutions très étendues, cette force Z_2 peut être négligée. Nous allons le démontrer dans le paragraphe suivant.

§ 10. Sans rien changer au mouvement des molécules, on peut supprimer par la pensée l'attraction entre les deux matières, à condition de faire agir sur chaque molécule une force extérieure, précisément égale à l'attraction résultante qu'elle éprouve, en réalité, de la part des molécules d'espèce différente.

Supposons, de plus, que l'espace au-dessus de la surface V soit rempli d'une masse du dissolvant pur. La distribution et le mouvement de la substance B ne seront pas altérés par là si le liquide additionnel est également considéré comme dépourvu d'attraction sur cette substance. Il est vrai que les forces actives dans les chocs sont restées, mais elles ne donnent lieu à aucune perturbation, vu que la concentration dans le plan V est négligeable et que, par suite, la nouvelle masse de liquide n'arrive pas en contact avec la substance dissoute.

Cette substance se trouvant maintenant dans une masse *illimitée* du liquide, et étant empêchée par des forces *extérieures* de se répartir uniformément, la proposition b (§ 7) devient applicable. A la vérité, les matières dont il s'agit actuellement ne sont plus telles que la nature les présente, puisque nous les avons dépouillées de leur attraction mutuelle et que nous ne leur avons laissé que les forces intervenant dans les chocs; mais il n'est guère douteux que la proposition rappelée subsiste tout de même.

Pour le cylindre considéré dans la section précédente (§ 3), nous prendrons maintenant l'espace représenté par $abcd$ dans la figure 4. Des forces que nous avons désignées précédemment par Z et f_2 (§§ 3 et 7), la première est alors la force Z_2 et la seconde devient égale à l'attraction que la matière dissoute exerce sur une quantité de liquide égale à la

quantité déplacée. Mais, si la concentration est infiniment petite, cette quantité l'est également, de sorte que f_2 devient une grandeur du second ordre. En vertu de la proposition *b*, on peut dire la même chose de Z_2.

§ 11. Figurons-nous maintenant, comme au § 9, que le plan V soit la surface de séparation de la solution et de la vapeur qui se trouve au-dessus d'elle. D'après ce qui vient d'être dit, nous pouvons alors entendre par Z, dans la formule (4), l'attraction du liquide sur les molécules B contenues dans le cylindre *abcd*. Cela posé, il est facile de voir que la formule détermine la quantité de la substance dissoute qui reste dans la couche superficielle. L'attraction Z, en effet, sera d'autant plus grande que cette quantité est plus considérable, tandis que la pression cinétique K est déterminée par la valeur de la concentration à l'intérieur de la solution. Si la concentration avait cette même valeur en chaque point de la couche superficielle, l'attraction Z aurait une certaine valeur Z_0, et si cette dernière grandeur était surpassée par la pression cinétique, un état d'équilibre, tel que je l'ai supposé, ne saurait exister, puisque un abaissement de la concentration dans la couche superficielle ne peut augmenter Z. Si, au contraire, $Z_0 > K$, l'attraction Z peut être amenée à la valeur K par une diminution convenable de la concentration au voisinage de la surface. A vrai dire, pour déterminer la distribution et le nombre des molécules B dans la région superficielle, il faudrait décomposer celle-ci en couches infiniment minces et appliquer à chacune d'elles un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour la couche entière. Mais, pour notre but, cela n'est pas nécessaire.

§ 12. Ce qui se passe dans l'évaporation est trop compliqué pour permettre une analyse exacte. Nous pouvons nous contenter, toutefois, de remarquer que les phénomènes dont il s'agit s'accomplissent dans une couche dont l'épaisseur, suivant notre hypothèse (§ 8), est très petite par rapport au rayon de la sphère d'activité pour l'attraction de molécules d'espèces différentes, et que les molécules B n'ont pas d'influence sensible sur les mouvements qui s'exécutent dans cette mince couche. Pour démontrer ce dernier point, soient φ_1 et φ_2 les attractions qu'une molécule A, située à la surface V, éprouve respectivement de la part des autres molécules A et de la part des molécules B, et cela, en ce qui concerne φ_2, dans le cas où la concentration a partout la valeur 1; désignons, en outre, par ϱ_1 et ϱ_2 les distances les plus grandes auxquelles les deux sortes d'attractions se font sentir. Or, si l'on veut faire passer une molécule A de l'intérieur de la solution à l'extérieur, il faudra, pour vaincre les forces avec lesquelles elle est retenue par le liquide lui-même et par le corps dissous, des travaux de l'ordre de

grandeur $\varrho_1 \varphi_1$ et $\varrho_2 \varphi_2$. Il est naturel de supposer que ces travaux sont comparables entre eux. Il en résulte que φ_2 doit être de l'ordre $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \varphi_1$. Par conséquent, si C est la concentration moyenne de la substance dissoute, dans le cylindre *abcd*, la force exercée par les molécules B sur une molécule liquide, placée à la surface V, sera de l'ordre $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \varphi_1 C$. Vis-à-vis de φ_1, nous pouvons négliger cette force, non parce que nous regardons C comme infiniment petite, — car dans toute cette étude il s'agit de grandeurs de l'ordre C, — mais parce que, d'après notre supposition, la distance ϱ_1 est incomparablement plus petite que ϱ_2.

§ 13. Il ressort de là que le corps dissous n'a pas d'influence sur ce qui a lieu à la surface V du liquide. Il faut donc que dans l'état d'équilibre la tension de vapeur, dans le voisinage immédiat de la surface, ait la valeur π_0 qui est propre au dissolvant pur. Cependant, les mesures de la tension de vapeur de la dissolution ne nous donnent pas cette pression à la surface; ce qu'on mesure, c'est la pression π qui existe un peu plus haut, et cette pression doit être moindre que π_0. L'attraction du corps dissous s'étend, en effet, jusqu'à une certaine distance dans la vapeur même, et par suite, tout près de la surface, la pression de la vapeur croîtra à mesure qu'on s'en rapproche, de même que, sous l'influence de la pesanteur, la pression atmosphérique est une fonction de la hauteur.

Soit V'' (voir la figure) un plan horizontal, situé d'autant au-dessus de la surface V que le plan V' est situé au-dessous, et soit *abef* une partie, opposée au cylindre *abcd*, de la couche de vapeur comprise entre V et V''. Comme *ac* ne peut être plus petit que le rayon d'activité pour l'attraction réciproque des molécules A et B, les molécules B ne peuvent point agir sur la vapeur qui se trouve au-dessus de V''. Dans le plan V'' on trouvera donc la pression π qu'on observe. Si alors z est la force avec laquelle la vapeur occupant le cylindre *abef* est attirée par le corps dissous, la condition d'équilibre de cette masse de vapeur devient

$$\pi_0 - \pi = z. \qquad (5)$$

§ 14. Entre l'attraction z et la force Z qui entre dans l'équation (4), il y a une relation bien simple, à laquelle on arrive par les considérations suivantes.

a) Si l'espace supérieur au plan V était rempli du dissolvant pur, sans que rien fût changé à la distribution des matières au-dessous de ce plan, une molécule B, dans le cylindre *abcd*, n'éprouverait de la part de la masse entière du dissolvant qu'une attraction résultante infiniment petite. La molécule, en effet, serait entourée de tous côtés

par le liquide, et bien que la densité de celui-ci, à l'intérieur de la sphère d'activité, ne soit pas tout à fait constante, — vu qu'elle devient d'autant plus grande que le nombre des molécules du corps étranger est moindre, — les différences sont du même ordre de grandeur que la concentration.

b) La quantité de la matière dissoute, dans le cylindre *abcd*, étant en outre infiniment petite, la force résultante qui agirait sur toute cette quantité est une grandeur du second ordre et peut par conséquent être négligée. Il en résulte que le liquide ajouté au-dessus de V exerce sur les molécules B, contenues dans l'espace *abcd*, une attraction égale à celle du liquide situé au-dessous de V, c'est-à-dire une attraction Z.

c) L'attraction mutuelle entre une quantité de liquide occupant l'espace *abef* d'une part, et toutes les molécules du corps B situées au-dessous de V d'autre part, a la même valeur Z.

d) Si l'on se représente d'abord, dans l'espace *abef*, la masse liquide dont il vient d'être question, et qu'ensuite on change sa densité dans le rapport $n:1$, l'attraction que le contenu de cet espace éprouve de la part des molécules B diminue dans le même rapport. En prenant donc pour n le rapport entre les volumes spécifiques du dissolvant et de la vapeur, on a

$$z = \frac{Z}{n},$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux équations (4) et (5),

$$\pi_0 - \pi = \frac{K}{n}.$$

Or, cette équation contient le théorème que nous avons énoncé au début de cette section. Il faut remarquer encore que, dans notre raisonnement, la vapeur renfermée dans le cylindre *abef* a été supposée homogène, ce qui n'est pas rigoureusement vrai. Toutefois, il n'en résulte pas d'erreur, car, lorsque la concentration est infiniment petite, la variation de la densité dans le cylindre l'est également, et elle conduirait donc, si l'on en tenait compte dans le calcul de l'attraction exercée par une masse infiniment petite, à des quantités du second ordre. Du reste, si dans notre théorème il est question du volume spécifique de la vapeur saturée, on peut entendre par là, à volonté, la vapeur qui est en contact avec le dissolvant pur, ou celle qui est en équilibre avec la solution.

§ 15. L'explication précédente peut être résumée de la façon suivante. Bien que la cause immédiate de l'abaissement de la tension de vapeur doive être cherchée dans l'attraction entre les molécules A et B, le degré auquel cette attraction s'exerce est réglé par le mouvement

moléculaire de la matière dissoute. En effet, ce mouvement, ou, à mieux dire, la pression cinétique qui en dépend, détermine la quantité de la matière dissoute qui reste dans la couche superficielle, et qui peut par conséquent agir sur les molécules de la vapeur. Tandis que l'attraction tend à retirer de la couche le corps étranger, le mouvement moléculaire l'y fait pénétrer. S'il était possible, sans rien changer à l'attraction, d'accélérer le mouvement moléculaire, le nombre des molécules B croîtrait dans la couche superficielle; une plus forte attraction sur la vapeur et un abaissement plus prononcé de la tension de vapeur en seraient les conséquences. De fait, un cas de ce genre nous est offert par les sels dont les molécules sont dissociées; le dédoublement des molécules augmente, en effet, la pression cinétique, tandis qu'on peut admettre que les nouvelles molécules sont, dans leur ensemble, attirées par le dissolvant avec la même force que les molécules qui ont été décomposées.

III. Point de congélation des dissolutions diluées.

§ 16. Quand on cherche à expliquer l'influence d'une substance dissoute sur le point de congélation, on rencontre des difficultés sérieuses. Il semble difficile d'indiquer la cause pour laquelle le corps dissous échappe souvent à la solidification, et c'est précisément dans un tel cas que le point de congélation obéit à une loi très simple. Une explication, semblable à celle qu'on trouve dans la section précédente, est cependant possible pour les dissolutions *aqueuses*. Je me permets de l'indiquer ici brièvement, sans vouloir prétendre qu'elle soit conforme à la réalité.

Figurons-nous qu'au-dessus du plan V de la figure 4 (p. 182) il y ait de la glace, au-dessous de ce même plan une solution aqueuse d'un corps B, et, reprenant l'hypothèse du § 8, regardons de nouveau comme parfaitement tranchée la limite entre les deux phases. Une molécule B, dans la couche superficielle (V, V') est alors attirée non seulement par le liquide, mais aussi, en direction opposée, par la glace. Si la première attraction a la valeur φ, une masse d'eau, occupant l'espace au-dessus de V, exercerait également une force φ; en admettant ensuite que les attractions exercées par l'eau et par la glace sont proportionnelles aux densités, on aura, pour l'action entre la masse de glace et la molécule considérée, $\frac{v}{V}\varphi$, où v est le volume spécifique de l'eau et V celui de la glace. L'attraction exercée par l'eau est donc la plus forte, et les molécules B dans la couche superficielle se trouvent soumises à une force résultante dirigée vers la solution. La concentration diminue de nouveau à mesure qu'on se rapproche du plan V, et si l'on admet que la différence des deux attractions suffit pour abaisser la concen-

tration, en ce plan même, à une valeur insensible, le fait, que la solution nous donne de la glace pure, se trouve expliqué.

En désignant maintenant par Z la force résultante avec laquelle la glace attire les molécules B restant dans le cylindre $abcd$, on aura $\frac{V}{v}Z$ pour l'attraction exercée par l'eau, et l'équation (4) devra être remplacée par

$$\left(\frac{V}{v}-1\right)Z=K. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

§ 17. Entre la glace et la solution il existe deux sortes de forces. En premier lieu, toutes les actions qu'exercent entre elles la glace et la couche liquide superficielle, formée d'eau pure, se composent en une pression que, par unité de surface, nous représenterons par p_0. En second lieu, il y a attraction entre la glace et les molécules B. Nous réunirons les deux forces en une seule

$$p=p_0-Z,$$

et remarquerons que ce qu'on appelle simplement la pression de la solution est précisément cette force p, puisque, par pression d'un liquide, nous entendons la force totale qu'il exerce sur l'unité de surface d'un autre corps, par exemple, de notre morceau de glace.

Si maintenant la pression p est donnée et qu'on demande le point de congélation de la solution sous cette pression, c'est-à-dire la température T' à laquelle elle peut être en équilibre avec la glace, il suffit de considérer que la glace, à proprement parler, est en contact avec de l'eau pure sous la pression $p+Z$. Le point de congélation cherché est donc le point de congélation de l'eau sous la pression $p+Z$, et il est par conséquent plus bas que le point de congélation T de l'eau sous la pression p.

J'applique maintenant à l'eau la relation connue

$$\frac{dp}{dT}=-\frac{r}{T(V-v)},$$

— où il faut entendre par T la température absolue et par r la chaleur de fusion, exprimée en unités de travail, — et j'en déduis

$$\frac{Z}{T'-T}=-\frac{r}{T(V-v)}.$$

En substituant dans cette équation la valeur de Z tirée de (6), on obtient

$$T-T'=\frac{KTv}{r},$$

et c'est là effectivement la formule qui représente les résultats des observations.

IV. Différence de pression des deux côtés d'une paroi semi-perméable.

§ 18. La thermodynamique nous apprend que la différence de pression qui existe lorsqu'une dissolution est séparée du dissolvant pur par une paroi semi-perméable est indépendante des propriétés particulières de la paroi. A quels mouvements et à quelles forces cette différence est due, et de quelle façon, de l'un des deux côtés, le liquide et le corps dissous participent à l'action totale, c'est ce qu'on ne saurait dire en général, l'imperméabilité de la paroi aux molécules d'une espèce déterminée pouvant avoir des causes très différentes. Les phénomènes devraient être analysés dans chaque cas spécial, et pour cela ils sont ordinairement trop compliqués. D'après les lois thermodynamiques on peut toutefois affirmer qu'une hypothèse, capable d'expliquer la semi-perméabilité, rendra compte également de la différence de pression.

Pour justifier cette assertion je traiterai deux exemples, dont le premier est purement fictif, tandis que le second se rattache aux considérations des sections précédentes.

§ 19. Supposons d'abord que la paroi soit un plan mathématique, criblé de trous, de telle façon qu'il laisse passer toutes les molécules du liquide qui se présentent, mais repousse toutes les molécules B; admettons, en outre, que la paroi n'agisse sur ces dernières qu'au moment du choc et non pas à quelque distance. Les molécules du liquide n'arrivant jamais en contact avec la paroi, elles n'exerceront alors aucune pression sur celle-ci; par contre, des chocs des molécules B il résultera de l'un des côtés une pression, qui est évidemment égale à la pression cinétique de la substance dissoute. La pression cinétique à considérer est d'ailleurs celle qui correspond à la concentration à l'intérieur de la dissolution. En effet, la paroi n'ayant pas d'épaisseur appréciable, les molécules B sont constamment entourées de tous côtés par le liquide. Elles ne sont donc soumises à aucune force résultante et restent libres dans leurs mouvements jusque tout près de la paroi. Par conséquent, la concentration présente la même valeur à la paroi même qu'au sein de la dissolution.

§ 20. Figurons-nous, en second lieu, que la paroi soit un disque solide, limité, du côté où se trouve la dissolution, par le plan V de notre figure 4 (p. 182), de l'autre côté par le plan V'' ou par un plan qui se trouve au dessus de V''. Imaginons que dans la paroi il y ait des canaux très fins, dont l'ensemble ne forme qu'une fraction négligeable du volume total. La substance de la paroi sera supposée ne pas attirer le corps dissous et n'agir sur les particules du liquide qu'à des distances

très petites par rapport à *ac*. En vertu de cette hypothèse et de celle faite au § 8, le liquide aura, jusqu'au voisinage immédiat de la paroi, sa densité ordinaire. Le corps dissous, au contraire, ne se trouvera pas, dans la couche (V, V'), au même degré de concentration qu'à l'intérieur. Une molécule de ce corps n'étant attirée que par le liquide qui se trouve au-dessous de V, — le liquide situé de l'autre côté de la paroi est trop éloigné, et on peut faire abstraction de celui qui occupe les pores, — les molécules seront distribuées dans la couche (V, V') précisément comme elles l'étaient dans le cas considéré dans la section II. J'admets de nouveau que près du plan V la concentration soit sensiblement nulle, et j'explique donc l'imperméabilité de la paroi aux molécules B par la circonstance que celles-ci, retenues par le liquide, ne peuvent jamais atteindre la paroi. Dans l'état d'équilibre, l'équation (4) sera de nouveau applicable, la quantité Z étant égale à l'attraction qui existerait entre le corps dissous et une masse de liquide remplissant le cylindre *abef* (§ 14, c).

§ 21. Les molécules B situées dans la couche (V, V') attirent le liquide qui occupe les pores et le feront passer du côté où se trouve la dissolution, jusqu'à ce que la pression à la face inférieure de la paroi surpasse d'une quantité déterminée la pression existant de l'autre côté.

Lorsque les canaux de la paroi sont suffisamment larges, on peut appliquer les lois ordinaires le l'hydrostatique au liquide qu'ils contiennent; il est alors facile de calculer la différence de pression produite par des forces normales à la paroi. Qu'on se figure, en effet, la paroi percée d'un trou ayant la forme d'un cylindre droit, dont la base est située dans le plan V et est égale à l'unité de surface. La force qui agirait sur une masse de liquide remplissant ce trou nous donne la différence cherchée. J'appliquerai cette même proposition au cas actuel, bien que les canaux soient peut-être si étroits qu'ils ne puissent contenir qu'un petit nombre de molécules.[1]) La pression osmotique se trouve ainsi être égale à l'attraction existant entre les molécules B et

1) Pour justifier cette application, on peut se servir de la proposition, se rattachant à la seconde loi de la thermodynamique, qu'un système moléculaire, sous l'action de forces extérieures pour lesquelles il existe un potentiel, prend un état d'équilibre où chaque élément de volume, considéré en entier, est en repos. Supposons, en effet, qu'un liquide (le dissolvant pur), sur lequel agissent des forces extérieures telles que celles dont il a été question au § 1, soit traversé par un diaphragme horizontal, percé dans sa partie droite d'un large canal et dans sa partie gauche de pores aussi fins qu'on le voudra. L'équilibre n'est possible que si la différence de pression entre les deux côtés du diaphragme a la même valeur à droite et à gauche.

la masse liquide dont il vient d'être parlé. Si la paroi a précisément l'épaisseur ae, on peut prendre pour le trou en question le cylindre $abef$, et si la paroi est encore plus épaisse, cela ne change rien aux choses, puisque ae est la distance maximum à laquelle l'attraction s'étend. Dans les deux cas on trouve, par ce qui a été dit à la fin du dernier paragraphe, la valeur K pour la pression osmotique. Celle-ci se trouve donc déterminée par le mouvement moléculaire, bien que nous en ayons cherché la cause immédiate dans les forces attractives.

X.

Bemerkungen zum Virialtheorem.

(Boltzmann-Festschrift, 1904, p. 721.)

I. Der Virialsatz in der Gastheorie.

§ 1. Bekanntlich wird in der kinetischen Molekulartheorie für die Ableitung der Zustandsgleichung oft die von Clausius herrührende Beziehung zwischen dem sogenannten Virial der Kräfte und der kinetischen Energie des Molekülsystems benutzt.[1]) Zu den Schlüssen, die sich daraus ergeben, kann man indes auch auf einem anderen, und zwar auf einem sehr naheliegenden Wege gelangen. Da ich diese Methode in der Literatur nicht erwähnt finde, so erlaube ich mir, dieselbe hier kurz zu entwickeln, obgleich Prof. Boltzmann gewiß nichts Neues darin finden wird.

Bezeichnet man für ein System materieller Punkte die Massen mit m, die rechtwinkligen Koordinaten mit x, y, z, die Kraftkomponenten mit X, Y, Z und die kinetische Energie mit $\mathfrak{T}$, so lautet der Virialsatz:

$$-\tfrac{1}{2}\sum(xX+yY+zZ) = -\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)+\mathfrak{T},$$

oder, wenn r die Entfernung eines Punktes vom Koordinatenursprung bedeutet,

$$-\tfrac{1}{2}\sum(xX+yY+zZ) = -\tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2+\mathfrak{T}. \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Gleichungen, in welchen die Summen sich über sämtliche Punkte des Systems erstrecken, vereinfachen sich, wenn man es mit einer stationären Bewegung zu tun hat. Es verschwindet dann das erste Glied rechts und es wird

$$-\tfrac{1}{2}\sum(xX+yY+zZ) = \mathfrak{T}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Den Wert des links stehenden Ausdrucks, des Virials, erhält man am

---

1) Van der Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, Kapitel II; Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Abschnitt V.

leichtesten, wenn man denselben auffaßt als die mit $-\frac{1}{2\varepsilon}$ multiplizierte Arbeit der Kräfte bei den Verrückungen

$$\delta x = \varepsilon x, \quad \delta y = \varepsilon y, \quad \delta z = \varepsilon z$$

(ε unendlich kleine Konstante), d. h. bei einer in allen Richtungen gleichen Dilatation. Ist z. B. die Oberfläche eines Körpers vom Volumen v einem normalen Druck ausgesetzt, der pro Flächeneinheit die an allen Stellen gleiche Größe p hat, dann hat man die Arbeit dieses Druckes bei einer Volumenzunahme $3\varepsilon v$ mit $-\frac{1}{2\varepsilon}$ zu multiplizieren. Das Resultat ist $\frac{3}{2}pv$ und es ergibt sich daher, wenn man von den inneren Kräften absieht und für die kinetische Energie pro Volumeneinheit T schreibt, die bekannte Formel

$$p = \frac{2}{3}T. \quad \text{(3)}$$

Im allgemeinen sind auch die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen zu berücksichtigen. Wenn z. B. zwischen zwei um r voneinander entfernten materiellen Punkten längs der Verbindungslinie die gleichen und entgegengesetzten Kräfte R wirken, wobei eine Abstoßung positiv heißen möge, dann ist das Virial der inneren Kräfte

$$-\frac{1}{2}\sum rR.$$

Jedes Paar von materiellen Punkten liefert ein Glied zu dieser Summe.

Es möge noch daran erinnert werden, daß Gleichung (2) nicht bloß für ein System materieller Punkte, sondern auch für ein System beliebig gebauter Teilchen gilt. Nur hat man in diesem Falle unter x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes eines Teilchens zu verstehen, unter X, Y, Z die Komponenten der gesamten auf ein Teilchen wirkenden Kraft, und unter $\mathfrak{T}$ die kinetische Energie, welche die Teilchen wegen der Bewegung ihrer Schwerpunkte besitzen. Ist ein Körper aus mehratomigen Molekülen zusammengesetzt, so kann man den Satz in zweierlei Weise anwenden, indem man entweder die Moleküle oder die einzelnen Atome ins Auge faßt.

§ 2. Man kommt nun zu denselben Resultaten, wenn man seine Aufmerksamkeit auf die gesamte Bewegungsgröße der in einem bestimmten festen Raum liegenden Teilchen richtet. Diesen Ausdruck „gesamte Bewegungsgröße" wollen wir so verstehen, daß für jedes Teilchen, dessen Schwerpunkt in dem Raume liegt, das volle Bewegungsmoment in Rechnung gebracht wird, auch dann, wenn das Teilchen von der Grenzfläche des Raumes durchschnitten wird. Demgemäß wollen wir auch sagen, daß die ganze Bewegungsgröße eines Teilchens durch diese Fläche hindurchgetragen wird, sobald der Schwerpunkt durch dieselbe hindurchgeht.

Offenbar kann sich die in dem betrachteten Raume enthaltene Bewegungsgröße aus zwei Ursachen ändern. Erstens können auf die Teilchen, deren Schwerpunkte in dem Raume liegen, Kräfte wirken, die entweder von den übrigen Teilchen des Systems oder von fremden Körpern ausgehen. Zweitens werden infolge der Molekularbewegung eine gewisse Anzahl von Teilchen den Raum verlassen oder in denselben hineintreten, wobei jedes sein Bewegungsmoment mit sich führt. Ist der Zustand stationär, wie das angenommen werden soll, so müssen sich die beiden Änderungsursachen kompensieren.

Wir wollen uns auf Fälle beschränken, wo die Molekularbewegung nach allen Seiten hin in derselben Weise stattfindet. Dann gilt ganz allgemein folgender bekannter Satz.[1]) Die Differenz der nach der Richtung der Normale n genommenen Bewegungsgrößen, welche pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit durch eine beliebige Ebene in dem Körper nach der positiven und nach der negativen Seite hindurchgetragen werden, beträgt $\frac{2}{3}T$. Mit der positiven Seite ist hier die gemeint, nach welcher die Normale zeigt, und T bedeutet die kinetische Energie, welche in der Volumeneinheit wegen der Bewegung der Schwerpunkte vorhanden ist.

Wir betrachten einen Körper, auf dessen Inneres äußere Kräfte, wie die Schwerkraft, nicht wirken. Auf der oberen Seite möge derselbe mit einem horizontalen Kolben in Berührung sein. In diesem Körper denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelepiped, von dem eine Seitenfläche an dem Kolben liegt. Diese Fläche habe die Größe Eins und die gegenüberstehende in dem Körper liegende Seitenfläche möge mit S bezeichnet werden.

Es soll nun für diesen Teil des Körpers die Gleichgewichtsbedingung, und zwar was die Bewegungsgröße in vertikaler Richtung betrifft, gesucht werden. Man überzeugt sich leicht davon, daß man zu diesem Zwecke nur auf den vom Kolben ausgeübten Druck p, auf die Kräfte, welche an der Grundfläche zwischen den außerhalb und innerhalb des Parallelepipeds liegenden Teilchen wirken, und auf die durch die Grundfläche hindurchgehende Bewegungsgröße zu achten hat.

§ 3. Sieht man zunächst gänzlich von den Kräften zwischen den Teilchen ab, so wird das Problem sehr einfach. Der vom Kolben ausgeübte Druck erteilt dem Inhalte unseres Parallelepipeds pro Zeiteinheit die vertikal nach unten gerichtete Bewegungsgröße p, und der Zustand kann nur dann stationär sein, wenn eine gleiche Bewegungsgröße den Raum an der Unterseite verläßt. Dies führt sofort auf Gleichung (3).

Um nun weiter auch die Wirkungen zwischen den Teilchen zu

[1]) Siehe diese Sammlung, p. 178, Anmerkung 1).

berücksichtigen, haben wir zu beachten, daß diese eine vertikale Kraft zur Folge haben, die an der Grundfläche von den äußeren auf die inneren Teilchen ausgeübt wird. Diese Kraft sei A, positiv gerechnet, wenn sie abwärts gerichtet ist. Die Formel (3) ist jetzt durch

$$p + A = \tfrac{2}{3} T \quad \text{. . . . . (4)}$$

zu ersetzen. Wären z. B. nur die von van der Waals angenommenen anziehenden Kräfte vorhanden, so wäre A einfach die resultierende Anziehung zwischen den auf beiden Seiten einer beliebigen Ebene liegenden Teilen des Körpers. Man sieht leicht, daß dieselbe dem Quadrat der Dichte proportional gesetzt werden darf, so daß A in das Glied $\frac{a}{v^2}$ der van der Waals'schen Gleichung übergeht. Nebenbei möge bemerkt werden, daß bei dieser Betrachtung nur von der Anziehung im Innern des Körpers die Rede ist; man erkennt demzufolge unmittelbar, daß das Resultat unabhängig ist von dem komplizierten Zustande, der vielleicht in der Grenzschicht des Körpers besteht.

Auch dann, wenn nebst den anziehenden auch abstoßende Kräfte wirksam sind, gilt die Gleichung (4), vorausgesetzt, daß man unter A die Resultierende aller Kräfte versteht. Ist z. B. ein fester Körper vom luftleeren Raum umgeben, so muß diese Resultierende genau den Wert $\frac{2}{3} T$ haben.

Wir wollen jetzt ein System elastischer Kugeln betrachten, die nur bei den Zusammenstößen aufeinander wirken. Denken wir uns, daß jeder Stoß eine gewisse Zeit (die wir nachher sich dem Grenzwerte Null nähern lassen können) in Anspruch nimmt, dann ist es klar, daß in einem beliebig gewählten Augenblick eine gewisse Anzahl von Molekülpaaren gerade in dem Akt des Zusammenstoßens begriffen sind. Unter diesen Paaren gibt es einige von solcher Lage, daß der Schwerpunkt des einen Teilchens oberhalb und der Schwerpunkt des anderen unterhalb der Grundfläche des Parallelepipeds liegt. Die auf die zuerst genannten Teilchen wirkenden Kräfte setzen sich zu einer aufwärts gerichteten Resultierenden B zusammen, und die Gleichung für den stationären Zustand nimmt die Gestalt

$$p - B = \tfrac{2}{3} T$$

an. Man gelangt dann weiter zu dem Gliede, das in der van der Waals'schen Gleichung den Einfluß des Molekularvolumens ausdrückt, wenn man B mittels geeigneter Kunstgriffe berechnet. Darauf braucht hier nicht eingegangen zu werden, da diese Kunstgriffe dieselben sind, die in Anwendung kommen müssen, wenn man das Problem mit Hilfe des Virialsatzes behandeln will.[1])

---

1) Siehe diese Sammlung, Abh. V.

§ 4. Um uns hiervon zu überzeugen und die Aquivalenz der beiden Methoden darzutun, gehen wir auf die Annahme zurück, daß in einem System materieller Punkte die § 1 mit R bezeichneten Kräfte wirksam sind. Von allen Punktpaaren betrachten wir nun zunächst diejenigen, für welche die Verbindungslinie r, und also auch die Kraft R eine bestimmte Richtung und Größe hat; wir nennen N die Anzahl der in der Volumeneinheit liegenden Anfangspunkte dieser gleichgerichteten und gleichen Strecken r, und ϑ den spitzen Winkel, welchen letztere mit der Vertikalen bilden. Die Grundfläche des Parallelepipeds wird dann von $Nr \cos\vartheta$ dieser Verbindungslinien geschnitten und die ausgewählten Punktpaare liefern zu der Kraft B den Anteil

$$NrR \cos^2\vartheta.$$

Man erhält hieraus die volle Abstoßung B mittels einer Summation, deren Resultat sich auf die Form

$$\tfrac{1}{3}\sum rR$$

bringen läßt, wo das Zeichen Σ sich auf sämtliche Punktpaare in der Volumeneinheit bezieht. Die schließlich resultierende Gleichung

$$p - \tfrac{1}{3}\sum rR = \tfrac{2}{3}\, T$$

stimmt genau mit derjenigen überein, die aus (2) entsteht, wenn man für die Viriale des Druckes und der Kräfte R die § 1 angegebenen Werte einsetzt.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß man bei einem mehratomigen Körper die jetzt geschilderte Methode, ebenso gut wie den Virialsatz in zwei verschiedenen Weisen anwenden kann (§ 1).

II. Bewegung eines Elektrons im Felde eines festen elektrischen Dipols.

§ 5. Für ein konservatives System, dessen potentielle Energie wir mit U, und dessen konstante Gesamtenergie wir mit E bezeichnen, verwandelt sich (1) in die interessante Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2 = 2\sum(xX + yY + zZ) - 4U + 4E, \quad . \quad . \quad (5)$$

deren rechte Seite nur von der Konfiguration abhängt, und die sich in einigen Fällen integrieren läßt. Dies gelingt z. B., wenn man es mit einem einzigen Punkte zu tun hat, der einer von O ausgehenden, von der Entfernung r abhängigen Kraft R unterworfen ist. Setzt man dann

$$U = \int_r^\infty R\,dr,$$

so wird die Gleichung

$$m\frac{d^2(r^2)}{dt^2}=2\left[rR-2\int_r^\infty R\,dr\right]+4E, \quad \dots . \quad (6)$$

woraus sich leicht die in der Theorie der Zentralbewegung auftretende Beziehung zwischen r und t ergibt.

§ 6. Ein zweites Beispiel, worauf hier etwas näher eingegangen werden möge, liefert die Bewegung eines Punktes in einem Kraftfelde, in dem die potentielle Energie eine homogene Funktion — 2. Grades der Koordinaten ist. Da dann

$$xX+yY+zZ=-\left(x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}+z\frac{\partial U}{\partial z}\right)=2U,$$

so wird die rechte Seite von (5) unabhängig von den Koordinaten.

Wir betrachten speziell den Fall, daß die potentielle Energie gleich $\frac{x}{r^3}$, multipliziert mit einem konstanten Koeffizienten, ist. Dieses Problem ist von Interesse für die Elektronentheorie, da man auf dasselbe geführt wird, wenn ein Elektron unter dem Einflusse eines festen Teilchens steht, das, in geringer Entfernung voneinander, gleiche positive und negative Ladung trägt.

Es sei $\frac{amx}{r^3}$ die potentielle Energie, wobei a positiv sein möge, und $E=mC_1$. Aus der Gleichung (5), oder

$$\frac{d^2(r^2)}{dt^2}=4C_1$$

folgt dann

$$\tfrac{1}{2}r^2=C_1t^2+C_2t+C_3, \quad \dots \dots . \quad (7)$$

mit folgenden Werten der Integrationskonstanten:

$$C_1=\tfrac{1}{2}u_0^2+a\frac{x_0}{r_0^3}, \quad C_2=r_0\left(\frac{dr}{dt}\right)_0=r_0u_0\cos\vartheta_0, \quad C_3=\tfrac{1}{2}r_0^2.$$

Hier ist u die Geschwindigkeit und ϑ der Winkel, den die Bewegungsrichtung mit dem verlängerten Radiusvektor einschließt, während der Index 0 die Anfangswerte, für $t=0$, anzeigen soll.

Es läßt sich nun sofort entscheiden, ob der Punkt im Laufe der Bewegung den Ursprung O erreichen wird. Natürlich ist das nur möglich, wenn die Größe

$$C_2^2-4C_1C_3=-r_0^2u_0^2\sin^2\vartheta_0-2a\frac{x_0}{r_0}$$

positiv ist. Indem wir nun einige spezielle Fälle übergehen, uns auf positive t beschränken, und, wenn einmal der Ursprung erreicht ist, den Vorgang nicht weiter verfolgen, können wir folgendes sagen:

Ist x_0 positiv, so entfernt sich der Punkt ins Unendliche, entweder direkt, oder (falls $\vartheta_0>\frac{1}{2}\pi$) nachdem r ein Minimum geworden ist.

Es sei zweitens $x_0 < 0$. Dann kommt es auf den Wert der Anfangsgeschwindigkeit an. Ist diese so klein, daß $C_1 < 0$, so kommt es, welchen Wert ϑ_0 auch haben möge, immer zu einem Zusammentreffen mit O, und zwar wird r vorher ein Maximum, wenn $\vartheta_0 < \frac{1}{2}\pi$. Ist dagegen die Anfangsgeschwindigkeit so groß, daß $C_1 > 0$, dann kann O nur erreicht werden, wenn $\vartheta_0 > \frac{1}{2}\pi$ und

$$\sin\vartheta_0 < \frac{1}{u_0}\sqrt{-\frac{2ax_0}{r_0^3}}.$$

Die Werte von t, für welche r Null, oder zu einem Maximum bzw. Minimum wird, lassen sich in jedem Fall leicht angeben.

§ 7. Dank der Gleichung (7) kann man die Integration der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(3\frac{x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 3a\frac{xy}{r^5}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 3a\frac{xz}{r^5}$$

jetzt vollständig zu Ende führen. Es ist zunächst

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = -a\frac{y}{r^3}, \quad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = -a\frac{z}{r^3},$$

und es ergibt sich weiter, wenn man diese Gleichungen mittels der Formeln

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\chi, \quad z = r\sin\varphi\sin\chi$$

auf Polkoordinaten transformiert, und sie zueinander addiert, nachdem man die erste mit $\cos\chi$ und die zweite mit $\sin\chi$ multipliziert hat,

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) - r^2\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = \frac{a}{r^2}\sin\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Für die Projektion der Bewegung auf die yz-Ebene gilt offenbar der Flächensatz, so daß

$$r^2\sin^2\varphi\frac{d\chi}{dt} = C_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo C_4 eine neue Konstante ist. Wir substituieren den hieraus folgenden Wert von $\frac{d\chi}{dt}$ in (8), multiplizieren diese Gleichung mit r^2 und führen die durch

$$t' = \int\frac{dt}{r^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{C_1t^2 + C_2t + C_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

bestimmte neue Variable ein. Die dann entstehende Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt'^2} = a\sin\varphi + C_4^2\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

können wir integrieren, wenn wir sie vorher mit $\frac{d\varphi}{dt'}$ multiplizieren. Wir erhalten dann schließlich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt'}\right)^2 = -a\cos\varphi - \frac{C_4^2}{2\sin^2\varphi} + \frac{1}{2}C_5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$t' = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_5 - 2a\cos\varphi - \frac{C_4^2}{\sin^2\varphi}}} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Nachdem man in dieser Weise φ als Funktion von t', und also auch von t, gefunden hat, erhält man χ durch Integration der Gleichung (9).

Da (12) sich auf ein elliptisches Integral reduziert, so läßt sich die Diskussion dieser Formeln vollständig durchführen.

Es ist noch zu bemerken, daß C_5 in einfacher Weise mit den früheren Konstanten zusammenhängt. Aus (11) folgt nämlich, wenn man (10) und (9) berücksichtigt,

$$C_5 = r^4 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^4 \sin^2\varphi \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + 2a\cos\varphi.$$

Da nun

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2\varphi \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2$$

das Quadrat der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Radiusvektor ist, und also den Wert $u^2 \sin^2\vartheta$ hat, so wird, wenn man die Formel auf die Anfangswerte anwendet,

$$C_5 = r_0^2 u_0^2 \sin^2\vartheta_0 + 2a \frac{x_0}{r_0} = 4C_1C_3 - C_2^2.$$

§ 8.[1]) Wir wollen die Gestalt der Bahn noch etwas näher betrachten für den speziellen Fall, daß $C_4 = 0$ und also nach (9) χ konstant ist. Der Punkt bleibt dann fortwährend in ein und derselben durch die x-Achse gehenden Ebene und (12) reduziert sich auf

$$t' = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_5 - 2a\cos\varphi}}.$$

Um nun einen Überblick über die verschiedenen möglichen Fälle zu gewinnen, denken wir uns einen schweren Punkt mit der Masse Eins, der sich auf einem vertikalen Kreis vom Radius Eins bewegen muß. Ist die Beschleunigung der Schwerkraft a und hat der Punkt an der tiefsten Stelle der Bahn die kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2} C_5 + a,$$

so ist, wenn wir mit φ die auf dem Kreisumfang gemessene Entfernung vom höchsten Punkte der Bahn bezeichnen,

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_5 - 2a\cos\varphi}}.$$

Der Winkel φ hängt also in unserem Problem in derselben Weise von t' ab, wie bei dem Pendel von der Zeit t, und wir können die bekannten für die Bewegung dieses letzteren geltenden Sätze direkt auf

[1]) In dieser Ausgabe hinzugefügt.

das Elektron übertragen. Nur ist dabei zu beachten, daß t' nicht die Zeit bedeutet, sondern damit in der in (10) ausgedrückten Weise zusammenhängt, und daß also, wenn $\frac{d\varphi}{dt'}$ in dem einen Problem den gleichen Wert hat wie $\frac{d\varphi}{dt}$ in dem anderen, die Winkelgeschwindigkeiten $\frac{d\varphi}{dt}$ in den beiden Fällen sich wie $\frac{1}{r^2}$ und 1 verhalten. Dem Vorzeichen nach stimmen indes diese Geschwindigkeiten stets überein. Wir bemerken auch noch, daß, wenn $C_2^2 - 4C_1C_3 < 0$, t' zugleich mit t $-\infty$ und $+\infty$ wird. Ist aber $C_2^2 - 4C_1C_3 > 0$ und wird also r Null für zwei Werte von t, sagen wir t_1 und t_2, so gibt (10)

$$t' = \frac{1}{2C_1(t_1 - t_2)} \log \frac{C(t - t_1)}{t - t_2},$$

(C Integrationskonstante), was sowohl für $t = t_1$ als auch für $t = t_2$ positiv oder negativ unendlich wird.

§ 9. a) Es sei nun erstens

$$C_5 > 2a, \quad \text{also} \quad C_2^2 - 4C_1C_3 < 0.$$

Der Punkt auf dem Kreise durchläuft diesen dann immerfort in derselben Richtung. Daraus folgt, daß auch beim Elektron der Winkel φ sich fortwährend in derselben Richtung ändert, daß also das Teilchen den elektrischen Dipol unendlich viele Mal umkreist. Die Entfernung von diesem Dipol wird ein Minimum für $t = -\frac{C_2}{2C_1}$ und ist unendlich groß für $t = -\infty$ und $t = +\infty$.

b) Ist

$$C_5 = 2a, \quad \text{also wieder} \quad C_2^2 - 4C_1C_3 < 0,$$

so hat der Punkt auf dem Kreise gerade genügende Geschwindigkeit, um den höchsten Punkt zu erreichen. Das geschieht aber bekanntlich erst nach unendlich langer Zeit, und man kann auch sagen, daß der Punkt zur Zeit $t = -\infty$ die genannte Lage hatte. Von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ geht also φ von 0 bis 2π oder umgekehrt. Das Elektron umkreist den Ursprung nur einmal und beschreibt eine Bahn, deren Enden sich der positiven x-Achse asymptotisch nähern. Der Radiusvektor wird wieder ein Minimum in dem oben angegebenen Augenblick.

c) Wir wollen drittens annehmen

$$0 < C_5 < 2a, \quad \text{also noch stets} \quad C_2^2 - 4C_1C_3 < 0.$$

Der Punkt auf dem Kreise pendelt jetzt zwischen zwei Punkten hin und her, die höher als der Mittelpunkt liegen. Demgemäß bewegt sich das Elektron fortwährend zwischen zwei durch den Ursprung gehenden Geraden, die mit der positiven x-Achse gleiche Winkel, die kleiner als 90° sind, bilden. Die Bahn des Elektrons bleibt auf den

Winkel zwischen diesen Geraden, der die negative x-Achse enthält, beschränkt; sie berührt abwechselnd die eine und die andere Gerade. Zugleicherzeit nimmt r erst von ∞ bis zu einem Minimumwert ab, und wächst dann wieder ins Unendliche. Die Werte von t', für welche die genannten Berührungen stattfinden, folgen sich mit gleichen Intervallen; die Zeiten, in welchen das Elektron von der einen zur anderen Gerade geht, sind um so kleiner, je näher es dem Dipol kommt.

d) Ist endlich

$$C_5 < 0, \quad \text{d. h.} \quad C_2^2 - 4C_1C_3 > 0$$

(der äußerste negative Wert von C_5 ist $-2a$), dann geht der Punkt auf dem Kreise zwischen zwei Punkten hin und her, die tiefer als der Mittelpunkt liegen. Das Elektron bewegt sich also in ähnlicher Weise wie so eben zwischen zwei geraden Linien, dieses Mal aber innerhalb eines Winkels, der kleiner als 180° ist. Dieser Winkel wird von der negativen x-Achse halbiert.

Die Entfernung r wird jetzt Null für zwei Werte von t, die wir t_1 und t_2 nennen wollen, wobei $t_1 < t_2$ sei, während für $t = \pm\infty$ die Entfernung unendlich groß wird. Es können daher folgende Fälle unterschieden werden:

α) Von $t = -\infty$ bis $t = t_1$ nimmt r von ∞ bis 0 ab; das Elektron erreicht dabei den Dipol, und zwar macht es, wenn t eine beliebig gewählte Zeit ist, die dem Augenblick t_1 um ein endliches Zeitintervall vorhergeht, sowohl vor als auch nach dieser Zeit eine unendliche große Zahl von Hin- und Hergängen zwischen den genannten Linien.

β) Von $t = t_2$ bis $t = +\infty$ führt das Elektron eine Bewegung aus, die man als das Umgekehrte der soeben besprochenen auffassen kann.

γ) Es nehme t von t_1 bis t_2 zu. Das Elektron geht dann (mit unendlich großer Geschwindigkeit) vom Dipol aus, erreicht nach unendlich vielen Hin- und Hergängen eine maximale Entfernung von demselben und kehrt dann, abermals in unendlich vielen Schwingungen, zum Dipol zurück.

Auf die Bewegung eines Elektrons, für welches $\frac{d\chi}{dt}$ nicht verschwindet, wollen wir hier nicht näher eingehen. Ich erwähne nur, daß, wie aus der Gleichung (9) hervorgeht, $\frac{d\chi}{dt}$ fortwährend dasselbe Vorzeichen hat, und daß sich also die durch die x-Achse und das Elektron gelegte Ebene immerfort in demselben Sinne dreht.

Was den Winkel φ betrifft, so schwankt dieser jetzt hin und her zwischen den beiden Werten, für welche der Nenner in (12) verschwindet. Die x-Achse kann das Elektron in diesem Fall nie erreichen.

XI.

Über den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und dessen Beziehung zu den Molekulartheorien.

(Den Vorlesungen des Verfassers entnommen.)

Einleitung.

Obgleich die nachstehenden Betrachtungen an Resultaten kaum etwas Neues bringen werden, mögen sie dennoch hier aufgenommen werden, weil sie vielleicht wegen der Form der Darstellung und der Diskussion gewisser speziellen Fragen einiges Interesse beanspruchen dürften. Um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir dabei die Grundbegriffe der Theorie als bekannt voraussetzen und nur mit einigen kurzen Andeutungen an dieselben erinnern.

§ 1. Begriff der Wärmemenge. Wir können den Energieinhalt eines Körpers in zweierlei Weise vergrößern oder verkleinern, entweder dadurch, daß wir äußere Kräfte, welche eine positive oder negative Arbeit leisten, wirken lassen, oder durch Zufuhr bzw. Entziehung von Wärme. Die Erfahrung lehrt uns, daß es möglich ist, diese beiden Wirkungen in unseren Beobachtungen voneinander zu trennen, was uns jedoch nicht abzuhalten braucht, sie als im Grunde gleichartig zu betrachten und, wie die Molekulartheorien postulieren, bei einem Wärmeaustausch an die Arbeit von Kräften zu denken, welche zwischen den kleinsten Teilchen der miteinander in Berührung stehenden Körper wirksam sind. Wir setzen voraus, daß bei genügender Kenntnis der Erscheinungen nie Zweifel darüber bestehen könnte, inwiefern man es mit der einen oder der anderen Art von Einwirkungen zu tun habe, und daß es immer möglich sein würde, die Größe der in Betracht kommenden Wärmemengen aus den Beobachtungen abzuleiten. Wir wollen diese Mengen stets in Arbeitseinheiten ausdrücken.

§ 2. Gleichgewichtszustände und umkehrbare Änderungen. Unter einem Gleichgewichtszustand eines Systems verstehen wir einen Zustand, in dem es dauernd verharren kann; dabei bleiben alle der Beobachtung zugänglichen Größen, wie z. B. die Dimensionen und die

Intensität der äußeren Kräfte, konstant. Auch der inneren Energie müssen wir einen unveränderlichen Wert zuschreiben. Da wir überdies das System als ruhend voraussetzen, und also keine Arbeit äußerer Kräfte ins Spiel kommt, so können wir aus dem Energiegesetz folgern, daß, solange der Gleichgewichtszustand besteht, keine Zuleitung oder Abgabe von Wärme stattfindet.

Wir können uns weiter vorstellen, daß, infolge allmählicher Änderung der äußeren Kräfte und geeigneter Wärmezu- oder -abfuhr, das System eine Reihe kontinuierlich ineinander übergehender Gleichgewichtszustände durchläuft. Bedingung ist dabei, daß der Prozeß sich sehr langsam abspielt. Genauer gesagt, wir betrachten den Grenzfall, dem sich die Vorgänge nähern, wenn sie unendlich langsam stattfinden; nur dann dürfen wir von den Abweichungen vom Gleichgewichtszustande, die bei rascheren Änderungen unvermeidlich sein würden, absehen.

Daß nun ein Prozeß, der in einer Aufeinanderfolge von Gleichgewichtszuständen besteht, auch in umgekehrter Richtung verlaufen kann, ist sofort klar. Ebenso daß, wenn der Übergang A ⟶ B eine gewisse Wärmezufuhr erfordert, bei dem entgegengesetzten Prozeß B ⟶ A eine Wärmeabgabe vom gleichen Betrag stattfinden muß. Mit Rücksicht auf das Energiegesetz folgt dies unmittelbar aus der Erwägung, daß sowohl die Arbeit der äußeren Kräfte, als auch die Änderung der inneren Energie in den beiden Fällen dieselbe Größe mit entgegengesetztem Vorzeichen hat.

Wir werden eine dem betrachteten System mitgeteilte Wärmemenge positiv und eine von demselben abgegebene negativ nennen.

§ 3. Temperatur. Erfahrungsmäßig läßt sich, wenn uns eine Reihe von Körpern gegeben ist, jedem derselben eine gewisse Zahl zuordnen, derart daß, wenn zwei Körper in solche Lagen gebracht werden, daß sie Wärme miteinander austauschen können, ein Wärmeübergang dann und nur dann stattfindet, wenn die beiden betreffenden Zahlen ungleich sind, und daß in diesem Fall immer der Körper mit der größeren Zahl Wärme an den mit der kleineren Zahl abgibt. Haben wir eine Reihe derartiger Zahlen, oder wie man sagen kann, eine Reihe von Temperaturen aufgestellt, dann kann man daraus leicht beliebig viele andere Zahlenreihen ableiten, die ebensogut wie die ursprünglichen für das Entstehen und die Richtung eines Wärmeüberganges bestimmend sind. Diese Reihen entsprechen den verschiedenen Temperaturskalen.

§ 4. Grundsatz von Clausius. Wir denken uns irgend welche, im allgemeinen nicht reversiblen Umwandlungen in einem System von Körpern. Nach dem Grundsatze von Clausius kommt es nie vor, daß

schließlich, während alle übrigen Körper zu ihren Anfangszuständen zurückgekehrt oder darin geblieben sind, zwei Körper, die ursprünglich ungleiche Temperaturen hatten, Zustände angenommen haben, die man auch dadurch hätte erreichen können, daß man dem Körper von der niedrigsten Temperatur eine gewisse Wärmemenge entzogen und dem anderen eine gleiche Wärmemenge zugeleitet hätte. Kürzer gesagt: es ist unmöglich, daß die stattgefundenen Änderungen, alles zusammengenommen, sich auf die Überführung von Wärme von einem kälteren nach einem wärmeren Körper reduzieren.

Man kann sagen, dieses Prinzip enthalte eine Erweiterung des Temperaturbegriffs. Es sagt ja aus, daß wir diesen Wärmeübergang, der bei direkter Berührung unmöglich ist, ebensowenig auf künstlich ersonnenen Umwegen und mit allen uns zu Gebote stehenden Kunstgriffen herbeiführen können. Fast alle Ergebnisse der Thermodynamik, insofern sie nicht auf dem Energiegesetze allein beruhen, lassen sich auf den Clausius'schen Satz zurückführen, und zwar indem man zeigt, daß, wenn die Behauptungen, deren Richtigkeit man beweisen will, der Wirklichkeit nicht entsprächen, das Ergebnis wirklich ausführbarer oder jedenfalls denkbarer Experimente mit dem Prinzip im Widerspruch stehen würde.

Eine Schlußfolgerung, die hier gleich erwähnt werden möge, ist, daß auch ein Körper, welcher äußeren Kräften unterworfen ist, im Gleichgewichtszustande in allen seinen Teilen dieselbe Temperatur haben muß. Um das an einem Beispiele zu erläutern, denken wir uns, eine vertikale Gassäule habe unter dem Einfluß der Schwerkraft, unten eine höhere Temperatur (T_1) als oben (T_2). Wählen wir dann zwei Wärmebehälter K_1 und K_2 von solchen Temperaturen T'_1 und T'_2, daß

$$T_1 > T'_1 > T'_2 > T_2,$$

dann können wir mittels zweier Hilfskörper, die als Wärmeübertrager dienen, eine gewisse Wärmemenge von K_2 nach dem oberen Teil der Gassäule, und gleich viel Wärme von deren unterem Teil nach K_1 transportieren. Das Ergebnis dieser Operation stände offenbar mit dem Clausius'schen Grundsatze im Widerspruch.

§ 5. Carnot'scher Kreisprozeß. Für einen solchen, der sich bekanntlich aus zwei umkehrbaren isothermischen und zwei ebenfalls umkehrbaren adiabatischen Änderungen eines Körpers zusammensetzt, läßt sich aus dem Clausius'schen Prinzip folgern, daß das Verhältnis der Wärmemengen, welche dem Körper bei dem einen isothermischen Vorgange von außen zugeführt und bei dem anderen entzogen werden müssen, von den speziellen Eigenschaften des Körpers unabhängig ist; es ist vollständig bestimmt durch die Temperaturen, welche das System

bei den beiden isothermischen Änderungen hat, also durch die Temperaturen der Wärmereservoire, welche jedesmal dazu dienen, die Temperatur des Körpers konstant zu erhalten. Indem wir nun das Verhältnis dieser Temperaturen geradezu als das Verhältnis jener Wärmemengen definieren, setzen wir fest, was wir unter absoluter Temperatur zu verstehen haben. Es ist klar, daß auch die einzelnen Zahlenwerte bekannt sein werden, sobald man für die Differenz irgend zweier Temperaturen eine bestimmte Zahl (z. B. für die Differenz der Temperaturen des siedenden Wassers und des schmelzenden Eises die Zahl 100) angenommen hat. Im folgenden meinen wir mit Temperatur immer die absolute Temperatur; wir bezeichnen sie dauernd mit T. Der Definition zufolge ist sie stets positiv.

Von einem Carnot'schen Kreisprozeß wollen wir sagen, er werde in positiver oder negativer Richtung ausgeführt, je nachdem der wirkende Körper eine positive oder negative Arbeit leistet.

§ 6. Aus der Beziehung

$$Q_1 : Q_2 = T_1 : T_2, \qquad (1)$$

die nun bei jedem Carnot'schen Kreislauf zwischen den in Betracht kommenden Wärmemengen Q_1, Q_2 und den Temperaturen T_1, T_2 besteht, läßt sich leicht manche wichtige Folgerung ziehen. In der Tat besteht eine Form der Anwendung des zweiten Hauptsatzes, und zwar die ursprünglich von Clausius gewählte, eben darin, daß man jedesmal für den betrachteten Körper einen Carnot'schen Kreisprozeß fingiert und dann die Gleichung (1) benutzt. Wir wollen darauf nicht näher eingehen und nur die Bemerkung einflechten, daß es für qualitative Schlüsse schon genügt zu wissen, daß in jedem in positiver Richtung verlaufenden Kreisprozeß der Körper bei der höchsten der vorkommenden Temperaturen Wärme aufnehmen muß.

Gesetzt z. B., wir haben es mit einem Körper zu tun, der keinen anderen äußeren Kräften als einem normalen in allen Punkten der Oberfläche gleichen Druck p unterworfen ist, und dessen Zustand sich durch die Temperatur und das Volum v bestimmen läßt; der Druck hängt dann von diesen beiden Variablen ab. Für diesen Fall, den wir oft betrachten werden, und der zur Abkürzung der vp-Fall heißen möge, können wir in bekannter Weise in einem vp-Diagramm die Isothermen ziehen, wobei wie gewöhnlich die v-Achse nach rechts und die p-Achse nach oben gerichtet sein möge. Ein Carnot'scher Kreislauf wird sodann durch ein im allgemeinen krummliniges Viereck dargestellt, von welchem zwei sich gegenüberstehende Seiten Teile von Isothermen und zwar, wie wir annehmen wollen, von nahe beieinander liegenden Isothermen sind; bei positiver Richtung des ganzen Prozesses wird die obere Isotherme von links nach rechts durchlaufen. Zwei Fälle sind

nun möglich. Entweder, diese höher liegende Isotherme entspricht der höheren Temperatur; dann muß also, wenn sie in der genannten Richtung durchwandert wird, der Körper Wärme von außen aufnehmen. Oder umgekehrt, sie bezieht sich auf die tiefere Temperatur; dann muß, während sie von links nach rechts beschrieben wird, Wärme abgegeben werden. Wir kommen daher zu folgender Regel, die sich, wie leicht ersichtlich, auch umkehren läßt. In denjenigen Fällen, wo bei Steigerung der Temperatur die Isotherme in die Höhe rückt, d. h. wo bei konstantem Volum der Druck mit der Temperatur steigt, ist für eine isothermische Ausdehnung Zufuhr von Wärme erforderlich; nimmt dagegen der Druck infolge einer Erwärmung ab, so muß man dem System Wärme entziehen, um bei einer Ausdehnung die Temperatur konstant zu erhalten.

Dies führt sofort zu dem merkwürdigen durch Versuche bestätigten Resultat, daß ein Körper, der sich bei Erwärmung zusammenzieht, sich bei adiabatischer Kompression abkühlen muß. Für einen solchen ist nämlich, wie man leicht sieht, $\frac{\partial p}{\partial T}$ bei konstantem v negativ, folglich erfordert isothermische Ausdehnung Entziehung von Wärme. Findet diese nicht statt, dann muß die Temperatur steigen[1]); sinken wird sie umgekehrt bei adiabatischer Kompression.

Aus der Umkehrung der Regel folgt z. B., daß der Schmelzpunkt des Eises bei Druckerhöhung erniedrigt wird. Man hat nur zu beachten, daß bei Mitteilung von Wärme an ein aus Eis und Wasser bestehendes System das Volum verkleinert wird, und daß also eine isothermische Ausdehnung von einer Wärmeabgabe begleitet ist. Wir schließen hieraus auf einen negativen Wert von $\frac{\partial p}{\partial T}$, oder, wie man in diesem Fall auch schreiben kann, $\frac{dp}{dT}$.

§ 7. Man kann sich ferner eines Carnot'schen Kreisprozesses bedienen, um den bekannten von Lord Kelvin der Thermodynamik zugrunde gelegten Satz auf den Clausius'schen, oder umgekehrt, zurückzuführen. Mit einer kleinen Abänderung wollen wir denselben so formulieren, daß das Endresultat irgend welcher mit einem System von Körpern vorgenommenen Operationen nie bloß darin bestehen kann, daß einem Körper A eine gewisse Wärmemenge w entzogen und daß

1) Bei dieser Schlußweise ist vorausgesetzt, daß man es mit stabilen Gleichgewichtszuständen zu tun hat. Dann gelten die beiden Sätze, daß im allgemeinen bei konstanter Temperatur der Druck bei Verkleinerung des Volums zunimmt, und daß Wärmezufuhr bei konstantem Volum eine Temperaturerhöhung zur Folge hat. Für labile Zustände kommt man zu demselben Endresultat, eben weil dann gerade das Entgegengesetzte sowohl des einen als auch des anderen Satzes gilt. Darauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden.

diese auf äußere Arbeitsleitung verwendet ist. Dann könnte man nämlich diese Arbeit benutzen, um mittels eines Carnot'schen Prozesses, der in negativer Richtung verläuft, und bei welchem der Körper A als das höher temperierte Wärmereservoir dient, nicht nur diesem die Menge w zurückzuerstatten, sondern überdies noch eine gewisse, einem Reservoir von tieferer Temperatur entnommene Wärmemenge in denselben hineinzuführen. Was man dann erreicht hätte, ist nach dem Clausius'schen Satze unmöglich.

Betrachtung eines beliebigen Kreisprozesses. Entropie.

§ 8. Wichtige und sich zu weitgehenden Anwendungen eignende Sätze gewinnen wir, wenn wir jetzt ein ganz beliebiges System M betrachten, das nach irgend welchen Umwandlungen in den Anfangszustand zurückkehrt. Dabei setzen wir nicht voraus, daß das System sich immer in einem Gleichgewichtszustande befinde; auch nicht umkehrbare Erscheinungen lassen wir also zu. Indes wollen wir zur Vereinfachung annehmen, daß die Temperatur, während sie sich im allgemeinen im Laufe der Zeit ändert, in jedem Augenblick in der ganzen Ausdehnung des Systems denselben Wert hat.

Wir zerlegen den zu betrachtenden Kreislauf in unendlich kleine Teile und bemerken, daß im allgemeinen bei jedem dieser Schritte eine gewisse unendlich kleine Wärmemenge dQ, die mitunter negativ sein kann, von außen aufgenommen wird. Woher nun die Wärme stammt und in welcher Weise sie dem System zugeleitet wird, ist, was die Vorgänge in diesem letzteren betrifft, gleichgültig; wir dürfen daher in dieser Hinsicht eine spezielle Voraussetzung machen. Wir wollen ein einziges Wärmereservoir R benutzen, an dem weiter nichts geändert wird, als daß es Wärme aufnimmt oder abgibt, und dessen Wärmekapazität so groß ist, daß seine Temperatur T_0 als konstant angesehen werden darf. Soll nun dem System M eine Wärmemenge dQ zugeführt werden, so bedienen wir uns eines Hilfskörpers, mit dem wir einen Carnot'schen Kreisprozeß ausführen, und zwar soll dabei das System M der eine und R der andere Wärmebehälter sein. Aus der Gleichung (1) folgt, daß dann diesem letzteren die Wärmemenge

$$\frac{T_0}{T}\,dQ$$

entzogen werden muß, und zwar gilt dieser Ausdruck auch dann, wenn es sich um ein negatives dQ handelt. Im ganzen wird also das Reservoir R die Wärmemenge

$$\int \frac{T_0}{T}\,dQ = T_0 \int \frac{dQ}{T}, \qquad \ldots \ldots \qquad (2)$$

wo das Integral sich auf den ganzen Kreislauf von M bezieht, verlieren.

Wir können nun behaupten, daß dieser Ausdruck nicht positiv sein kann, denn wir hätten, wenn er das wäre, eben den Fall realisiert, der sich am Schluß des vorhergehenden Paragraphen als unmöglich herausgestellt hat. Mit Ausnahme von R sind nämlich alle Körper, sowohl das System M als auch die Hilfskörper, die uns für die Wärmeübertragung gedient haben, wieder in ihren Anfangszustand zurückgekehrt; die aus R verschwundene Wärme könnte also nur auf äußere Arbeit verwendet sein.

Dagegen ist ein von Null verschiedener negativer Wert von (2) nicht ausgeschlossen. Ein solcher bedeutet ja, daß eine der Arbeitsleistung äußerer Kräfte entsprechende Wärme in dem Reservoir R zum Vorschein gekommen ist, und das widerspricht keineswegs dem Clausius'schen Prinzip.

Wir schreiben das Resultat in der Form

$$\int \frac{dQ}{T} \leqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und fügen hinzu, daß hier das untere Zeichen gelten muß und daß also

$$\int \frac{dQ}{T} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sobald die mit dem System M vorgenommenen Änderungen sämtlich umkehrbar sind. Hätte nämlich in diesem Fall das Integral einen negativen Wert, so wäre es für den umgekehrten Kreislauf positiv und das ist, wie wir fanden, unmöglich.

Der Vorteil der vorstehenden Beweisführung liegt darin, daß sie ganz allgemein für Körper jeder beliebigen Art und nicht etwa bloß für den vp-Fall gilt.

§ 9. Von dem in (4) ausgedrückten Satze ausgehend, gelangt man in bekannter Weise zu dem Entropiebegriff. Zunächst folgt aus der Gleichung, daß, wenn zwischen zwei Gleichgewichtszuständen A und B ein umkehrbarer Übergang auf verschiedenen Wegen, d. h. mit verschiedenen Zwischenzuständen möglich ist, das Integral

$$\int_{A}^{B} \frac{dQ}{T}$$

für alle diese Wege den gleichen Wert hat.

Ferner wählen wir einen bestimmten Zustand N des Systems als „Nullzustand" und definieren die Entropie η in einem Zustande A durch die Formel

$$\eta = \int_{N}^{A} \frac{dQ}{T}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wo das Integral sich über irgend einen umkehrbaren Übergang vom Nullzustand in den Zustand A erstreckt. Wir wollen hierzu noch bemerken, erstens, daß nach der Definition nur von der Entropie in einem Gleichgewichtszustande die Rede sein kann und zweitens, daß jeder Entropiewert eine unbestimmte additive Konstante enthält. Dies rührt daher, daß uns die Wahl des Nullzustandes freisteht. Einfluß auf die Ergebnisse hat dieser Umstand freilich nicht, da es sich in den Anwendungen immer nur um Entropiedifferenzen handelt.

Für jeden reversiblen Übergang von einem Zustande A in einen Zustand B gilt nun

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = \eta_B - \eta_A, \qquad (6)$$

wo η_A und η_B Anfangs- und Endwert der Entropie bedeuten, eine Formel, die, wenn B unendlich wenig von A verschieden ist, die Form annimmt

$$\frac{dQ}{T} = d\eta. \qquad (7)$$

Also: Wenn dQ die Wärmemenge bedeutet, die der Körper von außen aufnimmt, während er von einem Gleichgewichtszustand in einen unendlich wenig davon verschiedenen übergeht, dann ist $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential.

In dieser Form hat der zweite Hauptsatz vielfache Anwendung gefunden. Man kann nämlich, nachdem man geeignete Größen eingeführt hat, deren Werte einen Gleichgewichtszustand charakterisieren, dQ in den Differentialen dieser Größen ausdrücken und dann die Beziehungen benutzen, welche zwischen den Koeffizienten in $\frac{dQ}{T}$ bestehen müssen, damit diese Größe ein vollständiges Differential sei. Was die Formel für dQ betrifft, so erhält man diese, indem man, dem Energiegesetz gemäß, die zugeführte Wärmemenge als die Summe der Energiezunahme und der vom System geleisteten Arbeit darstellt.

In den nächsten Paragraphen mögen die Resultate, zu welchen man auf dem angedeuteten Wege gelangt, kurz besprochen werden.

Energie eines Systems.

§ 10. Wir bezeichnen mit

$$p_1, p_2, \ldots p_{n+1}$$

gewisse den Gleichgewichtszustand des Körpers bestimmende Parameter, mit ε die Energie des Körpers. Eine unendlich kleine Zustandsänderung ist dann durch die Differentiale

$$dp_1, dp_2, \ldots dp_{n+1}$$

bestimmt, und man hat, da ε eine Funktion der p sein muß, für die Energiezunahme

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_{n+1}} dp_{n+1}.$$

Ferner sieht man leicht, daß für die von dem System geleistete äußere Arbeit ein Ausdruck von der Form

$$P_1 dp_1 + \cdots + P_{n+1} dp_{n+1}$$

gelten muß. In diesem sind $P_1, P_2 \ldots P_{n+1}$ Funktionen der independenten Variablen p.

Mithin wird

$$dQ = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} + P_1\right) dp_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_{n+1}} + P_{n+1}\right) dp_{n+1},$$

und soll nun $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential sein, so muß für alle Werte von r und s

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\left[\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_r} + P_r}{T}\right] = \frac{\partial}{\partial p_r}\left[\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_s} + P_s}{T}\right], \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

oder, wenn man beachtet, daß auch T eine Funktion von $p_1, \ldots p_{n+1}$ sein muß, nach Ausführung der Differentiation und Multiplikation mit T^2

$$T\frac{\partial P_r}{\partial p_s} - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_r} + P_r\right)\frac{\partial T}{\partial p_s} = T\frac{\partial P_s}{\partial p_r} - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_s} + P_s\right)\frac{\partial T}{\partial p_r}.$$

§ 11. Einfacher werden die Formeln, wenn man für eine unabhängige Variable die Temperatur selbst nimmt; die übrigen Parameter mögen dann $p_1, \ldots p_n$ heißen. Schreiben wir Θ statt P_{n+1}, so erhalten wir für die äußere Arbeit

$$P_1 dp_1 + \cdots + P_n dp_n + \Theta dT \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

und für die zugeführte Wärmemenge

$$dQ = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} + P_1\right) dp_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_n} + P_n\right) dp_n + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \Theta\right) dT. \quad (10)$$

Die aus dem zweiten Hauptsatze folgenden Beziehungen zerfallen jetzt in zwei Gruppen, deren eine allerdings nur dann vorhanden ist, wenn es außer der Temperatur mehr als einen Parameter p gibt. Dann gilt wieder für beliebige Werte von r und s die Gleichung (8), die sich aber jetzt, da T unabhängige Variable ist, zu

$$\frac{\partial P_r}{\partial p_s} = \frac{\partial P_s}{\partial p_r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

vereinfacht.

Zweitens findet man, wenn man das letzte Glied in (10) und eines der vorhergehenden ins Auge faßt, für jeden Wert von r,

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_r} + P_r}{T}\right] = \frac{\partial}{\partial p_r}\left[\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \Theta}{T}\right],$$

oder

$$T\frac{\partial P_r}{\partial T} - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_r} + P_r\right) = T\frac{\partial \Theta}{\partial p_r}. \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

§ 12. Es ergibt sich eine weitere Vereinfachung, wenn man die Parameter $p_1, \ldots p_n$ so wählt, daß das Glied ΘdT in dem Ausdrucke (9) verschwindet. Das läßt sich immer erreichen, da man solche Parameter einführen kann, daß, solange sie konstant bleiben, wie auch die Temperatur geändert werden möge, keine äußere Arbeitsleistung stattfindet. Wenn alle Kraftwirkungen zwischen dem Körper und seiner Umgebung gewöhnlicher mechanischer Natur sind, dann genügt es für den genannten Zweck, unter $p_1, \ldots p_n$ irgend welche **geometrischen** Größen zu verstehen, welche die Größe und Gestalt des Systems, sowie die gegenseitige Lage seiner Teile und also auch die Lage der Stellen, wo es Kräfte ausübt und erleidet, bestimmen; werden diese Größen, die man füglich allgemeine Koordinaten nennen kann, konstant erhalten, so gibt es offenbar keine äußere Arbeit. Als Beispiele solcher Koordinaten im **Lagrange**'schen Sinne kann man das Volum v eines Körpers, die Länge eines Stabes, den Winkel, um den derselbe tordiert ist, usw. anführen. Es soll übrigens die Benennung „Koordinaten" in allen Fällen angewandt werden, wo wegen der Wahl der Parameter das letzte Glied in (9) verschwindet. Wir bezeichnen die Koordinaten mit $a_1, \ldots a_n$ und die entsprechenden Größen P mit $A_1, \ldots A_n$. Aus dem Ausdruck

$$A_1 da_1 + \cdots + A_n da_n, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

in den (9) sich jetzt verwandelt, ersieht man, daß $A_1, \ldots A_n$ die allgemeinen Komponenten der vom System ausgeübten Kraftwirkung genannt werden können; die spezielle Bedeutung irgend einer Kraftkomponente wird bekannt, sobald wir die Koordinaten gewählt haben. Z. B. entspricht der Koordinate v der pro Flächeneinheit ausgeübte Druck p, da die äußere Arbeit bei Änderung des Volums den Wert $p\,dv$ hat. Ebenso gehört zu der Länge eines Stabes als Kraftkomponente die Kraft, mit der er sich auszudehnen strebt, und zu dem Torsionswinkel das Drehmoment, welches er an einem seiner Enden ausübt.

Die Formel für die zugeführte Wärme wird jetzt

$$dQ = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} + A_1\right) da_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_n} + A_n\right) da_n + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\, dT \quad . \quad (14)$$

und wir finden, statt (11) und (12),

$$\frac{\partial A_r}{\partial a_s} = \frac{\partial A_s}{\partial a_r} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

und

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_r} = T \frac{\partial A_r}{\partial T} - A_r. \quad \quad (16)$$

§ 13. Um die Tragweite dieser Formeln zu beurteilen, erinnern wir daran, daß sämtliche Messungen, die man an dem Körper vornehmen kann, sich in zwei Gruppen einteilen lassen; bei einigen, den kalorimetrischen Bestimmungen wird eine Wärmemenge ausgewertet, bei anderen handelt es sich nur um die Temperatur T, die Koordinaten $a_1, \ldots a_n$ und die äußeren in $A_1, \ldots A_n$ eingehenden Kräfte. Messungen, deren Ziel es ist, diese letzteren Größen kennen zu lernen, können wir füglich Untersuchungen über die Elastizität im weitesten Sinne des Wortes nennen. Zu diesen rechnen wir also nicht bloß die Bestimmung von Größe und Gestalt eines festen Körpers, etwa eines Kristalles, bei verschiedenen Temperaturen und unter dem Einfluß gegebener äußeren Kräfte, sondern auch die Ermittlung der Beziehung, welche bei Gasen und Flüssigkeiten Druck, Volum und Temperatur miteinander verbindet.

Wir nehmen nun an, man habe die Untersuchung der Elastizitätsverhältnisse in vollem Umfang zu Ende geführt, so daß die Kraftkomponenten $A_1, \ldots A_n$ als Funktionen von $a_1, \ldots a_n$ und T bekannt sind, und stellen uns die Frage, welche kalorimetrischen Messungen dann noch erforderlich seien, um die übrigen in den Gleichungen auftretenden Größen, d. h. die Werte von $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_n}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ kennen zu lernen. Man wird hierbei das Ziel erreicht haben, wenn man diese $n+1$ Größen für alle möglichen Werte von $a_1, \ldots a_n$ und T bestimmt hat. Dann ergibt sich auch die Energie selbst als bekannte Funktion von $a_1, \ldots a_n, T$, in der indes, wie zu erwarten war und unvermeidlich ist, eine additive Konstante stecken bleibt.

§ 14. Wir wollen zunächst noch von dem zweiten Hauptsatze absehen, und uns also nur auf Gleichung (14) stützen. Es ist klar, daß $n+1$ kalorimetrische Messungen erforderlich sein werden, um mit Hilfe dieser Gleichung die Werte von

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_n}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$$

für bestimmte Werte von $a_1, \ldots a_n$ und T kennen zu lernen; diese Versuche haben darin zu bestehen, daß man, jedesmal von demselben Anfangszustande ausgehend, für $n+1$ voneinander unabhängige Wertkombinationen der Änderungen

$$da_1, \ldots da_n, dT$$

sowohl diese Änderungen selbst, als auch die Wärmemenge dQ mißt. Mit voneinander unabhängigen Kombinationen sind hier solche gemeint,

welche unter sich unabhängige Gleichungen für die $n+1$ Differentialquotienten liefern. Versuche, bei welchen jedesmal nur eine der Größen $a_1, \ldots a_n, T$ sich ändert, oder ein Versuch bei konstanten $a_1, \ldots a_n$, kombiniert mit n anderen, in welchen nur T und a_1, T und $a_2, \ldots$ T und a_n geändert werden, würden für den Zweck geeignet sein. Auch könnten einige der $n+1$ Versuche solche sein, in welchen $dQ = 0$ und also nur die Änderungen von $a_1, \ldots a_n, T$ zu messen sind. Insofern bei derartigen Experimenten über adiabatische Zustandsänderungen aus den Versuchsbedingungen der Wert von dQ (und zwar der Wert Null) folgt, können auch sie zu den kalorimetrischen Bestimmungen gezählt werden.

Wiederholte man nun die Reihe der $n+1$ Versuche in der Weise, daß man der Reihe nach von allen möglichen Anfangszuständen ausginge, so könnte man offenbar die Differentialquotienten von ε als Funktionen von $a_1, \ldots a_n$ und T bestimmen und also das Ziel, das wir uns gestellt haben, vollständig erreichen. Sogar hätte man noch Gelegenheit, das Energiegesetz an den erhaltenen Resultaten zu prüfen. Ist z. B. sowohl $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}$ als auch $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2}$ als Funktion der unabhängigen Variablen bekannt, dann wird sich die Relation

$$\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}\right) = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2}\right)$$

verifizieren lassen. Selbstverständlich würde man, wenn man auf diese Verifizierungen des Energiegesetzes verzichten will und nur den Wunsch hat, die Werte der Differentialquotienten von ε festzulegen, sich auf eine kleinere Anzahl kalorimetrischer Versuche als oben vorausgesetzt wurde beschränken können.

§ 15. Man kann nun sagen, die Bedeutung des zweiten Hauptsatzes bestehe darin, daß er es ermöglicht, in dieser Einschränkung noch erheblich weiter zu gehen. Ziehen wir nämlich auch die Gleichungen (16) heran, so können wir schon daraus, und zwar für alle Werte der unabhängigen Variablen die Größe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_n}$$

ableiten; für ε erhalten wir dann einen Ausdruck von der Gestalt

$$\varepsilon = F(a_1, \ldots a_n, T) + \varphi(T), \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

wo nur noch die Funktion φ, welche bloß T enthält, unbekannt bleibt. Um dann weiter das Problem vollständig zu lösen, hat man nur noch für jede Temperatur eine kalorimetrische Messung auszuführen, wobei man sowohl die Anfangswerte $a_1, \ldots a_n$, als auch die Weise, in der diese Größen sich zugleich mit der Temperatur ändern, nach Belieben

wählen darf. Eine derartige Messung genügt ja, da $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_n}$ schon anderweitig bekannt sind, um $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ und also nach (17) den Wert von $\frac{d\varphi}{dT}$ zu ermitteln.

Aus diesen Betrachtungen geht z. B. hervor, daß man, theoretisch gesprochen, die innere Energie und die spezifischen Wärmen der Kohlensäure in allen ihren Zuständen kennen wird, wenn man die Isothermen in vollem Umfang bestimmt und die spezifische Wärme bei konstantem Druck für gasförmige Kohlensäure als Funktion der Temperatur und für einen beliebig gewählten Druck gemessen hat.

Daß man, sobald man über die Zahl der notwendigen Messungen hinausgeht, Gelegenheit zu mancher Prüfung des zweiten Hauptsatzes hat, liegt auf der Hand.

Adiabatische Zustandsänderungen.

§ 16. Zu den bemerkenswertesten Folgerungen aus den thermodynamischen Gleichungen gehört die Berechnung der Temperaturänderungen bei adiabatischen Vorgängen; die Vergleichung der theoretischen Werte mit der Erfahrung hat manche schöne Bestätigung der allgemeinen Sätze ergeben.

Führt man die Werte (16) in (14) ein, so wird

$$dQ = T\left(\frac{\partial A_1}{\partial T} da_1 + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial T} da_n\right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT, \quad . \quad . \quad (18)$$

also für eine adiabatische Änderung

$$T\left(\frac{\partial A_1}{\partial T} da_1 + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial T} da_n\right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT = 0,$$

$$dT = -\frac{T\left(\frac{\partial A_1}{\partial T} da_1 + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial T} da_n\right)}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}}.$$

Der Nenner $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ in dieser Formel bedeutet, wie aus (14) oder (18) erhellt, die Wärmekapazität des Körpers bei konstanten Koordinaten, die wir mit c_a bezeichnen, während die Differentialquotienten $\frac{\partial A_r}{\partial T}$ sich auf die Änderungen beziehen, welche die Kraftkomponenten A_r, ebenfalls bei konstanten Koordinaten, infolge einer Temperaturerhöhung erleiden.

Besteht der Versuch darin, daß nur eine Koordinate a_r vergrößert oder verkleinert wird, während die übrigen konstant bleiben, dann ist

$$dT = -\frac{T\frac{\partial A_r}{\partial T}}{c_a} da_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

§ 17. Ganz ähnliche Formeln gelten, wenn man statt der Koordinaten $a_1, \ldots a_n$ gerade die Kraftkomponenten $A_1, \ldots A_n$, nebst der Temperatur, als unabhängige Variablen einführt. Um das zu zeigen, gehen wir auf (10) zurück und substituieren hier für $\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_n}$ die aus (12) folgenden Werte. Das Resultat ist, wenn wir zugleicherzeit $dQ = 0$ setzen,

$$T\left\{\left(\frac{\partial P_1}{\partial T} - \frac{\partial \Theta}{\partial p_1}\right) dp_1 + \cdots + \left(\frac{\partial P_n}{\partial T} - \frac{\partial \Theta}{\partial p_n}\right) dp_n\right\} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \Theta\right) dT = 0, \quad (20)$$

und es fragt sich nur noch, welches die Bedeutung der Größen

$$P_r \text{ und } \frac{\partial P_r}{\partial T} - \frac{\partial \Theta}{\partial p_r}$$

sei, wenn wir die in der allgemeinen Gleichung mit $p_1, \ldots p_n$ bezeichneten unabhängigen Variablen mit den Kraftkomponenten $A_1, \ldots A_n$ identifizieren.

Wird nur die eine Kraftkomponente A_r variiert, während die übrigen konstant bleiben, so ändern sich die Koordinaten um

$$\frac{\partial a_1}{\partial A_r} dA_r, \ldots \frac{\partial a_n}{\partial A_r} dA_r$$

und beträgt also die äußere Arbeit, da für diese immer der Ausdruck (13) gilt,

$$\left(A_1 \frac{\partial a_1}{\partial A_r} + \cdots + A_n \frac{\partial a_n}{\partial A_r}\right) dA_r. \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Desgleichen hat sie den Wert

$$\left(A_1 \frac{\partial a_1}{\partial T} + \cdots + A_n \frac{\partial a_n}{\partial T}\right) dT, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

wenn bei konstanten $A_1, \ldots A_n$ die Temperatur um dT steigt.

In (21) und (22) haben wir die Ausdrücke gefunden, die in der Größe (9) an die Stelle von $P_r dp_r$ und ΘdT treten, wenn man mit $A_1, \ldots A_n$ und T als unabhängigen Variablen operiert. Folglich ist dann

$$P_r = A_1 \frac{\partial a_1}{\partial A_r} + \cdots + A_n \frac{\partial a_n}{\partial A_r},$$

$$\Theta = A_1 \frac{\partial a_1}{\partial T} + \cdots + A_n \frac{\partial a_n}{\partial T}$$

und, da jetzt $p_r = A_r$,

$$\frac{\partial P_r}{\partial T} - \frac{\partial \Theta}{\partial p_r} = -\frac{\partial a_r}{\partial T}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß, wie aus (10) erhellt, die Größe

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \Theta$$

als Wärmekapazität bei Konstanz der Kraftkomponenten aufgefaßt werden kann, wofür wir c_A schreiben wollen, dann erhalten wir aus (20)

$$-T\left(\frac{\partial a_1}{\partial T}dA_1 + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial T}dA_n\right) + c_A dT = 0,$$

$$dT = \frac{T\left(\frac{\partial a_1}{\partial T}dA_1 + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial T}dA_n\right)}{c_A},$$

und für den Fall eines adiabatischen Vorganges, bei welchem alle Kraftkomponenten mit Ausnahme von A_r konstant bleiben

$$dT = \frac{T\frac{\partial a_r}{\partial T}dA_r}{c_A}. \qquad (23)$$

Wir erinnern daran, daß $\frac{\partial a_r}{\partial T}$ sich auf den Einfluß bezieht, den bei konstanten Kraftkomponenten A die Temperatur auf die Koordinate a_r hat. Der Gleichung (19) gegenüber hat (23) insofern den Vorzug, als $\frac{\partial a_r}{\partial T}$, dA_r und c_A gewöhnlich leichter gemessen werden können als $\frac{\partial A_r}{\partial T}$, da_r und c_a.

Beispiele.

§ 18. In welcher Weise das Vorhergehende sich auf den vp-Fall, und auf einen gespannten oder tordierten Draht anwenden läßt, möge hier unerörtert bleiben. Interessant ist auch die thermodynamische Theorie einer Flüssigkeitsmembran, die wir als eben voraussetzen und deren Zustand wir in einer für unseren Zweck genügenden Weise definieren können, wenn wir außer der Temperatur als einzige Koordinate a die Flächengröße σ einführen. Bezeichnet man die pro Längeneinheit gemessene Spannung der Membran mit $2H$, dann ist die von dem System geleistete Arbeit

$$-2H\,d\sigma$$

und die Formel (19) lehrt uns, daß bei einer adiabatischen Ausdehnung oder Zusammenziehung

$$dT = \frac{2T}{c_\sigma}\frac{dH}{dT}d\sigma.$$

Hier ist $\frac{dH}{dT}$ und nicht $\frac{\partial H}{\partial T}$ geschrieben, weil, abgesehen von außerordentlich dünnen Membranen, die Spannung unabhängig von der Flächengröße σ ist.

§ 19. Um auch ein Beispiel zu geben, in welchem eine Formel wie (16) gilt, ohne daß die in Betracht kommende Koordinate a gerade eine geometrische Größe ist, erwähnen wir die zuerst von Helmholtz entwickelte Theorie eines reversiblen galvanischen Elements.

Hiermit ist ein Element gemeint, in welchem gar keine Veränderung stattfindet, wenn man es ohne Schließungsdraht bei konstanter Temperatur sich selbst überläßt, gleiche und entgegengesetzte Änderungen aber infolge der elektrolytischen Wirkungen, wenn man eine bestimmte Elektrizitätsmenge bald in der einen, bald in der anderen Richtung hindurchschickt. Es sei E die Potentialdifferenz, welche im Gleichgewichtszustande zwischen dem positiven Pol P und dem negativen N besteht; diese betrachten wir als Maß für die elektromotorische Kraft. Ferner bezeichnen wir mit e die algebraische Summe aller Elektrizitätsmengen, die, von irgend einem festen Zeitpunkt ab gerechnet, das Element durchflossen haben, wobei wir ein Elektrizitätsquantum positiv oder negativ nennen wollen, je nachdem der Durchgang in der Richtung von N nach P, oder von P nach N hin stattfindet. Wir werden uns auf Fälle beschränken, in denen der jeweilige Zustand durch e und T vollständig bestimmt ist. Man kann zeigen, daß das Element bei der Zunahme de, d. h. wenn es von der unendlich kleinen Elektrizitätsmenge de durchströmt wird, die elektrische Arbeit

$$E\,de$$

leistet. Daher die Grundformel

$$dQ = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial e} + E\right) de + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\, dT,$$

die als ein spezieller Fall von (14) zu betrachten ist. Die Gleichung (16) wird jetzt

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial e} = T\frac{dE}{dT} - E, \qquad (24)$$

wobei in der Voraussetzung, daß die elektromotorische Kraft sich nicht infolge des Durchströmens von Elektrizität ändere, $\frac{dE}{dT}$ statt $\frac{\partial E}{\partial T}$ geschrieben ist. Das Resultat hat eine wichtige Bedeutung. Es ist nämlich offenbar $\frac{\partial \varepsilon}{\partial e}$ die Energieänderung, die stattfindet, wenn bei konstanter Temperatur das Element von einer Einheit Elektrizität in der Richtung von N nach P durchströmt wird, eine Änderung, die mit den den Strom begleitenden chemischen Erscheinungen zusammenhängt und die man daher aus thermochemischen Daten ableiten kann. In älteren Theorien hatte man nun die Relation

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial e} = E \qquad (25)$$

aufgestellt und also auf numerische Gleichheit der genannten Energieänderung und der elektromotorischen Kraft geschlossen. Es zeigt sich jetzt, daß man diese Formel (25) nicht aufrecht erhalten kann; man muß in derselben eben E durch $E - T\frac{dE}{dT}$ ersetzen. Wenn trotzdem die Gleichung (25) sich bei einigen Messungen bewährt hat, so rührt

dies lediglich daher, daß man zufälligerweise bei dem untersuchten Daniell'schen Element von dem Einfluß der Temperatur auf die elektromotorische Kraft absehen darf.

Mit Rücksicht auf (24) können wir auch schreiben

$$dQ = T\frac{dE}{dT}de + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}dT,$$

woraus man ersieht, daß es einer äußeren Wärmezu- oder -abfuhr bedarf, um bei Durchströmung von Elektrizität die Temperatur auf gleicher Höhe zu erhalten. Pro Elektrizitätseinheit beträgt die zuzuführende Wärme $T\frac{dE}{dT}$. Wir dürfen hieraus schließen, daß das Element, wenn es fortwährend von einem Strom von der Intensität i durchflossen wird, der Sitz einer Wärmeentwicklung ist, die pro Zeiteinheit $-T\frac{dT}{dE}i$ beträgt. Eben weil man die Möglichkeit einer solchen der ersten Potenz der Stromstärke proportionalen Wärmeerscheinung übersah, kam man früher, von dem Energiegesetz ausgehend, zu der Gleichung (25).

Sätze über die Entropie, die freie Energie und das thermodynamische Potential.

§ 20. Wir wollen jetzt zu denjenigen Formen des zweiten Hauptsatzes übergehen, bei welchen der Begriff der Entropie oder die damit zusammenhängenden der freien Energie und des thermodynamischen Potentials in den Vordergrund treten. Um zu der Definition dieser letzteren Größen und zugleicherzeit zu den Sätzen, um die es sich jetzt handelt, zu gelangen, gehen wir auf das § 8 betrachtete beliebige System M zurück.

Dasselbe möge dieses Mal Änderungen erleiden, die keinen Kreislauf bilden; sie brauchen ebensowenig wie früher reversibel zu sein, und wir unterwerfen sie nur der Bedingung, daß das System sich sowohl im Anfangszustande A als auch im Endzustande B im Gleichgewicht befinde. Demzufolge können wir uns vorstellen, daß es auf irgend einem umkehrbaren Wege in den Zustand A zurückgeführt wird. Dieser Übergang B ⟶ A soll übrigens nur ein Kunstgriff sein, mittels dessen wir etwas über den wirklichen Übergang A ⟶ B erfahren wollen.

Die beiden Änderungen zusammen bilden einen Kreisprozeß, auf welchen wir die Gleichung (3) anwenden dürfen. Dabei zerfällt das Integral in zwei Teile. Für den ersten, der sich auf den wirklichen Prozeß A ⟶ B bezieht, schreiben wir

$$\int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Der zweite Teil hat den Wert

$$\eta_A - \eta_B,$$

eben weil der Übergang B ⟶ A umkehrbar ist, und die Gleichung (3) reduziert sich somit auf

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} + \eta_A - \eta_B \leqq 0, \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

wo nur noch solche Größen vorkommen, die sich auf die wirklich stattfindenden Änderungen, und die vor und nach denselben bestehenden Zustände beziehen.

Ist der Prozeß A ⟶ B umkehrbar, dann ist es auch der ganze oben betrachtete Kreislauf. In diesem Fall gilt also in (26) nur das untere Zeichen.

Aus der bewiesenen Formel können wir durch Spezialisierung mehrere Sätze gewinnen.

a) Die Änderungen mögen adiabatisch sein. Dann ist

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = 0$$

und wir finden

$$\eta_B \geqq \eta_A, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

d. h.: bei adiabatischen Vorgängen nimmt die Entropie nie ab; sie bleibt konstant, wenn der Vorgang umkehrbar ist.

b) Die Temperatur werde konstant erhalten. Dann wird das erste Glied in (26)

$$\frac{1}{T}\int_A^B dQ$$

und bedeutet also die mit T dividierte, im ganzen vom System aufgenommene Wärmemenge. Ist nun ε die Energie des Systems und W_{AB} die von demselben geleistete Arbeit, so beträgt nach dem Energiegesetz die zugeführte Wärme

$$\varepsilon_B - \varepsilon_A + W_{AB},$$

so daß, wenn man mit T multipliziert

$$\varepsilon_B - \varepsilon_A + W_{AB} + T\eta_A - T\eta_B \leqq 0.$$

Wir setzen nunmehr

$$\varepsilon - T\eta = \psi, \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

welche Größe man die freie Energie des Systems nennt; dadurch erhalten wir

$$\psi_B - \psi_A + W_{AB} \leqq 0 \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

und, wenn wir noch weiter dahin spezialisieren, daß bei der Umwandlung A ⟶ B keine Arbeit geleistet werden soll,

$$\psi_B \leqq \psi_A. \qquad (30)$$

Also: Bei isothermischen Vorgängen, die ohne äußere Arbeitsleistung verlaufen, nimmt die freie Energie nie zu. Sie bleibt konstant, falls die Änderungen reversibel sind.

Es gibt Fälle, in denen die Arbeit sich durch einen Ausdruck von der Form (13) darstellen läßt, der Zustand aber durch T und die Größen $a_1, \ldots a_n$ noch nicht völlig bestimmt ist. Dann sind Änderungen möglich, bei welchen die Größen a konstant bleiben, und ist bei solchen die Bedingung $W_{AB} = 0$ erfüllt. Speziell gilt (30) für Änderungen bei konstantem Volum, wenn die einzige äußere Kraft der oft genannte Druck p ist.

c) Ein einfacher Satz gilt auch für isothermische Änderungen, bei welchen nicht die Größen $a_1, \ldots a_n$, sondern die denselben entsprechenden Kraftkomponenten $A_1, \ldots A_n$ konstant bleiben. Dann hat man nämlich, wie man aus dem Ausdrucke (13) ersieht

$$W_{AB} = A_1(a_{1B} - a_{1A}) + \cdots + A_n(a_{nB} - a_{nA}).$$

Setzt man nun

$$\zeta = \psi + A_1 a_1 + \cdots + A_n a_n, \qquad (31)$$

so folgt aus (29)

$$\zeta_B \leqq \zeta_A. \qquad (32)$$

Unter den jetzt vorausgesetzten Umständen kann also ζ, das sogenannte thermodynamische Potential, nie zunehmen. Es bleibt bei umkehrbaren Vorgängen konstant.

In denjenigen Fällen, wo der Ausdruck für die äußere Arbeit die Gestalt $p\,dv$ hat, ist

$$\zeta = \psi + pv \qquad (33)$$

und gilt (32) für Änderungen, die unter konstantem Druck erfolgen.

§ 21. Abgesehen von den in ε und η eingehenden additiven Konstanten haben sowohl die freie Energie, als auch das thermodynamische Potential für jeden Gleichgewichtszustand eines Körpers einen bestimmten Wert. Wenn wir also jetzt eine so große Zahl von Koordinaten $a_1, \ldots a_n$ einführen, daß diese in Verbindung mit T den Zustand völlig angeben, so kann man ψ und ζ als Funktionen von $a_1, \ldots a_n, T$ betrachten. Man kann aber auch ebensogut die Kraftkomponenten $A_1, \ldots A_n$ mit der Temperatur als unabhängige Variablen einführen.

Indes ist, wenn die Formeln einfach bleiben sollen, die Wahl nicht gleichgültig. Aus (28) ergibt sich nämlich für eine unendlich kleine umkehrbare Zustandsänderung

$$d\psi = d\varepsilon - T\,d\eta - \eta\,dT,$$

also, da $Td\eta$ die aufgenommene Wärme bedeutet und folglich $d\varepsilon - Td\eta$ die mit umgekehrtem Vorzeichen genommene Arbeit des Systems ist,

$$d\psi = -A_1\,da_1 - \cdots - A_n\,da_n - \eta\,dT. \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Dieses zeigt, daß man, wenn man die Änderungen der freien Energie verfolgen will, am besten die Koordinaten a mit der Temperatur T als unabhängige Variablen wählt. Dann wird

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} = -A_1, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial a_n} = -A_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial T} = -\eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Anderseits folgt aus (31) und (34)

$$d\zeta = a_1\,dA_1 + \cdots + a_n\,dA_n - \eta\,dT$$

und es empfiehlt sich also bei Betrachtungen über das thermodynamische Potential T und die Kraftkomponenten $A_1, \ldots A_n$ als unabhängige Variablen zugrunde zu legen.

Speziell drücken wir in dem vp-Fall ψ in v und T, ζ aber in p und T aus, infolgedessen

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = -p, \quad \frac{\partial\psi}{\partial T} = -\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

und

$$\frac{\partial\zeta}{\partial p} = v, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial T} = -\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wird.

Was die Entropie betrifft, so betrachtet man diese am besten als eine Funktion von dem Volum v und der Energie ε. Man hat nämlich

$$dQ = d\varepsilon + p\,dv,$$

und also nach (7)

$$d\eta = \frac{d\varepsilon + p\,dv}{T},$$

so daß

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial v} = \frac{p}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

ist.

§ 22. Solange wir uns an die gegebenen Definitionen halten, kann bei einem System, das sich nicht in einem Gleichgewichtszustande befindet, weder von Entropie, noch von freier Energie oder thermodynamischem Potential die Rede sein. Steht z. B. über einer Flüssigkeit eine Dampfmasse, die nicht gerade die für das Gleichgewicht erforderliche Dichte hat, dann können wir nicht sagen, das System besitze eine bestimmte freie Energie. Indes kann man diesen Fall leicht in einen anderen verwandeln, auf welchen unsere Definitionen anwendbar sind. Trennen wir nämlich die Flüssigkeit und den Dampf durch eine Zwischenwand, so dürfen wir den beiden Stoffmengen zusammen eine freie Energie, gleich der Summe der für beide geltenden Einzelwerte

zuschreiben. Denselben Kunstgriff können wir auch in anderen Fällen anwenden, wo ein System aus zwei oder mehr nebeneinander liegenden Teilen mit verschiedenen Eigenschaften, aus zwei oder mehr Phasen, wie man sagt, zusammengesetzt ist.

Streng genommen ist hierbei folgender Umstand zu beachten. Zwei Phasen sind wohl nie durch eine mathematische Fläche scharf voneinander getrennt; vielmehr haben wir uns zwischen denselben eine dünne Übergangsschicht vorzustellen, deren Dicke und Eigenschaften durch die Molekularwirkungen bestimmt werden. Es ist nun offenbar unmöglich, eine feste Wand dazwischen zu schieben, ohne die Übergangsschicht zu zerstören; einige Änderung in dem Zustande der beiden Teile des Systems ist also bei der Trennung unvermeidlich. Wenn wir uns aber auf Fälle beschränken, wo die Wirkungen in der Grenzschicht den anderen in Betracht kommenden gegenüber in den Hintergrund treten, können wir von dieser Komplikation absehen. Man sieht leicht, daß dann die Betrachtungen von § 8, sowie die daraus gezogenen Schlüsse ihre Gültigkeit auch dann behalten, wenn man sich vorstellt, daß im Laufe des mit dem System M ausgeführten Prozesses Phasen in beliebiger Weise voneinander getrennt oder wieder in Berührung gesetzt werden; auch werden diese Hilfsoperationen keine nennenswerten Beiträge zu dem Integral $\int \frac{dQ}{T}$ liefern.

Gesetzt nun, ein Raum von konstanter Größe enthalte im Anfang nebeneinander Wasser und Wasserdampf, vorläufig noch mit einer Scheidewand dazwischen; wir können dann von einem Anfangswerte $\psi_{1A} + \psi_{2A}$ der freien Energie reden, da sowohl dem Wasser wie auch dem Dampfe ganz bestimmte Werte, ψ_{1A} und ψ_{2A}, zukommen. Wir entfernen jetzt die Zwischenwand und überlassen das System bei konstanter Temperatur der Wirkung seiner inneren Kräfte; nach einiger Zeit trennen wir die Phasen aufs neue voneinander. Dadurch wird ein Endzustand B erreicht, für welchen die freien Energien die Werte ψ_{1B} und ψ_{2B} haben, die wir wieder zueinander addieren dürfen.

Da nun der Anwendung unserer Sätze nichts mehr im Wege steht, so schließen wir

$$\psi_{1B} + \psi_{2B} \leqq \psi_{1A} + \psi_{2A};$$

wir dürfen somit, ohne weiter an die Scheidewände zu denken, behaupten, daß der Satz von der freien Energie auch für Systeme, die aus mehreren Phasen bestehen, zutrifft, wenn wir unter der freien Energie des Ganzen die Summe der freien Energien der einzelnen Phasen verstehen.

§ 23. In ähnlicher Weise können wir die Sätze, die sich auf die Entropie und das thermodynamische Potential beziehen, aufrecht erhalten.

Auch gilt unser Schluß, wie groß die Zahl der Phasen sein möge, vorausgesetzt jedoch, daß es wirklich möglich ist, sie ohne merkliche Änderung ihrer Zustände voneinander zu trennen. Wir haben z. B. keinen Fehler zu befürchten, wenn wir, nachdem wir eine der Schwerkraft unterworfene Gasmasse in unendlich dünne horizontale Schichten zerlegt haben, die freie Energie des Ganzen als die Summe der den einzelnen Teilen zukommenden freien Energien auffassen; Schichten, die insofern unendlich dünn genannt werden können, als in jeder für sich das Gas als homogen angesehen werden kann, können ja im Vergleich zu dem Wirkungskreise der Molekularkräfte so dick sein, daß sie ohne Störung ihres inneren Zustandes voneinander gesondert werden können.

Dagegen ist es nicht ohne weiteres gerechtfertigt, die Grenzschicht selbst, die zwei Phasen voneinander trennt, in noch viel dünnere Schichten zu teilen und jedem dieser Elemente einen gewissen Anteil an der gesamten freien Energie zuzuschreiben. Auf unserem jetzigen Standpunkt können wir nur mit der Schicht in ihrer vollen Dicke und in der Voraussetzung, daß das Gleichgewicht sich eingestellt habe, den Begriff einer freien Energie von bestimmter Größe verbinden.

§ 24. Wir haben uns noch eine andere wichtige Frage vorzulegen. Nachdem wir die Formeln (27), (30) und (32) gewonnen hatten, bemerkten wir, daß in denselben nur das untere Zeichen gilt, sobald die Erscheinungen umkehrbar sind. Dürfen wir nun umgekehrt, wenn wir es mit Vorgängen zu tun haben, die gewiß irreversibel sind, das untere Zeichen streichen und behaupten, daß die betrachtete Funktion, Entropie, freie Energie oder thermodynamisches Potential, sich wirklich in der durch die Formeln zugelassenen Richtung ändern wird? Die Erfahrung scheint zugunsten dieser Auffassung zu sprechen; sie bietet uns manche Fälle, in welchen, vorausgesetzt, daß die für die Gültigkeit unserer Sätze erforderlichen Nebenbedingungen erfüllt sind, eine Vergrößerung der Entropie, eine Abnahme der freien Energie, bezw. des thermodynamischen Potentials tatsächlich eintritt. Als einfachste Beispiele können wir ein Gas, das sich in einen ihm plötzlich zur Verfügung gestellten leeren Raum stürzt, oder zwei Körper von verschiedener Temperatur, die miteinander in Berührung gesetzt werden, anführen. Wenn in dem ersten Fall die Temperatur konstant erhalten wird, hat sich am Ende bloß das Volum des Gases vergrößert, und es ist also, wie sich sofort aus der ersten der Gleichungen (37) ergibt, ψ kleiner geworden, obgleich keine äußere Arbeit geleistet worden ist. Daß im zweiten Fall, wenn die beiden Körper keine Wärme mit anderen austauschen, ihre gesamte Entropie infolge des Wärmeüberganges vom wärmeren zum kälteren Körper zunehmen wird, brauche ich nicht weiter zu erklären. Die Betrachtung weniger einfachen Prozesse be-

stätigt die Folgerungen, die wir aus diesen Beispielen ziehen, und es dürfte schwer halten, einen nicht umkehrbaren Prozeß zu nennen, bei welchen die Änderungen von Entropie, freier Energie und thermodynamischem Potential, von welchen in unseren Sätzen die Rede ist, nicht stattfinden. Wenn auch mit einem gewissen Vorbehalt sprechen wir daher den Satz aus: Bei einem nicht umkehrbaren Prozeß nimmt die Entropie zu, wenn er ohne äußere Wärmezu- oder -abfuhr verläuft, die freie Energie nimmt dagegen ab, wenn die Temperatur konstant erhalten und keine Arbeit geleistet wird. Bleiben sowohl die Temperatur als auch die äußeren Kräfte A (§ 12), z. B. der Druck p, konstant, dann wird das thermodynamische Potential verkleinert.

§ 25. Die im vorhergehenden enthaltenen Aussagen, insbesondere die, welche sich auf die freie Energie beziehen, zeigen eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Satze der Mechanik, nach welchem, wenn ein Körper durch ein System konservativer Kräfte in Bewegung gesetzt wird, die diesen Kräften entsprechende potentielle Energie abnimmt. Ebenso wie man nun sagen kann, daß der Körper, falls keine anderen als die genannten Kräfte auf ihn wirken, eine Lage, in der er anfänglich in Ruhe ist, gewiß verlassen wird, sobald bei irgend einer unendlich kleinen Verrückung die potentielle Energie abnimmt um einen Betrag, der von derselben Ordnung unendlich klein ist, trifft es auch manchmal zu, daß eine Umwandlung, die (vorausgesetzt, daß die oft genannten Nebenbedingungen erfüllt seien) zu einem kleineren Wert der freien Energie führen kann, auch wirklich stattfindet. Jedoch ist hier Vorsicht geboten. In dem mechanischen Problem entscheiden die Werte der potentiellen Energie in Lagen, die der ursprünglichen unendlich nahe liegen, über das Zustandekommen der Ortsveränderung. Eine Bewegung, durch welche zwar eine entferntere Lage von kleinerer potentiellen Energie erreicht werden könnte, die aber mit einem kleinen Anwachs derselben einsetzen müßte, wird nicht entstehen, es sei denn, daß irgend ein äußerer Bewegungsantrieb dem Körper gleichsam über die erste Schwierigkeit hinweg hilft. Ebenso ist es ganz gut möglich, daß es Zustände gibt, in welchen die freie Energie eines Systems kleiner ist als in dem Zustand, den es augenblicklich hat, und in die es dennoch nicht übergeht, weil die freie Energie in den ersten Stadien der Umwandlung zunehmen müßte; hier ist z. B. an die Fälle zu denken, in welchen die ersten Mengen einer neuen Phase in Form ganz kleiner Blasen, Tröpfchen oder Kristalle entstehen. Sollte, was diese Zwischenzustände betrifft, der Begriff der freien Energie seine Anwendbarkeit verlieren, so ließe uns die Thermodynamik bei der Frage, ob eine Änderung wirklich stattfinden werde, ganz und gar im Stich. Übrigens ist auch nicht aus dem Auge zu verlieren, daß vielleicht innere Wider-

stände, die den Reibungskräften der Mechanik einigermaßen vergleichbar sind, hemmend auf die Umwandlungen wirken können.

Trotz dieser Komplikationen ist die Tendenz der freien Energie, einen kleineren Wert anzunehmen, nicht zu verkennen. Darauf beruht die Bedeutung, welche diese Größe für die Betrachtung von Umwandlungen verschiedenster Art und für das Studium der physikalischen und chemischen Gleichgewichte gewonnen hat. Wir sperren irgend ein System von Körpern in ein Gefäß von konstantem Volumen ein und überlassen es sich selbst, indem wir die Temperatur konstant erhalten. Es werden sich dann solche Umwandlungen abspielen, bei welchen die freie Energie einem Minimum zustrebt; ist dieses erreicht, dann sind auch die Veränderungen zu Ende gekommen. Obgleich bei einer Betrachtung dieser Art einiger Zweifel darüber bestehen kann, ob die Umwandlungen wirklich stattfinden werden, so können wir uns doch darauf verlassen, daß, wenn einmal der durch einen Minimalwert der freien Energie charakterisierte Zustand besteht, das System im Gleichgewicht, und zwar in stabilem Gleichgewicht sein wird. Es kann dann nicht von selbst in einen benachbarten Zustand übergehen, da dies notwendig eine Zunahme der freien Energie herbeiführen würde. Hat aber, infolge einer äußeren Einwirkung, eine kleine Störung stattgefunden, dann wird das System sich gewiß nicht noch weiter von seinem Gleichgewichtszustande entfernen.

Den vorstehenden ganz ähnliche Erwägungen lassen sich auch dann anstellen, wenn man entweder die Entropie oder das thermodynamische Potential der Betrachtung unterzieht, und dabei jedesmal die angemessene Nebenbedingung beachtet.

§ 26. Wir hatten die Sätze über die freie Energie gewonnen, indem wir in der Formel (29) das Glied W_{AB}, welches die vom System verrichtete Arbeit darstellt, gleich Null setzten. Ebenso einfache Ergebnisse bekommen wir aber auch, wenn wir annehmen, daß bei den Umwandlungen gewisse äußere Kräfte, wie die Schwerkraft, für welche eine potentielle Energie χ existiert, eine Arbeit leisten. Da W_{AB} die Arbeitsleistung des Systems bedeutet, so können wir diese Größe durch die mit dem negativen Vorzeichen genommene Arbeit der äußeren Kräfte ersetzen. Letztere hat den Wert $\chi_A - \chi_B$. Es ist daher

$$W_{AB} = \chi_B - \chi_A$$

und (29) verwandelt sich in

$$\psi_B + \chi_B \leqq \psi_A + \chi_A. \qquad (40)$$

Die einzige Änderung, welche die Berücksichtigung der äußeren Kräfte zur Folge hat, besteht also darin, daß wir ψ durch $\psi + \chi$ ersetzen müssen.

Es läge nun nahe, diese letztere Summe als freie Energie zu bezeichnen, doch wollen wir das, um jede Verwirrung zu vermeiden, nicht tun. Wir wollen unter freier Energie auch jetzt noch die Funktion ψ verstehen, die, wie aus den Ableitungen erhellt, lediglich von dem inneren Zustande der Teile des Systems abhängt; zu dieser addieren wir, wenn nötig, die potentielle Energie χ. Gibt es außer den Kräften, zu welchen letztere gehört, noch andere, bei deren Überwindung das System eine Arbeit W'_{AB} leistet, dann gilt

$$(\psi_B + \chi_B) - (\psi_A + \chi_A) + W'_{AB} \leqq 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Wir hätten übrigens schon bei der in § 8 durchgeführten Betrachtung, welche die Grundlage für alles Folgende war, die Existenz eines beliebigen konservativen Kräftesystems berücksichtigen können Nur hätten wir dann, jedesmal wenn von einem Zustande des Systems die Rede war, nicht nur an den inneren Zustand, sondern auch an die Lage des Systems oder der einzelnen Teile denken müssen. Verfahren wir in dieser Weise, so braucht an (3) und (26) nichts geändert zu werden. Auch die Gleichungen (28) und (29) behalten ihre Gültigkeit, vorausgesetzt, daß wir unter ε die Summe der inneren Energie und der potentiellen Energie verstehen, unter ψ das, was wir oben $\psi + \chi$ genannt haben, und unter W_{AB} die Arbeit des Systems mit Ausschluß desjenigen Teils, der den von χ abhängigen Kräften entspricht.

§ 27. Es möge jetzt ein Beispiel der Anwendung folgen. Ein Raum von unveränderlicher Größe enthalte eine gegebene Menge eines flüssigen oder gasförmigen Körpers, auf den gewisse konservative äußere Kräfte wirken; es soll angegeben werden, wie sich im Gleichgewichtszustand die Substanz über den Raum verteilt. Dabei nehmen wir an, daß die Zusammensetzung des Körpers an allen Stellen die gleiche und unveränderlich ist, so daß wir keinen Anlaß haben, verschiedene Bestandteile oder Komponenten in demselben zu unterscheiden, und daß die Dichte kontinuierlich von Punkt zu Punkt variiert, m. a. W., daß nicht etwa eine Trennung in eine flüssige und eine gasförmige Phase stattfindet. Auch denken wir uns, daß die Temperatur auf konstanter Höhe gehalten wird; diese Voraussetzung machen wir, damit es uns möglich sei, das Problem mit Hilfe der freien Energie zu lösen.

Es seien dS ein beliebiges Volumelement, ϱ die in demselben bestehende Dichte, ψ und χ die freie und die potentielle Energie der Masseneinheit bei der Dichte ϱ und in der Lage, welche dS hat. Dann ist die Summe der beiden Energien für das eine Element

$$\varrho(\psi + \chi)\, dS$$

und für das ganze System

$$\Psi = \int \varrho(\psi + \chi)\, dS,$$

wo über den gegebenen Raum zu integrieren ist.

Um jetzt den Zustand, in welchem Ψ ein Minimum ist, zu bestimmen, betrachten wir irgend eine von diesem Zustande aus stattfindende unendlich kleine Variation und setzen, indem wir die Änderungen, welche die in Betracht kommenden Größen dabei erleiden, durch ein vorgesetztes δ andeuten,

$$\delta \Psi = 0.$$

In einem bestimmten Raumelement kann, während χ konstant bleibt, ϱ eine Änderung $\delta \varrho$ erfahren, und das wird auch eine Variation von ψ zur Folge haben. Diese Größe hängt nämlich von dem Volum v der Masseneinheit ab, also auch von der Dichte ϱ, die mit v durch die Gleichung

$$v = \frac{1}{\varrho} \qquad (42)$$

verbunden ist. Folglich ist, da T konstant bleibt,

$$\delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial v} \delta v = -\frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial \psi}{\partial v} \delta \varrho.$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist daher

$$\delta \Psi = \int \left(\psi + \chi - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \delta \varrho \, dS = 0, \qquad (43)$$

und zwar muß dies erfüllt sein für alle zulässigen Werte von $\delta \varrho$, d. h. für alle, welche verträglich sind mit der Bedingung

$$\int \delta \varrho \, dS = 0,$$

welche die Konstanz der gesamten Masse

$$\int \varrho \, dS = M \qquad (44)$$

ausdrückt.

Daraus folgt nach einem bekannten Satze, daß der Faktor, mit welchem $\delta \varrho \, dS$ in dem Integral (43) multipliziert ist, an allen Stellen des Raumes denselben Wert haben muß, also

$$\psi + \chi - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial v} = C, \qquad (45)$$

wo nur noch die Konstante C zu bestimmen ist. Das ist wirklich möglich, sobald man die freie Energie ψ als Funktion von v oder ϱ kennt. Löst man nämlich die Gleichung (45) nach ϱ auf (wobei sich wegen des Auftretens von χ ein von den Koordinaten x, y, z abhängiges Resultat ergeben wird) und substituiert man den gefundenen Wert in (44), so gelangt man zu einer Gleichung, die zur Bestimmung von C dienen kann, sobald die Gesamtmasse M gegeben ist.

§ 28. Wir haben noch zu untersuchen, ob die gefundene Lösung wirklich Ψ zu einem Minimum macht. Zu diesem Zwecke treiben wir bei der Berechnung von $\delta \Psi$ die Genauigkeit etwas weiter, indem

wir Glieder, die von der Ordnung $(\delta\varrho)^2$ sind (wir schreiben hierfür einfach $\delta\varrho^2$) beibehalten. Nach dem Taylor'schen Satze ist

$$\delta(\varrho\psi) = \frac{\partial(\varrho\psi)}{\partial\varrho}\delta\varrho + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2(\varrho\psi)}{\partial\varrho^2}\delta\varrho^2,$$

und man hat also, da noch immer

$$\delta(\varrho\chi) = \chi\delta\varrho$$

ist, und da die Glieder der ersten Ordnung in $\delta\Psi$ wegen der Beziehung (45) verschwinden,

$$\delta\Psi = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial^2(\varrho\psi)}{\partial\varrho^2}\delta\varrho^2 dS.$$

Führen wir nun statt ϱ das spezifische Volumen $v = \frac{1}{\varrho}$ als unabhängige Variable ein, dann wird

$$\varrho\psi = \frac{\psi}{v},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\psi) = -v^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi}{v}\right) = \psi - v\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}(\varrho\psi) = -v^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\psi - v\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = v^3\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = -v^3\frac{\partial p}{\partial v}.$$

Daraus folgt, daß $\delta\Psi$ positiv und also Ψ ein Minimum ist, wenn für alle vorhandenen Werte der Dichte $\frac{\partial p}{\partial v}$ negativ ist, d. h. wenn der Stoff, in jedem Volumelemente für sich betrachtet, sich im stabilen Zustande befindet.

§ 29. Mit Rücksicht auf (42), (37) und (33) läßt sich (45) auch auf eine der folgenden Formen bringen

$$\psi - v\frac{\partial\psi}{\partial v} + \chi = C, \quad \psi + pv + \chi = C, \quad \zeta + \chi = C. \quad . \ (46)$$

Übrigens ist die Gleichung gleichbedeutend mit der bekannten Bedingung für das statische Gleichgewicht. Um das zu sehen, bedenken wir, daß χ und v (oder ϱ) von den Koordinaten x, y, z abhängen. Wenn wir die erste der Gleichungen (46) nach x differentieren, so erhalten wir, da C konstant ist,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\psi - v\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0,$$

$$-v\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0,$$

$$-v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0,$$

also, wenn wir mit ϱ multiplizieren und (37) berücksichtigen,

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0,$$

zu welcher Gleichung sich noch die beiden analogen

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \varrho \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$$

gesellen.

Da $-\frac{\partial \chi}{\partial x}, -\frac{\partial \chi}{\partial y}, -\frac{\partial \chi}{\partial z}$ die Komponenten der auf die Masseneinheit wirkenden äußeren Kraft sind, so drücken die drei Formeln wirklich das Gleichgewicht zwischen den auf ein Volumelement wirkenden Kräften aus.

Für ein vollkommenes Gas, d. h. für ein solches, das dem Boyle'schen Gesetz folgt, ist pv konstant; die zweite der Gleichungen (46) liefert daher das einfache Resultat, daß im Gleichgewichtszustande die für die Masseneinheit genommene Summe der freien und der potentiellen Energie an allen Stellen den gleichen Wert hat. Die Zunahme der potentiellen Energie, welche in einer der Schwerkraft ausgesetzten Säule nach oben hin besteht, wird gerade kompensiert durch die mit der Verminderung der Dichte zusammenhängende Abnahme der freien Energie.

§ 30. Wir wollen jetzt zeigen, wie sich das in § 27 gestellte Problem mit Hilfe des Entropiegesetzes behandeln läßt. Zur Vereinfachung setzen wir wieder voraus, daß die den Körper einschließenden Wände unbeweglich sind; bei den vorzunehmenden Variationen braucht dann an den Volumelementen selbst nichts geändert zu werden. Ferner bezeichnen wir für die in dem Elemente dS befindliche Substanz mit ε und η die pro Volumeinheit bestehende innere Energie und Entropie; wir fassen (§ 21) letztere Größe als eine Funktion von v und ε auf. Die Gesamtentropie ist

$$\int \frac{1}{v} \eta \, dS$$

und die Gleichgewichtsbedingung besteht darin, daß bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung die Variation dieses Integrals verschwinden soll. Dabei sind jetzt zwei Nebenbedingungen zu berücksichtigen, weil nicht nur die gesamte Masse (44), sondern auch die Energie des ganzen Systems

$$\int \frac{1}{v} (\varepsilon + \chi) \, dS$$

unvariiert bleiben soll, letzteres weil die Variation ohne äußere Wärmezufuhr, also, da die Wände unbeweglich sind, ohne Änderung der Gesamtenergie geschehen muß.

In jedem Volumelement können sich v und ε ändern, wobei zu bemerken ist, daß die Variation von ε sowohl von einer Dichte- als auch von einer Temperaturänderung herrühren kann.

Die gesuchte Bedingung wird nun

$$\int \left\{ \left(-\frac{\eta}{v^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) \delta v + \frac{1}{v} \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon \right\} dS = 0,$$

oder, wenn man (39) beachtet,

$$\int\left\{\left(-\frac{\eta}{v^2}+\frac{p}{vT}\right)\delta v+\frac{1}{vT}\delta\varepsilon\right\}dS=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

und zwar muß diese Gleichung erfüllt sein für alle Variationen δv und $\delta\varepsilon$, welche mit

$$\delta\int\frac{1}{v}\,dS=0 \quad \text{und} \quad \delta\int\frac{1}{v}(\varepsilon+\chi)\,dS=0,$$

d. h. mit

$$\int\frac{1}{v^2}\,\delta v\,dS=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

und

$$\int\left\{-\frac{1}{v^2}(\varepsilon+\chi)\,\delta v+\frac{1}{v}\delta\varepsilon\right\}dS=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

verträglich sind.

Wir verfahren nun ferner nach einer bekannten mathematischen Methode. Wir multiplizieren die Gleichungen (48) und (49) mit Größen C_1 und C_2, die konstant sind, d. h. nicht etwa von einem Volumelement zum anderen variieren, addieren dann beide Gleichungen zu (47) und setzen den Koeffizienten jedes einzelnen δv und $\delta\varepsilon$ der Null gleich. So erhalten wir die beiden Gleichungen

$$-\frac{\eta}{v^2}+\frac{p}{vT}+\frac{C_1}{v^2}-\frac{C_2}{v^2}(\varepsilon+\chi)=0$$

und

$$\frac{1}{vT}+\frac{C_2}{v}=0,$$

deren letztere aussagt, daß die Temperatur in allen Volumelementen denselben Wert $-\frac{1}{C_2}$ haben muß. Für die erste Gleichung aber können wir schreiben, wenn wir C_2 durch $-\frac{1}{T}$ ersetzen, und mit v^2T multiplizieren,

$$-\eta T+pv+\varepsilon+\chi=-C_1T,$$

was, da C_1T konstant ist, genau mit (45) übereinstimmt.

Bei den ziemlich komplizierten Rechnungen, mittels welcher man jetzt nachweisen kann, daß die Entropie in der Tat ein Maximum wird, wollen wir uns hier nicht aufhalten; es war uns nur darum zu tun, die Äquivalenz der beiden Methoden hervortreten zu lassen.

Es verdient ganz besondere Beachtung, daß diese Gleichwertigkeit sich auf alle ähnlichen Fälle erstreckt, und daß man im allgemeinen die Frage nach dem Gleichgewichtszustande eines Systems ebenso gut wie nach der Methode der freien Energie auch mit Hilfe der Entropie, in manchen Fällen auch durch Betrachtungen über das thermodynamische Potential beantworten kann. Dabei bekommt man, wenn man richtig verfährt, immer dieselben Resultate. Wie es mit einem Körper

beschaffen ist, kann ja nicht von den mathematischen Kunstgriffen, mittels welcher wir es zu erforschen versuchen, abhängen. Derselbe Gleichgewichtszustand hat eben die Eigenschaft, daß unter gewissen Umständen die Variation der freien Energie, unter anderen die der Entropie verschwindet.

Insofern die in Anwendung kommenden Sätze alle einer gemeinsamen Wurzel, als welche man den in § 8 abgeleiteten Satz betrachten kann, entspringen, ist die Übereinstimmung der Resultate auch sehr wohl begreiflich.

Umwandlungen bei konstanter Temperatur.

§ 31. Wenn man sich von vornherein auf Vorgänge beschränkt, die bei einer bestimmten Temperatur stattfinden, was für manche Anwendung ausreicht, so kann man die in § 8 mitgeteilte Beweisführung erheblich vereinfachen. Es genügt dann, mit dem System M einen beliebigen i s o t h e r m i s c h e n Kreisprozeß auszuführen; indem wir dem Reservoir R die Temperatur geben, welche das System fortwährend haben soll, und es mit diesem letzteren in direkte Berührung bringen, können wir der Hilfskörper, die uns zur Übertragung der Wärme dienten, ganz entbehren. Der Schluß lautet jetzt

$$\int dQ \leqq 0,$$

wo wieder bloß das untere Zeichen zu nehmen ist, wenn der Prozeß in allen seinen Teilen umkehrbar ist, d. h. bei einem isothermischen reversiblen Kreislauf wird im ganzen weder Wärme aufgenommen noch abgegeben. Folglich ist auch die algebraische Summe der durch das System geleisteten Arbeitsbeträge Null.

Man ist seit langer Zeit überzeugt, daß es keine Maschine geben kann, die unaufhörlich arbeitet, ohne durch äußere Einflüsse dazu in den Stand gesetzt zu werden; das wäre ein Perpetuum mobile. Die Thermodynamik zeigt uns jetzt, daß man ebensowenig eine Vorrichtung konstruieren kann, in der alles die gleiche Temperatur hat, und die immerfort arbeitet auf Kosten der Energie, die sie aus einem Wärmebehälter von dieser Temperatur schöpft. Man drückt das oft dadurch aus, daß man sagt, ein Perpetuum mobile z w e i t e r A r t sei unmöglich.

Der Satz, daß bei einem umkehrbaren isothermischen Kreislauf die Gesamtarbeit Null ist, läßt sich in vielen Fällen mit Vorteil anwenden. Wir bringen z. B. einen festen dielektrischen Körper in ein elektrisches Feld, erteilen ihm dann irgend eine Deformation, entfernen ihn, nachdem dies geschehen ist, aus dem Felde und heben schließlich die Deformation auf. Bei Betrachtung dieser Reihe von Operationen stellen sich interessante Beziehungen heraus zwischen dem Einfluß, den einer-

seits die Formänderungen auf die elektrischen Eigenschaften, und dem Einfluß, den anderseits elektrische Kräfte auf Gestalt und Größe des Körpers haben.

Ein bemerkenswertes Beispiel ist auch die von Maxwell herrührende Bestimmung des Druckes eines gesättigten Dampfes mit Zugrundelegung der Isotherme, welche für die betreffende Substanz gelten würde, wenn sie bei der Kompression fortwährend homogen bliebe. Diese Kurve steigt, wenn man sie von rechts nach links durchläuft (vgl. § 6), zuerst bis zu einem Punkte A, wo der Druck ein Maximum wird; dann senkt sie sich über eine gewisse Strecke und steigt erst wieder, nachdem sie, wir wollen sagen in einem Punkte B, ein Minimum erreicht hat. Der Teil links von B entspricht dem flüssigen, der Teil rechts von A dem gasförmigen Zustande, während die Punkte zwischen A und B labile Zustände darstellen. Eine horizontale Linie, in einer durch den gesuchten Druck bestimmten Höhe gezogen, schneidet die Isotherme in drei Punkten, von welchen der mittlere zwischen A und B liegt; die Punkte links und rechts hiervon wollen wir C und D nennen. Maxwell fingiert nun einen isothermischen Kreislauf, in welchem man auf der gekrümmten Isotherme, d. h. während der Körper homogen bleibt, von C nach D und in gerader Linie nach C zurück geht; auf letzterem Wege wird der Dampf allmählich bei konstantem Druck zu Flüssigkeit kondensiert. Die Gleichung

$$\int p\,dv = 0,$$

auf diesen Kreislauf angewandt, enthält die Lösung der gestellten Aufgabe.

§ 32. Von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art ausgehend, gelangt man zu dem Begriff der freien Energie auf einem Wege, der genau mit demjenigen übereinstimmt, auf welchem man aus der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile erster Art den Begriff des Energieinhaltes eines Körpers deduzieren kann; nur müssen wir uns jetzt auf umkehrbare Übergänge und isothermische Umwandlungen beschränken und uns also immer zu dem Körper, den wir betrachten, einen Wärmebehälter R, mit dem er fortwährend in Berührung steht, hinzugegeben denken.

Aus dem Satze, daß die Arbeit bei einem Kreislauf Null ist, folgt nun zunächst, daß für alle Wege, welche es zwischen zwei bestimmten Zuständen gibt, die Arbeit des Körpers denselben Wert hat. Dies führt auf die Vorstellung, das System habe in jedem Zustande die Fähigkeit eine bestimmte Arbeit zu leisten, eine Vorstellung, die wir weiter präzisieren, indem wir jeden Zustand A mit einem gewissen Nullzustand N vergleichen. Das Maß für die Arbeitsfähigkeit, welche das System in

dem Zustande A besitzt, finden wir dann in der Arbeit, die es bei dem isothermischen und umkehrbaren Übergang A ⟶ N leistet. Wie man sieht, ist dies der Definition des dem Körper zukommenden Energieinhaltes sehr ähnlich, und man könnte sogar, wenn man die Rolle, welche das Reservoir spielt, übersähe, was z. B. geschehen könnte, wenn die umgebende Luft als solches diente, das, was wir freie Energie nennen, mit dem Energieinhalte verwechseln. In Wirklichkeit liegt die Sache aber so, daß die Arbeit, welche jetzt bei dem Übergange A ⟶ N verrichtet wird, nicht zu ihrem vollen Betrag, in einigen Fällen ganz und gar nicht, einem Energieverluste des wirkenden Körpers zu verdanken ist, da aus dem Reservoir R eine größere oder kleinere Wärmemenge verschwunden sein kann.

Besonders augenfällig ist der Unterschied zwischen den beiden Energien bei einem vollkommenen Gase. Hier hat bekanntlich die innere Energie bei gegebener Temperatur einen konstanten Wert, wie klein oder wie groß das Volum auch sein möge; dagegen nimmt bei Vergrößerung dieses letzteren die freie Energie mit einem der äußeren Arbeit gleichen Betrage ab. Bei dem System Wasser-Wasserdampf ändern sich sogar die beiden Größen in entgegengesetzter Richtung. Wird nämlich das Volum bei konstantem T langsam vergrößert, dann verdampft eine gewisse Menge Flüssigkeit; es wird eine äußere Arbeit A geleistet, während eine Wärmemenge B, die größer als A ist, dem Reservoir entzogen wird. Die innere Energie nimmt um $B - A$ zu, die freie Energie aber wird um den Betrag A verkleinert.

§ 33. Um die Werte ψ_A und ψ_B der freien Energie in zwei Gleichgewichtszuständen A und B von gleicher Temperatur miteinander zu vergleichen, denke man sich das System von A aus, auf isothermischem und umkehrbarem Wege, zunächst in den Zustand B und dann weiter in den Nullzustand übergeführt. Für den ersten Teil dieses Weges sei die Arbeit W_{AB}. Da sie für den zweiteu Teil ψ_B und für den ganzen Übergang ψ_A beträgt, so gilt die Beziehung

$$\psi_A - \psi_B = W_{AB},$$

die mit der früher abgeleiteten Formel (29), wenn man in dieser das obere Zeichen fallen läßt, übereinstimmt. Selbstverständlich kann W_{AB} auch negativ sein; dann wird von außen Arbeit auf den Körper getan, und die freie Energie nimmt mit einem dieser Arbeit gleichen Betrag zu.

Liegen die Zustände A und B einander unendlich nahe, so hat man für die vom System geleistete Arbeit

$$-\, d\psi.$$

Also ist in denjenigen Fällen, in denen die Arbeit durch den Ausdruck (13) gegeben ist, bei konstanter Temperatur

$$d\psi = -(A_1 da_1 + \cdots + A_n da_n),$$

woraus sich wieder die Formeln (35) ableiten lassen.

Es möge noch einmal betont werden, daß die vorstehenden Gleichungen nur für reversible Prozesse gelten. Sobald man es mit nicht umkehrbaren Erscheinungen zu tun hat, hat man in (29) das obere Zeichen zu nehmen. Die freie Energie kann dann abnehmen, auch wenn der Körper keine Arbeit leistet, und wenn er das tut, nimmt die freie Energie mehr ab als der geleisteten Arbeit entspricht. Anderseits, wenn wir eine gewisse Arbeit auf das System ausüben, bringen wir nicht eine dieser Arbeit entsprechende Vergrößerung der freien Energie zuwege; sie erleidet einen kleineren Zuwachs, vielleicht sogar eine Abnahme.

Wenn man eine Verminderung der freien Energie unter entsprechender Arbeitsleistung als eine nützliche auffaßt, so kann man sagen, es finde bei irreversiblen Vorgängen eine unnütze Vergeudung von freier Energie statt.

§ 34. Wir hätten die Definition der freien Energie auch an die in § 12 dargelegten Betrachtungen anknüpfen können. Die Gleichungen (15) zeigen nämlich, daß die Kraftkomponenten $A_1, \ldots A_n$ sich als die nach den Koordinaten genommenen Differentialquotienten einer einzigen Funktion von $a_1, \ldots a_n$ und T darstellen lassen. Diese Funktion, mit dem negativen Vorzeichen genommen, ist eben die freie Energie.

Die Darstellung der Kraftkomponenten mit Hilfe einer einzigen Funktion der Koordinaten hat für viele Theorien große Bedeutung. Gesetzt z. B., wir wollen die Grundgleichungen für das Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers aufstellen. Wir können dann ein aus diesem geschnittenes rechtwinkliges Parallelepiped betrachten, und einerseits auf die Spannungen, welche an den Seitenflächen bestehen, anderseits auf die Größen a, welche die Deformation bestimmen, d. h. auf die Änderungen der Dimensionen und der Kantenwinkel unsere Aufmerksamkeit richten. Die freie Energie, welche eine Funktion dieser Koordinaten a ist, können wir für hinlänglich kleine Deformationen in eine Reihe nach den aufsteigenden Potenzen der a entwickeln; geeignete Differentiation dieser Reihe liefert uns dann Ausdrücke für die Spannungen. Es zeigt sich, daß man für alle genauer untersuchten Fälle in der Reihe für ψ nur bis zu den Gliedern zweiter Ordnung zu gehen braucht; da ferner das von den Koordinaten unabhängige Glied verschwindet, wenn man den undeformierten Zustand zum Nullzustand wählt, und auch die Glieder erster Ordnung Null sein müssen, wenn

ursprünglich keine Spannungen bestehen, so kann man ψ als eine homogene quadratische Funktion der Deformationen ansetzen.

Formal ist das hier geschilderte Verfahren genau dasselbe, das man in älteren Theorien benutzte, als man noch keinen Grund hatte, den Wärmewirkungen eine wesentliche Rolle zuzuschreiben und an die inneren Bewegungen eines Molekülsystems zu denken. Damals galt die Auffassung, daß die kleinsten Teilchen eines elastischen Körpers, sowohl im ursprünglichen, als auch im deformierten Zustande, in Ruhe sind, indem sie durch die inneren und äußeren Kräften in bestimmten Lagen festgehalten werden; man betrachtete demgemäß den Körper als den Sitz einer gewissen potentiellen Energie und leitete aus dem für diese als Funktion der Deformationen geltenden Ausdruck durch Differentiation die Formeln für die Spannungskomponenten ab. Diese Behandlungsweise mußte man aufgeben, nachdem die neueren Anschauungen über die Wärme sich Bahn gebrochen hatten. Glücklicherweise wird der Verlust durch die Lehre von der freien Energie ersetzt; obgleich die Theorie in physikalischer Hinsicht etwas an Einfachheit eingebüßt hat, ist sie, was die mathematische Form anbelangt, so gut wie unverändert geblieben.

§ 35. Die Theorie der Elastizität ist nicht die einzige, in welcher man, streng genommen, die potentielle Energie durch die freie Energie zu ersetzen hat; gleiches gilt z. B., wenn man die Erscheinungen der Kapillarität oder das Verhalten eines ponderablen Dielektrikums im elektrischen Felde der Untersuchung unterwirft. Damit soll indes keineswegs gesagt sein, daß eine Behandlung mit Hilfe der potentiellen Energie unter allen Umständen verwerflich sei. Wir dürfen ja gelegentlich in unseren Theorien auf Einfachheit und Anschaulichkeit mehr Wert als auf Strenge legen.

Ich füge noch hinzu, daß das Vorhergehende nicht den Eindruck erwecken darf, die Lehre von der freien Energie sei irgendwie an die Vorstellung molekularer Bewegungen gebunden. Von dieser sind alle thermodynamischen Sätze völlig unabhängig, und wir dürfen uns in rein phenomenologischer Weise darauf beschränken, die Energie, die Entropie und die freie Energie als gewisse durch den Zustand des Körpers bestimmte Größen, welche die früher angegebenen Eigenschaften haben, aufzufassen. Wir können uns dieser Größen bedienen, um einen Einblick in den Zusammenhang und die Gesetzmäßigkeit der Erscheinungen zu bekommen und sie so dem Verständnis näher zu bringen, ohne uns um den Mechanismus der Vorgänge zu kümmern.

Werte der freien Energie für ein vollkommenes Gas und für gasförmige oder flüssige Mischungen.

§ 36. Wir betrachten zunächst eine Einheit eines Gases, worunter wir eine beliebig gewählte Menge, z. B. ein Gramm, oder ein Grammmolekül verstehen wollen, und gehen aus von der Relation

$$pv = RT,$$

in welcher R eine von der Wahl der Einheit abhängige Konstante ist; beziehen wir die Gleichung auf ein Grammolekül, dann ist R für alle Gase gleich (Gaskonstante). Aus

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = -p = -\frac{RT}{v}$$

folgt nun durch Integration, wenn wir uns auf eine bestimmte Temperatur beschränken,

$$\psi = -RT\log v + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

und für die Differenz der Werte der freien Energie bei zwei Volumen

$$\psi_1 - \psi_2 = RT\log\left(\frac{v_2}{v_1}\right).$$

Für C in der Gleichung (50) dürfen wir einen beliebigen Wert annehmen. Wir wollen $C = 0$ setzen, also

$$\psi = -RT\log v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

so daß $\psi = 0$ wird, wenn das Gas die Volumeinheit einnimmt. Das wäre also der Nullzustand.

Haben wir es nicht mit einer, sondern mit m Einheiten zu tun, die zusammen das Volum v füllen, so haben wir nebeneinander m-mal die Einheit in dem Volum $\frac{v}{m}$. Wir müssen also in (51) v durch $\frac{v}{m}$ ersetzen und dann mit m multiplizieren.

Das Resultat

$$\psi = -RTm\log\left(\frac{v}{m}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

wollen wir benutzen, um zu verifizieren, daß die freie Energie abnimmt, wenn zwei Massen desselben Gases von gleicher Temperatur und verschiedener Dichte miteinander in Berührung gebracht werden, und dann bei konstanter Temperatur und ohne Änderung des Gesamtvolums die Druckdifferenz sich ausgleicht. Bestehen die beiden Gasmengen aus m_1 bezw. m_2 Einheiten und sind die Volume v_1 und v_2, so findet man leicht für die Änderung der freien Energie

$$RT\left\{m_1\log\left(\frac{v_1}{m_1}\right) + m_2\log\left(\frac{v_2}{m_2}\right) - (m_1+m_2)\log\left(\frac{v_1+v_2}{m_1+m_2}\right)\right\}, \quad (53)$$

was immer einen von Null verschiedenen negativen Wert hat, es sei

denn, daß gerade $\frac{v_1}{m_1} = \frac{v_2}{m_2}$ wäre.[1]) In diesem letzteren Fall hatten die beiden Gasmengen dieselbe Dichte; der Zustand bleibt nach der Berührung unverändert, und es tritt keine Abnahme der freien Energie ein.

§ 37. Als Gibbs'sches Paradoxon, eine Benennung, wofür der Grund sich bald zeigen wird, ist der Satz bekannt, nach welchem die Entropie einer Mischung zweier vollkommenen Gase die Summe der Entropiewerte ist, welche den einzelnen Bestandteilen zukommen würde, wenn sie jeder für sich bei derselben Temperatur den mit der Mischung gefüllten Raum einnähmen. Offenbar ist das gleichbedeutend mit der entsprechenden Aussage über die freie Energie, wenn wir annehmen, daß die Mischung der Gase sich bei konstanter Temperatur und konstantem Volum ohne Entwicklung oder Absorption von Wärme vollzieht; dann ist die Energie ε der Mischung gleich der Summe der Einzelenergien. Nach der Gleichung (28) wird also der angeführte Satz für die Entropie bewiesen sein, wenn die entsprechende Behauptung für die freie Energie sich rechtfertigen läßt, und umgekehrt.

Was nun den Beweis anbelangt, so ist daran zu erinnern, daß wir die Werte der Entropie oder der freien Energie für zwei Zustände nur dann miteinander vergleichen können, wenn es möglich ist, das System auf umkehrbarem Wege von dem einen in den anderen überzuführen; wir müssen also ein Mittel ersinnen, das es uns ermöglicht, die beiden Gase ebenso gut voneinander zu trennen wie miteinander zu vermischen. Ein solches finden wir nun in äußeren Kräften, die wir auf die Gase wirken lassen; schon die Schwerkraft reicht hin, wenn, wie wir annehmen dürfen, zwei miteinander vermischte Gase sich im Gleichgewichtszustande gerade so über den ihnen gebotenen Raum verteilen, als ob jedes allein vorhanden wäre. Nach diesem Satze, den wir, in Ermangelung direkter experimenteller Bestätigung, der kinetischen Gastheorie entnehmen können, sind, wenn wir die z-Achse vertikal nach oben legen und mit C_1 und C_2 gewisse positive Konstanten bezeichnen, die für das schwerere, bezw. das leichtere Gas gelten, die Dichten den Ausdrücken

$$e^{-C_1 z} \text{ und } e^{-C_2 z}$$

proportional. Dabei ist $C_1 > C_2$.

---

1) Differentiiert man nämlich den eingeklammerten Ausdruck nach v_2, so erhält man

$$\frac{m_2}{v_2} - \frac{m_1 + m_2}{v_1 + v_2} = \frac{m_2 v_1 - m_1 v_2}{v_2(v_1 + v_2)}.$$

Dies ist positiv oder negativ, je nachdem $v_2 <$ oder $> \frac{m_2}{m_1} v_1$. Die Größe (53) wird also ein Maximum für $v_2 = \frac{m_2}{m_1} v_1$. Da sie dann Null ist, so ist sie in allen anderen Fällen negativ.

Um uns nicht in lange Formeln zu verlieren, wollen wir uns denken, das Gemenge befinde sich in einem vertikalen Zylinder von so großer Höhe, daß man ohne merklichen Fehler sagen kann, man habe am unteren Ende nur das eine und am oberen nur das andere Gas; das läßt sich wirklich mit jedem Grad der Annäherung realisieren, da das Verhältnis der Dichten

$$e^{-(C_1 - C_2) z}$$

sich für $z = \infty$ dem Werte Null nähert, und für $z = -\infty$ unendlich groß wird.

Wir nehmen also an, es befinde sich in irgend einer tief liegenden Schicht P_1 nur das schwerere Gas G_1 und in einer zweiten hoch liegenden Schicht P_2 nur das leichtere G_2. Ferner betrachten wir eine beliebige Schicht P in mittlerer Höhe. Es seien v das Volum einer gewissen Menge des an dieser Stelle vorhandenen Gemisches, m_1 und m_2 die Mengen der beiden Bestandteile, welche es enthält, v_1 und v_2 die Räume, welche gleich große Mengen in den Schichten P_1 und P_2 einnehmen. Wenn wir dann, was mittels horizontaler Ansatzröhren, in denen wir Kolben bewegen können, möglich ist, die Masse m_1 mit dem Volum v_1 in die Schicht P_1 und die Masse m_2 mit dem Volum v_2 in die Schicht P_2 hineintreiben, während wir zugleich aus P das Volum v der daselbst befindlichen Mischung entfernen, und zwar alles ganz langsam, damit das Gleichgewicht in der vertikalen Säule nicht merklich gestört werde, so wird offenbar an dem Zustande in dieser letzteren nichts geändert und haben wir am Ende dasselbe erreicht, als wenn wir die Mengen m_1 und m_2 direkt miteinander vermischt hätten. Nur ist der Prozeß jetzt umkehrbar, da wir auch die Kolben über dieselben Strecken in entgegengesetzter Richtung hätten verschieben können.

Es fragt sich jetzt, welche Arbeit für das Zustandekommen der Mischung erforderlich ist. Um diese zu berechnen, bezeichnen wir mit p_1, p_2 und p die Drucke in den Schichten P_1, P_2 und P. Das Hineintreiben der Massen m_1 und m_2 erfordert dann eine Arbeit

$$p_1 v_1 + p_2 v_2,$$

während bei der nach außen gerichteten Bewegung des mittleren Kolbens das System eine Arbeit

$$p v$$

leistet. Da nun, wenn p'_1 und p'_2 die Partialdrucke in der mittleren Schicht sind,

$$p = p'_1 + p'_2$$

und

$$p_1 v_1 = p'_1 v, \quad p_2 v_2 = p'_2 v,$$

letzteres weil alles bei konstant erhaltener Temperatur gemacht wird, so sind die beiden Arbeiten gleich. Ferner ist zu bemerken, daß die

die Säule einschließenden Wände unbeweglich gedacht werden, und daß also auf diese keine Arbeit ausgeübt wird. Wir schließen daher, daß die Summe der freien und der potentiellen Energie bei dem geschilderten Vorgang keine Änderung erleidet, d. h., wenn wir die freie Energie wieder mit ψ, die potentielle mit χ bezeichnen und durch Indizes andeuten, auf welche Gasmasse, auf welches Volum und auf welche Lage diese Größen sich beziehen,

$$(\psi + \chi)_{m_1+m_2, v, P} = (\psi + \chi)_{m_1, v_1, P_1} + (\psi + \chi)_{m_2, v_2, P_2}.$$

Es ist aber, eben weil jedes Gas sich unabhängig von dem anderen über den Raum verteilt, nach dem, was in § 29 bewiesen wurde,

$$(\psi + \chi)_{m_1, v_1, P_1} = (\psi + \chi)_{m_1, v, P}$$

und

$$(\psi + \chi)_{m_2, v_2, P_2} = (\psi + \chi)_{m_2, v, P},$$

folglich

$$(\psi + \chi)_{m_1+m_2, v, P} = (\psi + \chi)_{m_1, v, P} + (\psi + \chi)_{m_2, v, P}.$$

Selbstverständlich ist ferner

$$\chi_{m_1+m_2, v, P} = \chi_{m_1, v, P} + \chi_{m_2, v, P},$$

mithin auch

$$\psi_{m_1+m_2, v, P} = \psi_{m_1, v, P} + \psi_{m_2, v, P},$$

und das ist es, was bewiesen werden sollte.

Es möge noch hinzugefügt werden, daß man den Gibbs'schen Satz auch leicht beweisen kann, wenn man sich eine Wand vorstellt, die nur das eine Gas, nicht aber das andere durchläßt; man kann ja mit einer solchen, indem man sie in dem Gemenge verschiebt, den letzteren Bestandteil daraus hinaustreiben. Im Grunde ist diese Methode von der oben angewandten nicht sehr verschieden; das Wesentliche ist bei beiden die Annahme der Möglichkeit, durch äußere Kräfte die Dichten der beiden Gase in verschiedener Weise zu beeinflussen.

Übrigens läßt sich der Satz auch auf Mischungen von drei oder mehr Gasen ausdehnen. Man sieht das am einfachsten, wenn man für jedes Gas eine eigene äußere Kraft einführt, und zwar eine solche, die es in der Nähe eines bestimmten Punktes zu kondensieren bestrebt ist, wobei für jeden Bestandteil diesem Punkt eine andere Lage zu geben ist.

§ 38. Es ist nunmehr leicht, einen Ausdruck für die freie Energie eines aus beliebig vielen Bestandteilen bestehenden Gasgemisches zu gewinnen. Es sei n die Anzahl der Komponenten, v das Volum der Mischung, und es möge das System $m_1, m_2, \dots m_n$ Einheiten (§ 36) der verschiedenen Komponenten enthalten; die denselben zukommenden

Werte von R unterscheiden wir als $R_1, R_2, \ldots R_n$. Aus dem Gibbs'schen Satze folgt dann, wenn man die Formel (52) benutzt,

$$\psi = -T \log v \cdot \Sigma(Rm) + T\Sigma(Rm \log m), \quad . \ . \ . \quad (54)$$

wo sich die Summen auf die verschiedenen Komponenten beziehen.

Auch die Abnahme, welche die freie Energie infolge einer bei konstanter Temperatur und konstantem Volum stattfindenden Vermischung zweier Gase erleidet, können wir jetzt angeben. Wir wollen den Fall betrachten, daß von jedem Gase ein Grammolekül genommen wird, und daß diese Mengen anfangs unter gleichem Druck stehen und also auch gleiche Räume v einnehmen; die Mischung vollziehe sich ohne Änderung des Gesamtvolums $2v$. Da nach (52) die freie Energie eines Grammmoleküls bei Verdoppelung des Volums um $RT \log 2$ abnimmt, so beträgt die gesuchte Verminderung

$$2RT \log 2.$$

Es verdient besondere Beachtung, daß dies unabhängig ist von den speziellen Eigenschaften der Gase, und daß der gefundene Wert derselbe bleibt, wie wenig die Molekulargewichte auch voneinander verschieden seien. Man würde indes einen Fehler begehen, wenn man nun das Resultat auch auf zwei Portionen ein und desselben Gases anwenden wollte. Sind nämlich solche vollkommen gleiche Gasmengen zunächst durch eine Scheidewand voneinander getrennt, und wird diese dann entfernt, so findet gar keine Änderung der freien Energie statt; bei der jetzt behandelten Frage dürfen wir daher den Fall zwei gleicher Gase nicht als einen Grenzfall betrachten, dem wir ein aus verschiedenen Gasen bestehendes System sich in unserer Vorstellung nähern lassen können. Daß dies etwas paradoxal klingt, kann man nicht leugnen und leider läßt sich das Befremdliche unseres Ergebnisses schwerlich beseitigen. Wir können nur sagen, daß der für den Gibbs'schen Satz gegebene Beweis gültig bleibt, solange die beiden Gase, sei es noch so wenig, verschieden sind, nicht aber, wenn sie ganz gleich sind, und daß der Satz in seinen Anwendungen nie zu Widersprüchen geführt hat.

§ 39. Wir wollen jetzt die freie Energie eines Gemenges betrachten, das sich im flüssigen Zustande befindet oder wenigstens kein „vollkommenes" Gas ist. Zu einer geeigneten Formel für dieselbe gelangen wir dadurch, daß wir uns vorstellen, das System werde durch Vergrößerung des Volums in den Zustand eines vollkommenen Gases übergeführt, und zwar denken wir uns diesen Übergang isothermisch und umkehrbar und nehmen an, daß das System im Laufe desselben fortwährend homogen bleibt.

Wir bezeichnen mit v das Volum, speziell dasjenige, für welches wir die freie Energie bestimmen wollen, mit V aber das große Volum,

bis zu welchem wir gehen müssen, um den vollkommenen Gaszustand zu erreichen. Nach der ersten der Gleichungen (37) ist dann

$$\psi = \psi_V + \int_v^V p\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

und hier dürfen wir nach (54)

$$\psi_V = -T \log V \cdot \Sigma(Rm) + T\Sigma(Rm \log m) \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

setzen.

Das Resultat läßt sich auf eine ziemlich einfache Form bringen, wenn wir folgendes beachten. Hätte das System in dem Volum v die Eigenschaften einer Mischung vollkommener Gase, so wäre

$$p = \frac{T}{v}\Sigma(Rm).$$

In Wirklichkeit werden sich, wenn man von dem großen Volum V zu kleineren übergeht, alsbald Abweichungen von diesem Werte zeigen. Wir setzen daher

$$p = \frac{T}{v}\Sigma(Rm) + p',$$

wo p' eine gewisse Funktion von v und T ist, die wir im allgemeinen nicht näher angeben können. Am oberen Ende des Integrationsintervalles in (55) wird sie sehr klein; am unteren Ende dagegen kann sie unter Umständen beträchtliche Werte annehmen.

Die Gleichung (55) verwandelt sich jetzt in

$$\psi = \psi_V + T \log\left(\frac{V}{v}\right)\Sigma(Rm) + \int_v^V p'\,dv,$$

oder, wenn wir den Wert von ψ_V einsetzen,

$$\psi = -T \log v \cdot \Sigma(Rm) + T\Sigma(Rm \log m) + \int_v^\infty p'\,dv \quad . \quad . \quad (57)$$

Hier haben wir zugleicherzeit als obere Grenze des Integrals ∞ statt V geschrieben, und zwar, weil wir mit um so geringerem Fehler die Mischung als vollkommen gasförmig betrachten können, je größer das Volum ist.

Man würde also den Wert von ψ für jedes Volum v vollständig angeben können, wenn für alle homogenen Zustände des Gemenges der Druck p und damit auch der Wert von p' als Funktion von v gegeben wäre, d. h. wenn die Gleichung der Isotherme bekannt wäre. Nimmt man diese in der Gestalt an, die van der Waals seiner Theorie der Mischungen zugrunde gelegt hat, dann bleibt, eben weil p' rasch abnimmt, das Integral in (57), trotz der unendlich großen oberen Grenze, endlich. Wir setzen voraus, daß dies auch dann noch der Fall ist, wenn größere oder kleinere Abweichungen von der van der Waals'schen Gleichung bestehen.

§ 40. Eine mit (57) übereinstimmende Formel gilt auch für das thermodynamische Potential ζ. Berücksichtigt man, daß

$$\zeta = \psi + pv$$

und, wenn p und P die den Grenzen des Integrals entsprechenden Werte des Drucks sind,

$$\int_v^V p\,dv = PV - pv - \int_p^P v\,dp,$$

so erhält man aus (55) und (56)

$$\zeta = -T \log V \cdot \Sigma(Rm) + T\Sigma(Rm \log m) + PV + \int_P^p v\,dp. \quad (58)$$

Hier können wir setzen

$$PV = T\Sigma(Rm) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

und

$$v = \frac{T}{p}\Sigma(Rm) + v',$$

wo v' eine Funktion von p und T ist, von welcher bei sehr kleinen Werten des Druckes abgesehen werden kann. Dadurch wird das Integral in (58)

$$T \log\left(\frac{p}{P}\right) \Sigma(Rm) + \int_P^p v'\,dp$$

und der Wert des thermodynamischen Potentials

$$\zeta = T \log p \cdot \Sigma(Rm) + T\Sigma(Rm)\{1 - \log[T\Sigma(Rm)]\}$$
$$+ T\Sigma(Rm \log m) + \int_0^p v'\,dp. \quad (60)$$

Aus naheliegendem Grunde ist hier für die untere Grenze des Integrals 0 geschrieben.

Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man die Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial p} = v = \frac{T}{p}\Sigma(Rm) + v'$$

zwischen den Drucken P und p integriert und berücksichtigt, daß, wie aus (56) und (59) folgt

$$\zeta_P = -T \log V \cdot \Sigma(Rm) + T\Sigma(Rm) + T\Sigma(Rm \log m).$$

Die Formeln vereinfachen sich erheblich, wenn man die Quantität jeder Komponente in Grammolekülen ausdrückt, so daß die Konstanten $R_1, R_2, \ldots R_n$ einen gemeinschaftlichen Wert R haben. Wählt man ferner eine solche Menge der Mischung, daß $\Sigma m = 1$, so bekommt man

$$\psi = -RT \log v + RT\Sigma(m \log m) + \int_v^\infty p'\,dv,$$

$$\zeta = RT \log p + RT\{1 - \log(RT)\} + RT\Sigma(m \log m) + \int_0^p v'\,dp.$$

§ 41. Während es, da uns die Beziehung zwischen p, v und T nicht bekannt ist, im allgemeinen unmöglich ist, aus obigen Formeln bestimmte quantitative Schlüsse abzuleiten, kann man das, wie sich bald zeigen wird, für alle diejenigen Systeme tun, in welchen eine Komponente, die C heißen möge, nur in sehr kleiner Menge vorhanden ist. Dies rührt daher, daß dann unter den Größen, die sich auf diese eine Komponente beziehen, das Glied $m \log m$ einen überwiegenden Einfluß hat.

Wir wollen die Menge der genannten Komponente, in einer beliebigen Einheit ausgedrückt, mit c bezeichnen und die für diesen Bestandteil geltende Konstante mit R ohne Index, so daß, wenn man für den von $\log c$ unabhängigen Teil des Ausdrucks (57) oder (60) $[\psi]$ oder $[\zeta]$ schreibt,

$$\psi = [\psi] + RTc \log c, \qquad \zeta = [\zeta] + RTc \log c$$

wird. Hierbei ist nicht aus dem Auge zu verlieren, daß auch die in $[\psi]$ und $[\zeta]$ zusammengefaßten Glieder von c abhängen; nicht nur tritt diese Größe in einigen derselben explizite auf, sondern sie ist auch in p' und v' enthalten. Wir wollen nun aber die Annahme machen, daß man für kleine Werte von c die Größen $[\psi]$ und $[\zeta]$ in Reihen nach den aufsteigenden Potenzen von c entwickeln kann, eine Annahme, die sich als richtig erweist, wenn man z. B. die Zustandsgleichung in der von van der Waals angegebenen Form benutzt.

Wir setzen also

$$\psi = \psi_0 + \alpha c + \beta c^2 + \cdots + RTc \log c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

und zwar sind in diesem Ausdrucke, unabhängig von der Quantität von C, die Größen ψ_0, α, $\beta \ldots$ durch v, T und die Mengen m_1, $m_2, \ldots$ der übrigen Komponenten bestimmt. Das Glied ψ_0 hat eine sehr einfache Bedeutung. Da nämlich bei fortwährender Abnahme von c das Produkt $c \log c$ sich der Null nähert, so ist ψ_0 der Wert von ψ für $c = 0$, für den Fall also, daß die Komponente C gar nicht in der Mischung vorkommt.

In den Anwendungen kommt es oft auf den Wert von

$$\psi - c\frac{\partial \psi}{\partial c}$$

an. Hierfür ergibt sich aus (61)

$$\psi - c\frac{\partial \psi}{\partial c} = \psi_0 - \beta c^2 - \cdots - RTc,$$

so daß für hinreichend kleine Werte von c die Beziehung gilt

$$\psi - c\frac{\partial \psi}{\partial c} = \psi_0 - RTc. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Desgleichen ist auch

$$\zeta - c\frac{\partial \zeta}{\partial c} = \zeta_0 - RTc, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

wo ζ_0 den Wert bedeutet, den das thermodynamische Potential erhält, wenn man, ohne an den Werten von p und T und den Mengen der übrigen Bestandteile etwas zu ändern, die Komponente C aus der Mischung entfernt.

Osmotischer Druck.

§ 42. Eine höchst bemerkenswerte Folgerung aus den gefundenen Gleichungen ist das zuerst von van 't Hoff ausgesprochene Gesetz für den osmotischen Druck einer verdünnten Lösung.

Wir fassen das Gleichgewicht zwischen zwei durch eine sogenannte halbdurchlässige Wand voneinander getrennten Phasen ins Auge; die eine Phase besteht aus dem reinen Lösungsmittel W, in der anderen ist in dieser Flüssigkeit eine sehr kleine Menge irgend einer Substanz C gelöst. Das Lösungsmittel betrachten wir als einen einheitlichen Körper, in welchem keine Komponenten unterschieden zu werden brauchen. Die Wand kann nur das Lösungsmittel W, nicht aber die Substanz C durchlassen. Wenn wir nun sowohl diese Scheidewand als auch die übrigen die beiden Phasen einschließenden Wände als unbeweglich voraussetzen, kann keine Arbeit geleistet werden und besteht die Gleichgewichtsbedingung darin, daß die gesamte freie Energie Ψ ein Minimum sein muß.

In den nachstehenden Formeln beziehen sich die ungestrichenen Buchstaben auf die Lösung, die gestrichenen auf das reine Lösungsmittel.

Es mögen sich nun an der einen Seite der Wand n' Einheiten, und an der anderen Seite n Einheiten des Lösungsmittels befinden; auf jede dieser letzteren komme eine Menge der Substanz C, die wir, in einer beliebigen Einheit ausgedrückt, mit c bezeichnen. Für jede Einheit des reinen Lösungsmittels sei v' das Volum und ψ' die freie Energie, ebenso für eine Einheit von W an der anderen Seite, mit der darin gelösten Menge c der Substanz C, v das Volum und ψ die freie Energie. Letztere Größe ist bei festgehaltener Temperatur eine Funktion von v und c, während ψ' nur von v' abhängt.

Bei der Bestimmung des Minimums von

$$\Psi = n\psi + n'\psi'$$

haben wir auf die Nebenbedingungen zu achten, daß die Mengen $n + n'$ und nc der beiden Komponenten sowie die auf beiden Seiten der Wand liegenden Räume nv und $n'v'$ unveränderlich sind. Aus den entsprechenden Beziehungen zwischen den Variationen der veränderlichen Größen, nämlich

$$\delta n + \delta n' = 0, \qquad c\,\delta n + n\,\delta c = 0,$$

$$v\,\delta n + n\,\delta v = 0, \qquad v'\,\delta n' + n'\,\delta v' = 0$$

folgt

$$\delta n' = -\delta n, \quad \delta c = -\frac{c}{n}\delta n, \quad \delta v = -\frac{v}{n}\delta n, \quad \delta v' = \frac{v'}{n'}\delta n. \qquad (64)$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet nun

$$\delta \Psi = n\delta\psi + \psi\delta n + n'\delta\psi' + \psi'\delta n' = 0,$$

oder

$$n\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\psi}{\partial c}\delta c\right) + \psi\delta n + n'\frac{\partial\psi'}{\partial v'}\delta v' + \psi'\delta n' = 0.$$

Es ergibt sich daher, indem man die Werte (64) substituiert,

$$\psi - c\frac{\partial\psi}{\partial c} - v\frac{\partial\psi}{\partial v} = \psi' - v'\frac{\partial\psi'}{\partial v'}.$$

Hier wollen wir nun für die beiden ersten Glieder den Wert (62) einsetzen. Wir bekommen dann

$$\psi_0 - RTc - v\frac{\partial\psi}{\partial v} = \psi' - v'\frac{\partial\psi'}{\partial v'},$$

wo ψ_0 die freie Energie einer Einheit des Lösungsmittels bei dem Volum v bedeutet. Anderseits ist ψ' die freie Energie einer solchen Einheit bei dem Volum v'. Da v und v' nur sehr wenig voneinander verschieden sein können, eben weil c als sehr klein betrachtet wird, so dürfen wir setzen

$$\psi_0 = \psi' + (v - v')\frac{\partial\psi'}{\partial v'},$$

infolgedessen unsere Gleichung die Gestalt annimmt

$$v\left(\frac{\partial\psi'}{\partial v'} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = RTc, \quad v(p - p') = RTc,$$

oder

$$p - p' = \frac{RTc}{v}. \qquad (65)$$

Drückt man c in Grammolekülen aus, so ersieht man aus dieser Gleichung sofort, daß der osmotische Druck, d. h. die Differenz $p - p'$, denselben Wert hat wie der Druck, der bei der gewählten Temperatur von einem Gase mit $\frac{c}{v}$ Grammolekülen pro Volumeneinheit ausgeübt wird.

Allgemeine Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen verschiedenen Phasen.

§ 43. Es soll jetzt der Gleichgewichtszustand eines Systems untersucht werden, das aus n Komponenten zusammengesetzt ist und aus k direkt miteinander in Berührung stehenden Phasen besteht; dabei bezeichnen wir die Menge der ν-ten Komponente in der $\varkappa$-ten Phase mit

$$m_\nu^{(\varkappa)}.$$

Allgemein beziehen sich in den nachstehenden Gleichungen die unteren Indizes auf die Komponenten, die höher gestellten und ein-

geklammerten Indizes dagegen auf die Phasen. Mitunter, wenn es sich um eine beliebige Phase oder eine beliebige Komponente handelt, können wir den betreffenden Index fortlassen.

Wir fangen mit der Methode der freien Energie an und suchen also die Summe

$$\Psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \cdots + \psi^{(k)}$$

zu einem Minimum zu machen, wobei wir das Gesamtvolum

$$V = v^{(1)} + v^{(2)} + \cdots + v^{(k)}$$

ungeändert lassen müssen und bei festgesetzter Temperatur jedes ψ als eine Funktion des entsprechenden v, sowie der Werte von $m_1, m_2, \ldots m_n$ zu betrachten haben.

Es genügt nun, einige spezielle unendlich kleine Variationen des Zustandes zu betrachten. Erstens können wir, ohne etwas an den Größen m zu ändern, das Volum einer Phase unendlich wenig zunehmen lassen und das Volum einer anderen Phase um den gleichen Betrag verringern. Zum Beispiel variieren wir bloß $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ und zwar so, daß

$$\delta v^{(2)} = -\delta v^{(1)}$$

ist. Die Bedingung

$$\delta \Psi = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial v^{(1)}} \delta v^{(1)} + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial v^{(2)}} \delta v^{(2)} = 0$$

führt dann zu der Gleichung

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial v^{(1)}} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial v^{(2)}}, \qquad (66)$$

oder

$$p^{(1)} = p^{(2)}.$$

In dieser Weise finden wir, daß, wie wir bereits wußten, der Druck in allen Phasen einen gemeinschaftlichen Wert p haben muß.

Zweitens können wir, indem wir alle v konstant lassen, eine unendlich kleine Menge irgend einer Komponente aus einer Phase in eine andere übergehen lassen. Tritt etwa die erste Phase die unendlich kleine Menge ω der ersten Komponente an die zweite Phase ab, so ändert sich $\psi^{(1)}$ um $-\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial m_1^{(1)}} \omega$ und $\psi^{(2)}$ um $\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial m_1^{(2)}} \omega$, so daß die Bedingung $\delta \Psi = 0$ auf die Relation

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial m_1^{(1)}} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial m_1^{(2)}} \qquad (67)$$

führt. Wir können füglich sagen, dies sei die Gleichgewichtsbedingung für die beiden ersten Phasen in Bezug auf die erste Komponente.

Eine ähnliche Gleichung ergibt sich für jedes Paar Phasen und für jede in beiden vorkommende Komponente, und man überzeugt sich leicht davon, daß man in dieser Weise wirklich alle Gleichgewichtsbedingungen erhält.

§ 44. Die Schlüsse, zu welchen wir gekommen sind, führen unmittelbar zu einer wichtigen Folgerung. Die Gleichgewichtsbedingung, immer in Bezug auf die erste Komponente, ist für die erste und dritte Phase

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial m_1^{(1)}} = \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial m_1^{(3)}}$$

und für die zweite und dritte

$$\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial m_1^{(2)}} = \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial m_1^{(3)}}.$$

Da nun aus diesen beiden Gleichungen die Beziehung (67) folgt, so können wir schließen: Wenn von drei Phasen, die eine gemeinschaftliche Komponente enthalten, die erste und dritte, und ebenso die zweite und dritte in Bezug auf diese Komponente miteinander im Gleichgewicht sind, dann besteht in Bezug auf diese auch Gleichgewicht zwischen der ersten und zweiten Phase. Den Beweis dieses Satzes kann man übrigens auch kurz in Worte fassen. Das Gleichgewicht zwischen der ersten und zweiten Phase erfordert, daß die freie Energie sich nicht ändert, wenn eine unendlich kleine Menge der betreffenden Komponente aus der ersten Phase in die zweite übergeht. Man kann sich nun vorstellen, daß dieser Übergang in zwei Schritten stattfindet, so nämlich, daß jene Menge zunächst aus der ersten Phase in die dritte hinübertritt, und dann aus dieser in die zweite Phase. Die freie Energie wird sich dabei nicht ändern, wenn sie bei beiden Schritten konstant bleibt.

Ein einfaches Beispiel hat man in Körpern, aus welchen Wasserdampf entweichen kann. Zwei Phasen, etwa ein wasserhaltiges Salz und eine gesättigte Lösung desselben, können, indem sie koexistieren, mit derselben Dampfmasse im Gleichgewicht sein.

§ 45. Will man das Gleichgewichtsproblem nach der Methode des thermodynamischen Potentials behandeln, so hat man von vornherein anzunehmen, daß der Druck in allen Teilen des Systems den gleichen Wert p hat und für jede Phase ζ als Funktion von p und T, sowie von $m_1, m_2, \ldots$, den Mengen der in derselben enthaltenen Komponenten aufzufassen. Indem man sich nun vorstellt, daß eine unendlich kleine Menge einer Komponente bei konstanten p und T aus einer Phase in eine andere übergeht, erhält man die Gleichgewichtsbedingungen in einer Gestalt, die genau mit (67) übereinstimmt. Zum Beispiel wird das Gleichgewicht zwischen der ersten und der zweiten Phase in Bezug auf die erste Komponente durch die Gleichung

$$\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial m_1^{(1)}} = \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial m_1^{(2)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

ausgedrückt.

Es läßt sich leicht verifizieren, daß diese Formel mit (67) identisch ist. Zu diesem Zwecke erinnern wir daran, daß wir für jede Phase ψ als eine Funktion von v, T, m_1, m_2, usw. betrachteten, und daß wir, bei der in der Formel (67) angedeuteten Differentiation von ψ nach einer der Größen m, nicht nur die übrigen m und die Temperatur, sondern auch das Volum v ungeändert lassen mußten; wir können das durch die Bezeichnung

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)_v \quad \ldots \ldots \ldots \quad (69)$$

ausdrücken. Dagegen war in diesem Paragraphen von Differentialquotienten bei konstantem Druck, also von

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial m}\right)_p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

die Rede.

Man kann nun aber auch in die Funktion ψ statt des Volums v den Druck p als unabhängige Variable einführen und den Differentialquotienten $\left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)_p$ bilden. Diese hängt mit dem Differentialquotienten (69) auf folgende Weise zusammen:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)_p = \left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)_v + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_m \left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)_p,$$

wo in $\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_m$ alle Mengen m als konstant betrachtet werden. Dieser Differentialquotient hat daher den Wert $-p$, und es wird

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)_p = \left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)_v - p\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)_p.$$

Anderseits ist

$$\zeta = \psi + pv$$

und also

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial m}\right)_p = \left(\frac{\partial \psi}{\partial m}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)_p.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt die Gleichheit von (69) und (70), so daß in den Gleichgewichtsbedingungen (67) und (68) genau dieselben Größen vorkommen.

§ 46. Es fragt sich jetzt, wie groß die Anzahl der voneinander unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen ist und was man aus denselben ableiten kann. Um das anzugeben, muß man beachten, daß bei gegebenem T die freie Energie einer Phase eine homogene Funktion ersten Grades von $v, m_1, m_2 \ldots$, und daß ebenso bei festgesetzten T und p das thermodynamische Potential eine Funktion derselben Art von $m_1, m_2 \ldots$ ist; man kann nämlich, wenn eine gewisse Phase gegeben ist, sich eine andere denken, für welche p und T dieselben Werte haben wie für jene erste, $v, m_1, m_2, \ldots, \psi$ und ζ aber n-mal größere

Werte. Daraus folgt, daß alle Differentialquotienten wie $\frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \psi}{\partial m}$ sich in den Verhältnissen

$$\frac{m_1}{v},\quad \frac{m_2}{v},\ldots, \qquad (71)$$

d. h. in den Partialdichten der einzelnen Komponenten ausdrücken lassen; ebenso hängen alle Differentialquotienten $\frac{\partial \zeta}{\partial m}$ von den Mischungsverhältnissen

$$\frac{m_2}{m_1},\quad \frac{m_3}{m_1},\ldots \qquad (72)$$

ab.

Wir haben ferner zu bedenken, daß es Phasen geben kann, in welchen eine der Komponenten gar nicht vorkommt und in welche sie, wie wir annehmen wollen, auch nicht aufgenommen werden kann; das Vorhandensein solcher Phasen wird offenbar die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen von der Art (67) oder (68) verringern.

Um nun gleich einen allgemeinen Fall zu behandeln, denken wir uns, die erste Komponente komme in k_1 Phasen, die zweite in k_2 Phasen, usw. vor. Dann haben wir, was das Gleichgewicht in Bezug auf die erste Komponente betrifft, $k_1 - 1$ voneinander unabhängige Gleichungen wie (67); ebenso $k_2 - 1$ Gleichungen, die das Gleichgewicht in Bezug auf die zweite Komponente ausdrücken, usw. Da es ferner $k - 1$ voneinander unabhängige Bedingungen wie (66) gibt, so haben wir im ganzen

$$a = k - 1 + k_1 - 1 + k_2 - 1 + \cdots + k_n - 1 = k + k_1 + k_2 + \cdots + k_n - (n+1)$$

Gleichungen zwischen den Differentialquotienten der ψ nach v und m. Enthält nun die erste Phase $n^{(1)}$ Komponenten, die zweite $n^{(2)}$ Komponenten usw., so beträgt die Anzahl der Partialdichten (71)

$$b = n^{(1)} + n^{(2)} + \cdots + n^{(k)},$$

wofür wir schreiben dürfen

$$b = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Man ersieht hieraus, daß man, wenn $k = n + 1$, d. h. wenn die Zahl der Phasen um eins größer ist als die Zahl der Komponenten, ebensoviele Gleichungen wie Unbekannte hat. Bei gegebener Temperatur sind dann alle Partialdichten vollständig bestimmt uud hat auch der Druck, der von diesen Größen abhängt, einen ganz bestimmten Wert. Die Temperatur kann hierbei beliebig gewählt werden; erhöht oder erniedrigt man sie, so stellt sich das Gleichgewicht bei entsprechend geändertem Druck und bei ebenfalls geänderter Zusammensetzung der Phasen ein.

Ist $k = n + 2$, dann wird $a = b + 1$. Den Gleichungen kann dann nicht bei einer beliebig gewählten Temperatur genügt werden; ein Gleich-

gewicht zwischen $n+2$ Phasen kann nur noch bei einer ganz bestimmten Temperatur, die man zugleich mit den Partialdichten aus den Gleichungen bestimmt, bestehen.

In dem System Wasser-Wasserdampf und ebenso in dem System Wasser-Eis ist $n=1$, $k=2$; ein Beispiel, in welchem $n=2$, $k=3$ ist, hat man, wenn ein wasserhaltiges Salz, eine Lösung dieses Salzes und Wasserdampf nebeneinander vorkommen. In diesen Fällen kann das Gleichgewicht bei verschiedenen Temperaturen, jedesmal unter bestimmtem Druck, realisiert werden. Dagegen können Wasser, Eis und Wasserdampf, oder zwei feste Hydrate eines Salzes, die Lösung und Wasserdampf nur bei einer Temperatur koexistieren.

Zu denselben Schlüssen gelangen wir auch, wenn wir das Problem mit Hilfe des thermodynamischen Potentials behandeln. Dann haben wir

$$a' = k_1 + k_2 + \cdots + k_n - n$$

Gleichungen wie (68) und diese enthalten außer p und T die Verhältnisse (72), deren es

$$b' = n^{(1)} - 1 + n^{(2)} - 1 + \cdots + n^{(k)} - 1 = k_1 + k_2 + \cdots + k_n - k$$

voneinander unabhängige gibt. Ist nun $k = n+1$, und also $a' = b' + 1$, dann können bei gegebener Temperatur sämtliche Verhältniszahlen, sowie der Druck aus den Gleichungen abgeleitet werden. Wenn die Zahl der Phasen die der Komponenten um 2 übersteigt, ist auch, da $a' = b' + 2$ wird, die Temperatur bestimmt.

Mit n Stoffen, die sich über weniger als $n+1$ Phasen verteilen, lassen sich bei gegebener Temperatur verschiedene Gleichgewichte herstellen, die sich durch den Druck, sowie durch die Dichte und die Zusammensetzung der einzelnen Phasen voneinander unterscheiden. Jedoch ist in solchen Fällen der Zustand vollständig bestimmt, wenn man T und p gewählt hat und außerdem die Gesamtmenge jeder Komponente kennt. Letzteres liefert nämlich n Gleichungen zwischen den Größen m, so daß man im ganzen

$$a' + n = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

Gleichungen hat, was mit der Zahl der Größen m, nämlich

$$n^{(1)} + n^{(2)} + \cdots + n^{(k)}$$

übereinstimmt.

Ebenso läßt sich zeigen, daß der Zustand eines aus weniger als $n+1$ Phasen bestehenden Systems bestimmt ist, sobald man weiß, wie viel von jeder Komponente es enthält und welchen Raum es bei gegebener Temperatur einnimmt.

§ 47. Im allgemeinen ist, da die Form der Funktionen ψ und ζ sich nicht oder nicht genau angeben läßt, die wirkliche Auflösung der

im Vorhergehenden vorkommenden Gleichungen nicht möglich. Man gelangt indes zu quantitativen und mit den Beobachtungen vergleichbaren Schlüssen, wenn man einen Gleichgewichtszustand mit einem anderen unendlich wenig davon verschiedenen Gleichgewichtszustand vergleicht.

Wir wollen annehmen, daß in dem einen Zustand, den wir den ersten nennen, $n+1$ aus n Komponenten A zusammengesetzte Phasen bei der Temperatur T und unter dem Druck p miteinander im Gleichgewicht sind. Der zweite Zustand möge sich erstens dadurch von diesem ersten unterscheiden, daß die Temperatur $T+\delta T$ und der Druck $p+\delta p$ ist, und zweitens dadurch, daß dem System eine kleine Menge einer neuen Komponente C hinzugefügt worden ist, die sich in irgend einer Weise über die Phasen verteilt, so daß diese $c^{(1)}, c^{(2)}, \dots c^{(n+1)}$ Einheiten davon enthalten. Dabei betrachten wir diese letzteren Größen, sowie δT und δp als unendlich klein von derselben Ordnung.

Wir schicken nun die Bemerkung voraus, daß man im ersten Fall, auf welchen sich die bis jetzt benutzten Buchstaben beziehen mögen, $n+1$ bestimmte Größen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots \alpha^{(n+1)}$ angeben kann, deren Verhältnisse durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{(1)} m_1^{(1)} + \alpha^{(2)} m_1^{(2)} + \cdots + \alpha^{(n+1)} m_1^{(n+1)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^{(1)} m_n^{(1)} + \alpha^{(2)} m_n^{(2)} + \cdots + \alpha^{(n+1)} m_n^{(n+1)} = 0 \end{array}\right\} \quad \dots \quad (73)$$

bestimmt werden, wobei der Fall nicht ausgeschlossen ist, daß einige dieser Koeffizienten den Wert Null haben.

Natürlich werden die Zahlen α teils positiv, teils negativ sein. Wir wollen annehmen, die r ersten seien positiv, die übrigen negativ. Dann ist, wie aus den Gleichungen (73) hervorgeht, eine Umsetzung möglich, bei welcher, ohne daß an der Temperatur, dem Druck, der Dichte und Zusammensetzung der einzelnen Phasen etwas geändert wird, die Menge der r ersten auf Kosten der übrigen zunimmt; wir bestimmen sie durch die Festsetzung, daß die Menge jeder Phase sich im Verhältnis von 1 zu $1+\alpha\omega$ ändern soll, wo α die der Phase entsprechende Zahl ist und ω eine unendlich kleine Konstante bedeutet.

Für jede Phase ändert sich nun auch das thermodynamische Potential in dem angegebenen Verhältnis. Das gesamte thermodynamische Potential des Systems ändert sich daher um den Betrag

$$(\alpha^{(1)}\zeta^{(1)} + \alpha^{(2)}\zeta^{(2)} + \cdots + \alpha^{(n+1)}\zeta^{(n+1)})\,\omega,$$

und da dieses verschwinden muß, so gilt

$$\alpha^{(1)}\zeta^{(1)} + \alpha^{(2)}\zeta^{(2)} + \cdots + \alpha^{(n+1)}\zeta^{(n+1)} = 0, \quad \dots \quad (74)$$

was man übrigens auch leicht aus den in § 45 angeführten Gleichgewichtsbedingungen, in Verbindung mit den Gleichungen (73) ableiten

kann. Man hat nur zu beachten, daß, wegen der in § 46 genannten Eigenschaft des thermodynamischen Potentials, für jede Phase

$$\zeta = m_1 \frac{\partial \zeta}{\partial m_1} + m_2 \frac{\partial \zeta}{\partial m_2} + \cdots + m_n \frac{\partial \zeta}{\partial m_n}$$

ist.

Was den zweiten Zustand anbelangt, so wollen wir die in den verschiedenen Phasen vorkommenden Mengen der Komponenten A, die unendlich wenig von $m_1^{(1)}, m_2^{(1)}$, usw. verschieden sind, mit $\overline{m}_1^{(1)}, \overline{m}_2^{(1)}$, usw. bezeichnen, und unter $\overline{\alpha}^{(1)}, \overline{\alpha}^{(2)}$, usw. $n+1$ von $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$, usw. unendlich wenig verschiedene Zahlen verstehen, die den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\alpha}^{(1)} \overline{m}_1^{(1)} + \overline{\alpha}^{(2)} \overline{m}_1^{(2)} + \cdots + \overline{\alpha}^{(n+1)} \overline{m}_1^{(n+1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\alpha}^{(1)} \overline{m}_n^{(1)} + \overline{\alpha}^{(2)} \overline{m}_n^{(2)} + \cdots + \overline{\alpha}^{(n+1)} \overline{m}_n^{(n+1)} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

genügen.

Wir wollen nun auch eine unendlich kleine Änderung des zweiten Zustandes bei konstanter Temperatur und Druck betrachten und ausdrücken, daß das thermodynamische Potential dabei konstant bleibt. Die Variation möge darin bestehen, daß in jeder Phase die Menge aller Komponenten A im Verhältnis $1 + \overline{\alpha}\omega$ geändert wird, die Menge von C aber bleibt wie sie war. Da hierbei für eine beliebige Phase die Mengen der zuerst genannten Komponenten um $\overline{\alpha}\omega\overline{m}_1, \overline{\alpha}\omega\overline{m}_2, \cdots \overline{\alpha}\omega\overline{m}_n$ variiert werden, so beträgt die Variation ihres thermodynamischen Potentials, das wir $\overline{\zeta}$ nennen wollen,

$$\overline{\alpha}\omega\left(\overline{m}_1 \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \overline{m}_1} + \overline{m}_2 \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \overline{m}_2} + \cdots + \overline{m}_n \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \overline{m}_n}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Wir benutzen nun den Umstand, daß $\overline{\zeta}$ eine homogene Funktion ersten Grades von $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n$ und c ist. Daraus folgt

$$\overline{m}_1 \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \overline{m}_1} + \overline{m}_2 \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \overline{m}_2} + \cdots + \overline{m}_n \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \overline{m}_n} + c \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial c} = \overline{\zeta},$$

so daß wir statt (76) schreiben können

$$\overline{\alpha}\omega\left(\overline{\zeta} - c \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial c}\right),$$

oder, mit Rücksicht auf (63),

$$\overline{\alpha}\omega\,(\overline{\zeta}_0 - RTc). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Hier ist $\overline{\zeta}_0$ der Wert, welchen das thermodynamische Potential haben würde, wenn die Komponente C gar nicht vorhanden wäre.

Indem wir nun für jede Phase einen Ausdruck wie (77) bilden, und die Änderung des gesamten thermodynamischen Potentials gleich Null setzen, erhalten wir

$$\Sigma(\overline{\alpha}\overline{\zeta}_0) - RT\,\Sigma(\overline{\alpha}c) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

§ 48. Diese Gleichung, in der sich die Summen auf die $n+1$ Phasen beziehen, haben wir jetzt mit der Formel (74), d. h. mit

$$\Sigma(\alpha\zeta) = 0$$

zu vergleichen. Zu diesem Zwecke subtrahieren wir diese letztere von (78). Dabei wollen wir, wie wir das, was p und T betrifft, bereits getan haben, die unendlich kleine Änderung, welche irgend eine Größe bei dem Übergang vom ersten zum zweiten Gleichgewichtszustand erleidet, durch ein vorgesetztes δ andeuten. Wir schreiben also δm für die Differenz $\bar{m} - m$ zwei einander entsprechender Werte von m, und ebenso $\delta\alpha$ für die Differenz $\bar{\alpha} - \alpha$, während wir unter $\delta\zeta$ die Differenz $\bar{\zeta}_0 - \zeta$ verstehen. Da c unendlich klein ist, so dürfen wir in dem letzten Gliede von (78) die Koeffizienten $\bar{\alpha}$ durch die entsprechenden α ersetzen. Infolgedessen wird das Resultat

$$\delta\Sigma(\alpha\zeta) - RT\Sigma(\alpha c) = 0$$

oder

$$\Sigma(\alpha\,\delta\zeta) + \Sigma(\zeta\,\delta\alpha) - RT\Sigma(\alpha c) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Hier ist nun die Variation $\delta\zeta$ näher zu betrachten. Der Wert $\bar{\zeta}_0$ unterscheidet sich dadurch von ζ, daß er sich auf die Werte $m_1 + \delta m_1$, $m_2 + \delta m_2, \ldots m_n + \delta m_n$, $T + \delta T$ und $p + \delta p$ der unabhängigen Variablen bezieht. Also ist

$$\delta\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial m_1}\delta m_1 + \frac{\partial\zeta}{\partial m_2}\delta m_2 + \cdots + \frac{\partial\zeta}{\partial m_n}\delta m_n + \frac{\partial\zeta}{\partial T}\delta T + \frac{\partial\zeta}{\partial p}\delta p,$$

wo wir unter $\frac{\partial\zeta}{\partial m_1}$ usw. die für den ersten Gleichgewichtszustand geltenden Werte verstehen wollen.

Bei der Substitution in (79) bedenken wir nun erstens, daß für jede Phase die Werte von $-\frac{\partial\zeta}{\partial T}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial p}$ der Entropie η und dem Volum v gleich sind, zweitens daß, wenn m die Menge einer beliebigen Komponente A ist, der Differentialquotient $\frac{\partial\zeta}{\partial m}$ für alle Phasen den gleichen Wert hat (§ 45), drittens, daß, wie aus (73) und (75) erhellt, für jede Komponente

$$\delta\Sigma(\alpha m) = 0 \text{ und also } \Sigma(\alpha\,\delta m) = -\Sigma(m\,\delta\alpha)$$

ist, und viertens, daß ζ eine homogene Funktion ersten Grades von $m_1, m_2, \ldots m_n$ ist. Durch Anwendung dieser Sätze bekommt man für $\Sigma(\alpha\,\delta\zeta)$ die Summe von

$$-\Sigma(\alpha\eta)\,\delta T + \Sigma(\alpha v)\,\delta p$$

und

$$\frac{\partial\zeta}{\partial m_1}\Sigma(\alpha\,\delta m_1) + \cdots + \frac{\partial\zeta}{\partial m_n}\Sigma(\alpha\,\delta m_n)$$

$$= -\frac{\partial\zeta}{\partial m_1}\Sigma(m_1\,\delta\alpha) + \cdots - \frac{\partial\zeta}{\partial m_n}\Sigma(m_n\,\delta\alpha)$$

$$= -\Sigma\left\{\left(m_1\frac{\partial\zeta}{\partial m_1} + \cdots + m_n\frac{\partial\zeta}{\partial m_n}\right)\delta\alpha\right\} = -\Sigma(\zeta\,\delta\alpha).$$

Die Gleichung (79) verwandelt sich schließlich in

$$-\Sigma(\alpha\eta)\,\delta T + \Sigma(\alpha v)\,\delta p - RT\Sigma(\alpha c) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

§ 49. Die hier auftretenden Summen lassen eine einfache Deutung zu. Man stelle sich (§ 47) die Umsetzung vor, bei welcher $\alpha^{(1)}$ Mal bzw. $\alpha^{(2)}, \ldots \alpha^{(r)}$ Mal die in dem ersten Gleichgewichtszustande vorhandenen Mengen der r ersten Phasen aus $-\alpha^{(r+1)}, \ldots -\alpha^{(n+1)}$ Mal die Mengen der übrigen Phasen entstehen. Bei dieser Umwandlung, die wir uns bei konstanter Temperatur und unter konstantem Druck vollzogen denken, nimmt das Volum des Systems um $\Delta v = \Sigma(\alpha v)$, die Entropie aber um $\Delta\eta = \Sigma(\alpha\eta)$ zu. Da die Umwandlung umkehrbar ist, so können wir auch sagen, $\Sigma(\alpha\eta)$ sei die mit T dividierte bei derselben zuzuführende Wärmemenge ΔQ. Was ferner $\Sigma(\alpha c)$ betrifft, so denken wir uns, daß auch in dem zweiten Fall, wenn das System die neue Komponente C enthält, die obengenannte durch die Zahlen α bestimmte Umwandlung stattfindet. Soll dabei in jeder Phase der Wert von c ungeändert bleiben, so muß dem System eine gewisse Menge der Komponente C hinzugefügt werden, und diese Menge ist eben durch $\Sigma(\alpha c)$ gegeben.

§ 50. Man kann aus der erhaltenen Gleichung verschiedene Folgerungen ableiten. Zunächst kann man annehmen, daß auch in dem zweiten Zustand die Komponente C fehlt; dann ergibt sich eine bekannte Relation zwischen den gleichzeitigen Änderungen von Temperatur und Druck bei dem Gleichgewicht von $n+1$ Phasen. Es ist das die Beziehung, welche z. B. zwischen der Dampfspannung und der Temperatur, oder zwischen dem Gefrierpunkt und dem Druck besteht.

Zweitens kann man den Einfluß, welchen eine kleine Menge der neuen Komponente C auf das Gleichgewicht hat, untersuchen, wobei man noch zur Vereinfachung entweder δT oder δp gleich Null setzen kann.

Wir lösen z. B. in einer Flüssigkeit A, die mit ihrem Dampf in Berührung steht, eine unendlich kleine Menge eines fremden Körpers C. Der Dampf sei die erste, die Flüssigkeit die zweite Phase, und die obengenannte Umwandlung bestehe darin, daß eine Masseneinheit der Flüssigkeit in Dampf übergeht. Enthalten nun der Dampf und die Flüssigkeit, auf je eine Masseneinheit der Substanz A, $n^{(1)}$ bzw. $n^{(2)}$ Einheiten des Körpers C, so ist $\Sigma(\alpha c) = n^{(1)} - n^{(2)}$; ferner ist, wenn die spezifischen Volume mit $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ bezeichnet werden, $\Sigma(\alpha v) = w^{(1)} - w^{(2)}$. Man hat daher, wenn $\delta T = 0$ gesetzt wird,

$$\delta p = RT\frac{n^{(1)} - n^{(2)}}{w^{(1)} - w^{(2)}}$$

und, wenn die gelöste Substanz nicht mit verdampft,

$$\delta p = -RT\frac{n^{(2)}}{w^{(1)} - w^{(2)}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

die bekannte Gleichung für die durch die Auflösung eines fremden Körpers bewirkte Dampfdruckerniedrigung.

Ebenso leicht ist es, die dadurch hervorgebrachte Veränderung des Gefrierpunktes aus der allgemeinen Gleichung abzuleiten. Wir nehmen jetzt an, die Substanz A befinde sich teils im festen, teils im flüssigen Zustand und nennen die feste Phase die erste. Diesmal setzen wir $\delta p = 0$. Ferner legen wir den Zeichen $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ eine ähnliche Bedeutung wie soeben bei, nur daß jetzt der Index (1) sich auf die feste Phase bezieht, und bezeichnen die in Arbeitseinheiten ausgedrückte Schmelzungswärme für die Masseneinheit mit r. Dann ist $\Sigma(\alpha\eta) = -\frac{r}{T}$ und

$$\delta T = \frac{R T^2}{r}\left(n^{(1)} - n^{(2)}\right).$$

Für den Fall, daß die Komponente C nicht in die feste Phase aufgenommen wird, vereinfacht sich die Formel zu

$$\delta T = -\frac{R T^2 n^{(2)}}{r}. \qquad (82)$$

Bemerkungen zu den vorhergehenden Betrachtungen.

§ 51. Das in dem letzten Abschnitt Besprochene veranlaßt uns noch zu einigen weiteren Erörterungen.

Zunächst möge daran erinnert werden, daß wir nur die Werte der freien Energie, bzw. der Entropie und des thermodynamischen Potentials für verschiedene Zustände ein und desselben Systems, nicht aber die Werte für ganz verschiedene Systeme miteinander vergleichen können. In Anbetracht dieses Umstandes kann es auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, daß in unseren Formeln Differentialquotienten wie $\frac{\partial \psi}{\partial m}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial m}$ vorkommen. Die freie Energie ψ einer Phase nach der Menge m einer darin vorkommenden Komponente differentiieren heißt nämlich, die Werte von ψ für zwei Phasen mit den Mengen m und $m + dm$, also für zwei nicht aus derselben Stoffmenge bestehende Systeme miteinander vergleichen.

Betrachtet man aber die Sache etwas genauer, dann sieht man leicht, daß wir in Wirklichkeit nur die Werte der freien Energie für verschiedene Zustände ein und derselben Stoffmenge miteinander verglichen haben; es handelte sich ja immer um die Änderung des Gesamtwertes von ψ für ein aus einigen Phasen zusammengesetztes System. Der Auffassung, daß dieser Wert sowohl vor als auch nach der vorgenommenen Variation sich als die Summe einer Anzahl sich auf die einzelnen Phasen beziehenden Glieder darstellen läßt, steht nichts im Wege.

Eine weitere Bemerkung, die nicht ohne Zusammenhang mit der vorhergehenden ist, betrifft den Umstand, daß in die Ausdrücke für die Energie ε und die Entropie η eines Systems immer additive Konstanten C und C' aufgenommen werden können, deren Wert unbestimmt bleibt, und daß infolgedessen zu irgend einem Wert der freien Energie immer das Glied $C - C'T$ addiert werden darf. Wir haben das Auftreten derartiger Glieder dadurch vermieden, daß wir den Zustand, in welchem die freie Energie den Wert Null haben soll, in bestimmter Weise festsetzten (vgl. § 36). Man wird sich indes ohne Mühe davon überzeugen, daß, wenn wir das nicht tun und also in die Gleichungen die unbestimmten Konstanten aufnehmen, diese aus allen Endformeln verschwinden; dies rührt daher, daß die Konstanten keinen Einfluß auf die Differenz der Werte von ψ für verschiedene Zustände eines Systems haben können.

§ 52. Wir müssen hier auch noch mit einigen Worten auf diejenigen Systeme zurückkommen, in denen eine Komponente nur in sehr kleiner Menge vorhanden ist. Das merkwürdige Gesetz für den osmotischen Druck hat zu der Ansicht geführt, ein Körper befinde sich in einer sehr verdünnten Lösung gewissermaßen im gasförmigen Zustand und man wird einer derartigen Annahme gewiß nicht entbehren können, wenn man sich die Aufgabe stellt, das Gesetz molekulartheoretisch abzuleiten. Der reinen Thermodynamik jedoch ist eine solche Auffassung fremd, und bei unseren Ableitungen brauchte denn auch von dem Zustande, in welchem sich die gelösten Körper befinden, gar nichts gesagt zu werden. Allerdings war insofern von einem gasförmigen Zustande die Rede, als wir uns vorstellen mußten, daß die Lösung durch fortgesetzte Vergrößerung des Volums in eine Mischung vollkommener Gase verwandelt werden kann. Die für die Eigenschaften einer verdünnten Lösung maßgebenden Größen rühren eben von denjenigen Teilen der freien Energie eines Gasgemisches her, die sich auf eine in geringer Menge vorhandene Komponente beziehen (vgl. § 41).

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß in dieser Weise Erscheinungen, die wir bei flüssigen Systemen beobachten, mit Eigenschaften zusammenhängen, die in weit entfernten Zuständen derselben bestehen. Befremden kann uns das aber nicht, weil es in den Grundlagen der Thermodynamik eingeschlossen liegt. Wenn wir für einen umkehrbaren Kreislauf den Satz (4) aussprechen, so drücken wir schon dadurch aus, daß zwischen Größen, die sich auf verschiedene Zustände eines Systems beziehen, ein gewisses Band besteht. Wären die Verhältnisse, von denen der Wert eines jeden dQ abhängt, in der einen Hälfte des Kreislaufs ganz unabhängig von den Verhältnissen, die in der anderen Hälfte sich geltend machen, so könnte offenbar die Gleichung nicht allgemein richtig sein. Der Zusammenhang kann natürlich nur darin wurzeln, daß der Körper,

während er den Kreisprozeß durchläuft, im Grunde genommen, seine Natur nicht ändert, molekulartheoretisch gesprochen darin, daß die kleinsten Teilchen, aus welchen wir uns den Körper zusammengesetzt denken, nicht in dem einen Zustande ganz andere Kräfte aufeinander ausüben, oder sich ganz anders verhalten als in dem anderen. In diesem Sinne dürfen wir sagen, daß, wenn ein System sich in dem Zustand eines vollkommenen Gases befunden hat, die Spuren der Eigenschaften, die es darin hatte, sich auch dann noch zeigen müssen, nachdem es zu einer Flüssigkeit kondensiert worden ist.

Bekanntlich hat man Anlaß gefunden, einige Körper, namentlich die Salze, in sehr verdünnter Lösung als dissoziiert zu betrachten; dadurch macht man es sich erklärlich, daß für diese Körper die in vielen Formeln vorkommende Größe RTc (vgl. § 41) einen doppelt so großen Wert hat, als man nach dem Molekulargewicht erwarten sollte. Streng genommen braucht man indes in solchen Fällen nur für den sehr verdünnten gasförmigen Zustand eine Dissoziation anzunehmen, die zu einem größeren Wert von RTc führt, und es ist in einer thermodynamischen Theorie von dem Zustande des in einer flüssigen Lösung befindlichen Körpers gar nicht die Rede. Hiermit soll nicht gesagt sein, daß die Dissoziation nicht bestehe; abgesehen von anderen Erwägungen, kann man schwerlich annehmen, daß die Ursachen, welche in jenem gasförmigen Zustande eine Dissoziation herbeiführen, nach der Verflüssigung ganz verschwunden seien.

§ 53. Den oben hervorgehobenen Zusammenhang zwischen den Eigenschaften eines Körpers in verschiedenen Zuständen hat man auch in anderen Fällen im Auge zu behalten. Wenn man z. B., nach dem Vorgang von van der Waals, die freie Energie einer Mischung in der § 39 geschilderten Weise berechnet und dabei die Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \qquad (83)$$

in der jetzt a und b von dem Mischungsverhältnis abhängen, zugrunde legt, so verkettet man die freie Energie in dem betrachteten Zustande mit den Werten von p bei allen größeren Volumen. Ist nun b mit dem Volum veränderlich, etwa infolge einer von der Dichte abhängigen Dissoziation oder Assoziation von Molekülen, so hat man in der Gleichung (83) und bei der Berechnung des Integrals $\int p\,dv$, unter diesem Koeffizienten den zu dem jedesmaligen v passenden Wert zu verstehen. Es kommt also am Ende nicht bloß auf die Anzahl der Moleküle in dem zu betrachtenden Zustand, sondern auch auf die Molekülzahl in weit davon entfernten Zuständen an, und es ist im allgemeinen nicht gerechtfertigt, ohne weiteres in dem Integral $\int p\,dv$ für b den Wert zu

nehmen, welcher dem untersuchten Zustande, also der einen Grenze des Integrals, entspricht.

Graphische Darstellungen.

§ 54. Die Behandlung der Gleichgewichtsprobleme läßt sich durch geeignete graphische Darstellungen sehr veranschaulichen und manche Frage kann mit diesem Mittel fast ohne Rechnung gelöst werden. Das Wichtigste hiervon möge in diesem Abschnitt kurz besprochen werden.

Wir beschränken uns dabei auf diejenigen Fälle, in denen man es mit zwei oder drei Komponenten zu tun hat, und wählen für jede dieser letzteren ein Grammolekül zur Einheit. Kommen in der betrachteten Substanzmenge, sei diese in dem Zustande einer homogenen Phase, oder in eine gewisse Anzahl von Phasen geteilt, m_1 und m_2, bzw. m_1, m_2 und m_3 Grammoleküle der einzelnen Komponenten vor, so wollen wir sagen, es seien im ganzen $m_1 + m_2$, bzw. $m_1 + m_2 + m_3$ Grammoleküle vorhanden. Wir fassen speziell Phasen ins Auge, für welche diese Summen den Wert Eins haben, und reden dann kurz von einem Grammolekül der Phase. Mit n Grammolekülen derselben meinen wir dann eine n-fache Menge von derselben Beschaffenheit.

Auch bei einem aus verschiedenen Phasen bestehenden System, einem „Phasenkomplex", reden wir von einem Grammolekül; wir verstehen darunter eine solche Menge, daß die Summe der Anzahlen μ_1, μ_2, usw. von Grammolekülen, die von den einzelnen Phasen vorhanden sind, den Wert Eins hat. Multipliziert man dann ferner alle diese Zahlen mit einem beliebigen Faktor n, so bekommt man n Grammmoleküle des Komplexes. Man überzeugt sich leicht davon, daß, wenn nach diesen Festsetzungen ein Grammolekül eines beliebigen Phasenkomplexes im ganzen m_1 und m_2, bzw. m_1, m_2 und m_3 Grammoleküle der Komponenten enthält, die Summe $m_1 + m_2$, bzw. $m_1 + m_2 + m_3$ gleich Eins ist. Auch ist klar, daß die Vereinigung von μ_1 Grammmolekülen irgend eines Systems mit μ_2 Grammolekülen eines zweiten usw. $\mu_1 + \mu_2 +$ usw. Grammoleküle liefert.

Wenn wir uns des thermodynamischen Potentials bedienen, so beruht die graphische Darstellung darauf, daß wir, bei bestimmten von vornherein gewählten Werten von p und T, für jede Phase und jeden Phasenkomplex die Zusammensetzung, sowie das auf ein Grammolekül bezogene thermodynamische Potential durch die Lage eines Punktes ausdrücken.

§ 55. Im Fall zweier Komponenten können wir $m_2 = x$ und also $m_1 = 1 - x$ setzen und in einer Ebene die Werte von x und ζ durch

die Koordinaten darstellen. Dabei legen wir die x-Achse $O_1 O_2$ (Fig. 5) horizontal und die ζ-Achse nach oben; wir nehmen an, daß alle in Betracht kommenden Werte von ζ positiv sind, was sich immer durch geeignete Wahl der additiven Konstante erreichen läßt. Ein System, sei es eine Phase oder ein Phasenkomplex, dessen Zusammensetzung durch die Lage des Punktes a und dessen thermodynamisches Potential durch die Senkrechte aA dargestellt wird, soll als das System A oder a bezeichnet werden; A nennen wir den ζ-Punkt desselben. Der Punkt a bleibt natürlich auf eine Strecke $O_1 O_2$, deren Länge Eins ist, beschränkt; O_1 entspricht der ersten, O_2 der zweiten Komponente.

Fig. 5.

Es besteht nun folgender Satz. Wenn man μ Grammoleküle der Phase oder des Komplexes a und $1 - \mu$ Grammoleküle von b zusammenbringt, so liegt der Punkt d, welcher die Zusammensetzung des so erhaltenen Systems angibt, in solcher Lage zwischen a und b, daß

$$ad : bd = (1 - \mu) : \mu \qquad (84)$$

Mit anderen Worten, d ist der Schwerpunkt zweier materieller Punkte mit den Massen μ und $1 - \mu$, die wir uns in a und b denken.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Erwägung, daß nach (84)

$$O_1 d = \mu \times O_1 a + (1 - \mu) \times O_1 b$$

ist, welche Gleichung ausdrückt, daß die in dem System enthaltene Menge der zweiten Komponente wirklich durch die Länge von $O_1 d$ gegeben ist.

Umgekehrt kann sich, was die Mengen der Komponenten betrifft, ein System, dessen Zusammensetzung durch den Punkt d dargestellt wird, immer in zwei den Punkten a und b entsprechende Systeme teilen; aus einem Grammolekül von d entstehen dabei $\frac{bd}{ab}$ Grammoleküle von a und $\frac{ad}{ab}$ Grammoleküle von b.

Es ist weiter folgendes zu bemerken. Wenn wir μ Grammoleküle von a und $1 - \mu$ Grammoleküle von b ohne Änderung ihres Zustandes nebeneinander stellen, so daß ein Komplex (a, b) entsteht, dann wird das thermodynamische Potential des Ganzen durch die Strecke dD dargestellt, welche die Verbindungslinie AB von der in d errichteten Senkrechten abschneidet; die Länge dieser Strecke ist nämlich

$$dD = \mu \times aA + (1 - \mu) \times bB.$$

Man kann daher auch sagen: Der Punkt D, welcher Zusammensetzung

und thermodynamisches Potential des Komplexes $(\mu a, (1-\mu) b)$ angibt, liegt auf der Verbindungslinie AB in solcher Lage, daß

$$AD : BD = (1-\mu) : \mu;$$

er fällt mit dem Schwerpunkt zweier in A und B gestellter Massen μ und $1-\mu$ zusammen.

Oft können nun die Substanzmengen, welche in dem Komplex D vorhanden sind, auch in anderen Zuständen vorkommen, indem sie z. B. eine homogene Mischung bilden, oder in anderer Weise als in jenem Komplex über verschiedene Phasen verteilt sind. Der Punkt, welcher die Zusammensetzung angibt, behält dabei die Lage d; der ζ-Punkt aber kann höher oder tiefer als D liegen.

§ 56. Wir wollen uns im flüssigen Zustande die beiden Komponenten in jedem Verhältnis gemischt vorstellen, so daß x von 0 bis 1 gehen kann; die ζ-Punkte der flüssigen Phasen liegen demnach auf einer ununterbrochenen Kurve (der ζ-Kurve), wie $PCDQ$ in Fig. 6. Dabei geben die Anfangs- und Endordinaten O_1P und O_2Q die Werte des thermodynamischen Potentials der einzelnen Komponenten im flüssigen Zustande an. Auf die ganz nahe an P und Q liegenden Teile der Kurve kann man die Formeln anwenden, die sich früher für Systeme, in welchen eine Komponente in sehr kleiner Menge vorkommt, ergeben haben. Man kann daraus schließen, daß die Kurve von P an fällt, und nach Q hin steigt, und zwar berührt sie in P und Q die Senkrechte O_1P bzw. O_2Q.

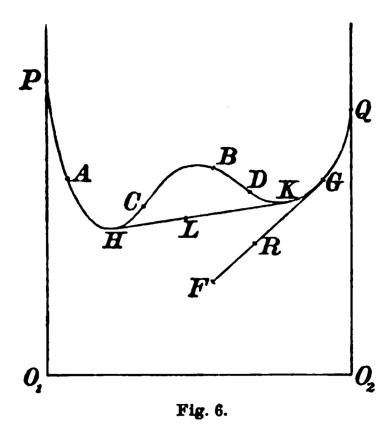


Fig. 6.

Außer den flüssigen Phasen können nun auch feste Phasen, etwa in kristallisiertem Zustande auftreten; diesen schreiben wir eine ganz bestimmte Zusammensetzung zu, so daß jeder festen Phase ein isolierter Punkt, wie F, entspricht.

§ 57. a) Stabile und labile flüssige Phasen. Wenn in irgend einem Punkte A die ζ-Kurve nach unten konvex ist, so liegt, wenn man zwei in kleiner Entfernung links und rechts von dieser Stelle liegende Punkte A' und A'' (in der Figur nicht angegeben) durch eine Sehne verbindet, der Punkt A unterhalb dieser letzteren. Das thermodynamische Potential ist daher für die homogene Phase A kleiner als für einen Komplex (A', A''), welcher dieselbe Zusammensetzung hat. Bringt man die beiden Phasen A' und A'' zusammen, so können sie sich also unter Abnahme des thermodynamischen Potentials zu der

homogenen Phase A vermischen. Dagegen kann diese letztere sich nicht in zwei Phasen, deren ζ-Punkte rechts und links von A liegen, teilen, weil das mit einer Zunahme des thermodynamischen Potentials verbunden wäre.

Anders, wenn, wie in unserer Figur im Punkte B, die ζ-Kurve die konkave Seite nach unten wendet. Sind wieder B' und B'' naheliegende Punkte links und rechts von B, dann liegt jetzt B höher als die Verbindungslinie $B'B''$. Daraus schließen wir, daß sich B' und B'' gewiß nicht zu der homogenen Phase B vereinigen werden. Im Gegenteil kann jetzt B unter Verminderung des thermodynamischen Potentials in die Phasen B' und B'' zerfallen.

Das Gesagte drücken wir dadurch aus, daß wir das Gleichgewicht in einem Zustande wie A stabil, in dem Zustande B aber labil nennen. Eine Phase ist also stabil oder labil, je nachdem der Differentialquotient

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

positiv oder negativ ist.

In der Nähe der Punkte P und Q ist nun die Kurve jedenfalls nach unten konvex. Ist sie es auch an allen zwischenliegenden Stellen, dann entspricht jedem Werte von x eine stabile flüssige Phase; die beiden Komponenten sind dann wirklich in jedem Verhältnis mischbar. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß ein gewisser Teil der ζ-Kurve wie in unserer Figur, die konkave Seite nach unten wendet. Dann sind die zugehörigen Phasen labil; sie können nicht dadurch entstehen, daß man die flüssigen Komponenten zusammenbringt.

Die Grenze zwischen den stabilen und den labilen Phasen wird in diesem Fall durch die Inflexionspunkte C und D angegeben.

b) Gleichgewicht zwischen einer festen und einer flüssigen Phase. Die feste Phase F sei mit der flüssigen G in Berührung und R sei der ζ-Punkt für den aus beiden bestehenden Komplex. Beim Übergang einer unendlich kleinen Menge der festen Phase in die flüssige muß sich das thermodynamische Potential nicht ändern; der Punkt R muß also an seiner Stelle bleiben. Infolge des Überganges wird sich die Zusammensetzung der Flüssigkeit ein wenig ändern; der ζ-Punkt derselben wird also nach einem neuen unendlich wenig von G entfernten Punkte G' der Kurve verschoben. Da sich nun R auf einen Komplex (F, G') beziehen muß und also auf der Verbindungslinie FG' liegt, so liegen die Punkte F, G und G' in gerader Linie. Es wird also, da GG' ein Element der ζ-Kurve ist, diese Kurve von der Verbindungslinie FG berührt. Um daher die flüssigen Phasen zu finden, die mit der festen F koexistieren können, hat man nur aus F eine Tangente an die ζ-Kurve zu legen.

In manchen Fällen, von denen unsere Figur ein Beispiel gibt, kann man aus F zwei Berührungslinien ziehen: dann gibt es zwei flüssige Phasen, die mit der festen F im Gleichgewicht sein können.

c) Gleichgewicht zwischen zwei flüssigen Phasen. Es seien H und K die beiden nebeneinander bestehenden Phasen, L der Punkt der Verbindungslinie HK, der den Komplex (H, K) darstellt, H' und K' zwei in der Figur nicht angegebene Punkte der Kurve, deren einer unendlich wenig von H, der andere aber unendlich wenig von K entfernt ist. Man kann, was die Mengen der Bestandteile betrifft, den Komplex L der Phasen H und K in einen Komplex (H', K') umwandeln, und da es sich hierbei um eine unendlich kleine Variation handelt, so muß die Höhe des Punktes L ungeändert bleiben. Folglich muß die Verbindungslinie $H'K'$ durch den Punkt L gehen. Man kann nun ferner dieselben Betrachtungen wiederholen, indem man L durch einen anderen Punkt L' der Verbindungslinie HK ersetzt, die Punkte H' und K' aber an ihrer Stelle läßt. Wir schließen somit, daß $H'K'$ auch den Punkt L' enthalten muß, und dies ist nur möglich, wenn HK mit $H'K'$ zusammenfällt, d. h. wenn HK die ζ-Kurve sowohl in H als auch in K berührt.

Man findet daher die flüssigen Phasen, welche koexistieren können, dadurch, daß man an die Kurve eine Doppeltangente legt. Offenbar ist dies nur möglich, wenn, wie in Fig. 6, die Kurve in einem Teil ihres Verlaufs die konkave Seite nach unten wendet, also bei Flüssigkeiten, die nicht in jedem Verhältnis mischbar sind.

d) Wenig stabile Phasen. In Fig. 6 sieht man, daß die Inflexionspunkte C und D oberhalb der Doppeltangente HK liegen. Die Phasen, welche den zwischen H und C, sowie den zwischen D und K liegenden Punkten der Kurve entsprechen, sind nun insofern als stabil anzusehen, als sie nicht in zwei Phasen von unendlich wenig verschiedener Zusammensetzung zerfallen können. Dennoch sind diese Zustände wenig beständig. Eine Phase zwischen H und C z. B. kann unter Verkleinerung des thermodynamischen Potentials in einen Komplex (H, K) übergehen, und dies wird tatsächlich geschehen, sobald eine gewisse Menge, wie klein sie auch sei, einer in der Nähe von K liegenden Phase vorhanden ist.

e) Gleichgewicht zwischen drei Phasen. Bei beliebig gewählten Werten von p und T kann ein solches nicht bestehen. Hält man aber die Temperatur fest und erhöht oder erniedrigt man den Druck, so erleidet die Figur eine allmähliche Formveränderung, und es ist nun möglich, daß, wenn ein bestimmter Druck erreicht ist, der ζ-Punkt einer festen Phase in die Doppeltangente an die ζ-Kurve der flüssigen Phasen fällt. Dann kann der feste Körper mit zwei flüssigen Gemischen im Gleichgewicht sein.

Ebenso können bei beliebiger Temperatur, aber unter einem bestimmten davon abhängigen Druck, zwei feste Phasen mit einer flüssigen koexistieren; die hierzu erforderliche Bedingung besteht darin, daß die Verbindungslinie der den beiden ersteren entsprechenden ζ-Punkte die ζ-Kurve berührt.

Daß diese Ergebnisse mit dem in § 46 Gesagten in Übereinstimmung sind, braucht nicht weiter erklärt zu werden.

§ 58. Wir können jetzt zu den aus drei Komponenten bestehenden Systemen übergehen. Wollen wir auch für diese die Zusammensetzung und das thermodynamische Potential durch die Lage eines Punktes darstellen, so müssen wir eine räumliche Konstruktion benutzen. Statt der Grundlinie $O_1 O_2$ in Fig. 5 wählen wir jetzt eine Grundebene, die wir horizontal legen wollen; wegen der Beziehung $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ kann die Zusammensetzung jeder Phase und jedes Phasenkomplexes durch zwei Variablen bestimmt und also durch die Lage eines Punktes in der Ebene veranschaulicht werden. Das kann noch in sehr verschiedener Weise geschehen und für unseren Zweck genügt es, festzusetzen, daß m_1, m_2, m_3 lineare Funktionen der Koordinaten x und y des betreffenden Punktes und also umgekehrt auch x und y lineare Funktionen von m_1, m_2, m_3 sein sollen.

Sind nun (Fig. 7) a und b die Punkte in der Grundebene, welche zwei Phasen oder Phasenkomplexen entsprechen, und bringen wir μ Grammoleküle des ersten und $1 - \mu$ Grammoleküle des zweiten Systems zusammen, so wird die Zusammensetzung des neuen Systems durch einen Punkt d auf der Verbindungslinie ab dargestellt, und zwar ist d der Schwerpunkt zweier in a und b gedachter Massen von der Größe μ und $1-\mu$, so daß

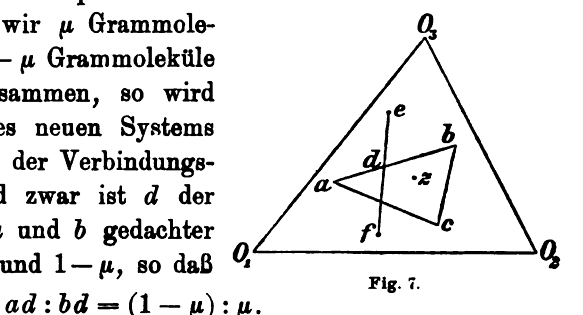


Fig. 7.

$$ad : bd = (1 - \mu) : \mu.$$

Der Beweis geht sofort daraus hervor, daß, eben weil die Koordinaten lineare Funktionen von m_1, m_2, m_3 sind, die Koordinaten des Punktes d, welcher dem neuen Komplex entspricht, in folgender Weise mit den Koordinaten von a und b zusammenhängen müssen:

$$x_d = \mu x_a + (1 - \mu) x_b, \quad \text{usw.}$$

Umgekehrt kann sich ein System, dessen Zusammensetzung durch die Lage von d bestimmt ist, was die Menge der Komponenten anlangt, in die Systeme a und b teilen, wobei a und b in beliebigen Entfernungen von d gewählt werden können. Es verdient nun besondere Beachtung, daß die Systeme, in welche d zerfallen kann, keineswegs

auf die eine Linie *ab* beschränkt sind. Zieht man nämlich durch *d* irgend eine andere Linie und nimmt man auf dieser zwei Punkte *e* und *f* auf verschiedenen Seiten von *d* an, so kann das System *d* sich auch in die Systeme *e* und *f* spalten.

Wir betrachten ferner drei Phasen oder Phasenkomplexe *a, b, c*, von denen μ_a, μ_b, μ_c Grammoleküle zusammengebracht werden, derart, daß $\mu_a + \mu_b + \mu_c = 1$. Wegen der linearen Beziehungen zwischen den Koordinaten und den Größen *m* hat der Punkt, welcher die Zusammensetzung des erhaltenen Systems darstellt, die Koordinaten

$$\mu_a x_a + \mu_b x_b + \mu_c x_c \quad \text{und} \quad \mu_a y_a + \mu_b y_b + \mu_c y_c;$$

er fällt also mit dem Schwerpunkte dreier in *a, b, c* gedachter Massen μ_a, μ_b, μ_c zusammen. Daraus folgt, daß allen Systemen, welche man aus *a, b* und *c* zusammensetzen kann, Punkte entsprechen, die in der Grundebene im Inneren, bzw. auf dem Umfang des Dreiecks *abc* liegen. Auch sieht man leicht, daß, wenn *z* ein beliebiger Punkt innerhalb dieser Figur ist, ein System *z* sich in ganz bestimmter Weise in die drei Systeme *a, b, c* teilen kann.

Den einzelnen Komponenten werden bei der angenommenen Beziehung zwischen m_1, m_2, m_3 und den Koordinaten gewisse Punkte O_1, O_2, O_3 der Grundebene entsprechen, und offenbar bleibt nun die graphische Darstellung auf den dreieckigen Teil $O_1 O_2 O_3$ der Grundebene, ebenso wie früher (Fig. 6) auf den Teil $O_1 O_2$ der Grundlinie beschränkt.

§ 59. In jedem Punkte des genannten Teils der Grundebene errichten wir jetzt vertikal nach oben eine Senkrechte, deren Länge das (positiv vorausgesetzte) thermodynamische Potential des betreffenden Systems angibt. Wir erhalten dadurch eine Raumfigur, mit der wir, obgleich die Verhältnisse jetzt etwas verwickelter werden, in ganz ähnlicher Weise operieren können wie früher (§ 57) mit einer ebenen Figur. Die Endpunkte der Senkrechten nennen wir wieder ζ-Punkte; wir bezeichnen sie mit großen und ihre Projektionen auf die Grundebene mit den entsprechenden kleinen Buchstaben. Daß nun der ζ-Punkt des Komplexes, der aus der Nebeneinanderlagerung von μ_a, μ_b, μ_c, usw. Grammmolekülen beliebiger Systeme *A, B, C* usw. entsteht, wobei $\Sigma\mu = 1$ sein soll, mit dem Schwerpunkte der Punkte *A, B, C* usw., wenn in diesen die Massen $\mu_a, \mu_b, \mu_c, \ldots$ liegen, zusammenfällt, ergibt sich sofort. Alle aus zwei Systemen *A* und *B*, bzw. aus drei Systemen *A, B* und *C* gebildeten Komplexe haben ihre ζ-Punkte in der Verbindungslinie *AB*, bzw. in der Ebene *ABC*. Endlich liegen die ζ-Punkte zweier Systeme, die aus derselben Stoffmenge bestehen, immer in einer Senkrechten zur Grundebene und, was die Möglichkeit der Verwandlung des einen in

das andere betrifft, kommt es nur darauf an, ob der eine ζ-Punkt höher oder tiefer als der andere liegt.

Wir wollen nun annehmen, daß im flüssigen Zustande die drei Komponenten in allen möglichen Verhältnissen miteinander vermischt sein können. Der Inbegriff der ζ-Punkte aller flüssigen Phasen bildet dann eine gewisse krumme Fläche, die ζ-Fläche, die das Dreieck $O_1 O_2 O_3$ zur horzontalen Projektion hat. Sie ist begrenzt von drei Kurven in den durch die Dreiecksseiten gelegten vertikalen Ebenen, und zwar sind das die ζ-Kurven für die aus je zwei Bestandteilen bestehenden flüssigen Gemische.

Aus dem Umstand, daß (vgl. § 41) der Wert von $\frac{\partial \zeta}{\partial m}$ unendlich groß wird, wenn das betreffende m sich der Null nähert, läßt sich schließen, daß die ζ-Fläche sich in den genannten Grenzkurven an die vertikalen Ebenen anschmiegt, und zwar steigt sie an allen Stellen, wenn man sich der Randkurve nähert.

§ 60. a) Stabile und labile flüssige Phasen. Die Frage, ob sich eine flüssige Phase D in zwei andere, ihr unendlich nahe liegende spalten oder umgekehrt aus diesen entstehen kann, ist in ähnlicher Weise zu beantworten wie früher; nur ist jetzt zu beachten, daß, wenn D gegeben ist, die Punkte in der Grundebene, welche jenen zwei Phasen entsprechen, auf verschiedenen durch d gehenden Linien liegen können. Man überzeugt sich nun ohne Mühe davon, daß eine Phase D sich im stabilen Gleichgewicht befindet, wenn alle Schnitte der ζ-Fläche mit vertikalen durch D gelegten Ebenen in diesem Punkte nach unten konvex sind; als labil ist das Gleichgewicht zu betrachten, sobald einige dieser Schnitte oder alle die konkave Seite nach unten wenden.

Die Bedingung für stabiles Gleichgewicht läßt sich auch so ausdrücken, daß man sagt, die ζ-Fläche müsse in der Nähe des betrachteten Punktes D oberhalb der Berührungsebene in diesem Punkte liegen.

Wir bezeichnen mit x, y, ζ die Koordinaten des Punktes D, mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $\zeta + \Delta \zeta$ die Koordinaten eines benachbarten Punktes E der ζ-Fläche, mit $\zeta + \Delta' \zeta$ aber den Wert von ζ in dem Punkte E', wo die durch D gelegte Berührungsebene die durch E gezogene Senkrechte schneidet. Indem wir uns auf Größen beschränken, die in Bezug auf Δx und Δy von der zweiten Ordnung sind, können wir setzen

$$\Delta \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Delta y + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \Delta y^2$$

und

$$\Delta' \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Delta y.$$

Die Bedingungen dafür, daß für alle Werte von Δx und Δy der

Punkt E höher als E' liegt, daß also die Differenz $\Delta\zeta - \Delta'\zeta$ positiv ist, lauten

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

von welchen Ungleichungen übrigens die erste oder die zweite in den beiden anderen involviert ist.

Die durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

bestimmte Linie, welche man die Spinodalkurve der Fläche nennt, trennt ein Gebiet stabiler von einem Gebiet labiler Phasen.

Sobald in einem Teil der ζ-Fläche die Bedingungen für die Stabilität nicht erfüllt sind, und also jedenfalls einige Vertikalschnitte nach unten konkav sind, können wir füglich sagen, es bestehe in der Fläche eine Falte. Eine solche kann entweder eine oder mehrere Grenzkurven erreichen oder auf den mittleren Teil der Fläche beschränkt bleiben.

b) Gleichgewicht zwischen einer festen und einer flüssigen Phase. Führt man durch die räumliche Figur, die wir uns jetzt vorstellen, einen vertikalen Schnitt, dann gelten für diese alle Betrachtungen, deren wir uns früher bedient haben. Daraus folgt, daß eine feste Phase F mit einer flüssigen G im Gleichgewicht sein kann, wenn die Verbindungslinie FG die ζ-Fläche berührt. Dieser Bedingung genügen jetzt unendlich viele flüssige Phasen, nämlich alle diejenigen, deren ζ-Punkte auf der Kurve liegen, in welcher die Fläche von einem Kegel, dessen Spitze in F liegt, berührt wird.

Zwei feste Phasen F_1 und F_2 können mit einer flüssigen G koexistieren, deren ζ-Punkt da liegt, wo die ζ-Fläche von einer durch die Verbindungslinie F_1F_2 gelegten Ebene berührt wird.

c) Gleichgewicht zwischen zwei flüssigen Phasen. Wir fassen zunächst den Durchschnitt mit der durch die ζ-Punkte H und K gelegten vertikalen Ebene ins Auge und beweisen ähnlich wie in § 57, c, daß, wenn Gleichgewicht zwischen H und K bestehen soll, die Linie HK sowohl in H als auch in K Berührungslinie sein muß. Es seien ferner in der Grundebene (Fig. 8) h und k die Projektionen von H und K, l der Punkt, welcher dem Komplexe (H, K) entspricht und h', k' zwei unendlich wenig von h, k entfernte Punkte, die mit l in einer Geraden liegen; H' und K' seien die in h' und k' projizierten Punkte der ζ-Fläche. Der aus H und K bestehende Komplex kann sich nun durch eine unendlich kleine Zustandsänderung in einen Komplex (H', K') verwandeln, der in der Grundebene gleich-

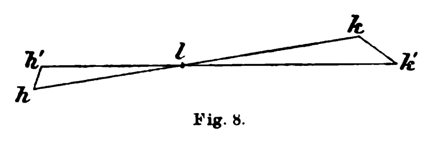


Fig. 8.

falls durch den Punkt l angedeutet wird. Da sich hierbei das thermodynamische Potential nicht ändern soll, so muß die Linie $H'K'$ durch den Punkt L gehen; die vier Punkte H, K, H', K' liegen daher in einer Ebene, und zwar berührt diese die ζ-Fläche sowohl in H als auch in K, da HK eine Berührungslinie ist und HH', KK' Linienelemente in der ζ-Fläche sind.

Bedingung für die Koexistenz zweier flüssigen Phasen ist also, daß die in den betreffenden Punkten an die Fläche gelegten Berührungsebenen zusammenfallen, mit anderen Worten, um zwei koexistierende flüssige Phasen zu finden, hat man nur eine Doppelberührungsebene an die ζ-Fläche zu legen.

Offenbar ist das nur möglich, wenn die Fläche eine Falte hat. Nachdem man in diesem Fall ein Paar Phasen gefunden hat, die nebeneinander bestehen können, erhält man die übrigen dadurch, daß man die Doppelberührungsebene über die Fläche rollen läßt. Dabei kommt man, wenn die Falte sich bis an einen der Flächenränder erstreckt, schließlich zu einem Gleichgewicht zwischen zwei nur zwei Komponenten enthaltenden Phasen. Geht die Falte nicht so weit, so fallen bei einer bestimmten Lage der Ebene die beiden Berührungspunkte in einen zusammen, was physikalisch gesprochen bedeutet, daß die beiden koexistierenden Phasen sich, was Zusammensetzung und sonstige Eigenschaften betrifft, fortwährend einander nähern und schließlich gleich werden. Den Punkt der ζ-Fläche, wo das Zusammenfallen stattfindet, nennt man einen Faltenpunkt.

§ 61. Es möge schließlich noch die Methode erwähnt werden, die van der Waals in seinen wichtigen Untersuchungen über gasförmige und flüssige Mischungen angewandt hat. Als Grundlage derselben diente die Theorie der freien Energie, und es erwies sich, obgleich nur zwei Komponenten vorausgesetzt wurden, eine graphische Darstellung im Raum als sehr nützlich. Hält man sich nämlich an eine bestimmte Temperatur, so hängt ψ für das Grammolekül jeder homogenen Phase von der Größe x ab, welche (vgl. § 55) die Zusammensetzung bestimmt, und außerdem von dem Volum v. Es wurden daher die Werte von x und v als Koordinaten in einer horizontal gedachten Grundebene dargestellt und der Wert von ψ für die betreffende Phase durch die dritte Koordinate eines Punktes angegeben. Da x auf das Intervall von Null bis Eins beschränkt ist, das Volum aber große Werte haben kann, so hat man es mit einem Streifen in der xv-Ebene zu tun, der durch die Linien $x = 0$, $x = 1$, $v = 0$ begrenzt ist und sich nach der einen Seite ins Unendliche ($v = \infty$) erstreckt. Es gelten nun zwei Sätze, die den im vorhergehenden Paragraphen besprochenen ganz ähnlich sind. Erstens ist eine Phase nur dann stabil, wenn in dem betreffenden Punkte alle

Vertikalschnitte der ψ-Fläche die konvexe Seite nach unten wenden, was jetzt das Bestehen der Ungleichungen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} > \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \, \partial x}\right)^2$$

erfordert. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, dann hat die Fläche eine Falte, und die zu einem gewissen Teil der Fläche gehörigen Phasen sind in labilem Gleichgewicht.

Ferner können zwei Phasen koexistieren, wenn in den entsprechenden Punkten die ψ-Fläche von ein und derselben Ebene berührt wird.

Der Beweis dieser Sätze ergibt sich auf fast genau demselben Wege, dem wir in § 60 bei Betrachtung der ζ-Fläche im Falle dreier Komponenten folgten; er beruht auf zwei Hilfssätzen, die es genügen wird, hier noch kurz anzuführen. Der eine sagt aus, daß, wenn A und B zwei Punkte der ψ-Fläche sind, der Schwerpunkt zweier Massen μ und $1-\mu$, die wir uns in diesen Punkten denken, durch seine drei Koordinaten die Zusammensetzung, das Volum und die freie Energie desjenigen Komplexes darstellt, den man erhält, wenn man μ Grammoleküle der Phase A und $1-\mu$ Grammoleküle von B, ohne an dem Zustande dieser Stoffmengen etwas zu ändern, einfach nebeneinander stellt.

Der zweite Hilfssatz bezieht sich auf die Frage, ob eine Phase oder ein Phasenkomplex A sich in ein anderes System, dessen ψ-Punkt B dieselbe Horizontalprojektion wie A hat, verwandeln kann. Das ist nur möglich, wenn A höher als B liegt. In der Tat, eben weil die Horizontalprojektionen von A und B zusammenfallen, würde die Umwandlung ohne Volumänderung stattfinden. Unter diesen Umständen kann die freie Energie des Systems nie zunehmen.

Phasen in geschlossener Kette.

§ 62. Wir fanden in § 44, daß zwei Phasen A und B, die in Bezug auf irgend eine Komponente mit einer dritten Phase C im Gleichgewicht sind, auch, ebenfalls in Bezug auf diese Komponente, unter sich im Gleichgewicht sein werden. Denkt man sich nun diese drei Phasen räumlich so angeordnet, daß A mit B, B mit C und C wieder mit A in Berührung steht, so hat man es mit einer geschlossenen Kette zu tun, in welcher an allen Stellen Gleichgewicht besteht. Derartige Ketten von Phasen, in welchen auch mehr als drei verschiedene Zustände vorkommen können, können wir uns namentlich dann in großer Verschiedenheit vorstellen, wenn wir auch äußere Kräfte wie die Schwerkraft wirken lassen.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, denken wir uns zwei vertikale Zylinder, von welchen die oberen Enden P_1, P_2 und ebenso die unteren Enden Q_1, Q_2 durch enge horizontale Röhren mit-

einander verbunden sind. In dieses Gefäß sei ein beliebiges System eingeschlossen, das der Schwerkraft unterworfen ist, so daß sich in jedem Zylinder der Zustand in vertikaler Richtung von Punkt zu Punkt ändert, an allen Stellen eines horizontalen Durchschnitts aber derselbe ist. Wir wollen annehmen, daß in den oberen Schichten der beiden Zylinder, sowie auch in dem diese Schichten miteinander verbindenden Rohr $P_1 P_2$ die gleiche Phase besteht; dies ist möglich, da wir das Rohr als sehr eng voraussetzen, so daß wir von der Verschiedenheit der Zustände in der oberen und unteren Hälfte dieses Kanals absehen dürfen. Eine ähnliche Annahme machen wir auch in Bezug auf die unteren Schichten in den beiden Zylindern und das Rohr $Q_1 Q_2$.

Wir wollen nun den Inhalt des Gefäßes durch horizontale Ebenen in unendlich dünne Schichten zerlegen, wobei die Teilebenen in dem zweiten Zylinder nicht in der Verlängerung der in dem ersten Zylinder angebrachten zu liegen brauchen. Wir erhalten dann eine unendliche Anzahl in geschlossener Kette liegender Volumelemente, unter welchen es eines gibt, das aus den oberen Schichten von $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ mit dem Verbindungsrohr $P_1 P_2$ besteht, und ein zweites, welches das Rohr $Q_1 Q_2$ enthält. Indem wir von einer bestimmten horizontalen Ebene im Zylinder $P_1 Q_1$, und zwar in beliebiger Richtung ausgehen, bezeichnen wir diese Volumelemente mit $S_1, S_2, \ldots S_n$; das letzte steht wieder mit dem ersten in Berührung.

Man denke sich jetzt das System auf konstanter Temperatur erhalten und den Zustand in der ersten Schicht S_1 gegeben. Aus den zwischen dieser und der zweiten obwaltenden Gleichgewichtsbedingungen kann man den Zustand in S_2 ableiten, daraus mittels der geeigneten Gleichgewichtsbedingungen den Zustand in S_3, usw. Schließlich findet man in dieser Weise die Zusammensetzung und die Dichte der in S_n enthaltenen Phase, und es läßt sich nun zeigen, daß, wenn nur die Drucke in S_n und S_1 sich als gleich herausstellen, die gefundene Zusammensetzung und Dichte gerade diejenigen sind, welche in der Schicht S_n bestehen müssen, damit sie sich auch bei der direkten Berührung mit S_1 im Gleichgewicht befinde.

Es wird genügen, das Gleichgewicht in Bezug auf eine der Komponenten C ins Auge zu fassen. Wir setzen die Gefäßwände, sowie auch alle Grenzflächen der Schichten als unbeweglich voraus. Für das Gleichgewicht zwischen den Schichten S_k und S_{k+1} ist dann erforderlich (vgl. § 26), daß sich die für diese beiden berechnete Summe der freien und der potentiellen Energie, und also auch die entsprechende Summe Ω für das gesamte System nicht ändert, wenn eine unendlich kleine Menge von C aus S_k in S_{k+1} hinübertritt. Man kann sich nun denken, daß eine solche Menge von bestimmter Größe zuerst aus S_1 in S_2 übergeht, dann von S_2 in S_3, von S_3 in S_4 usw., so daß sie schließlich

in S_n anlangt. Ist auf diesem Wege immer Gleichgewicht vorhanden, so ändert sich bei keinem dieser Schritte der Wert von Ω, und es ist also der Endwert dieser Funktion dem Anfangswerte gleich. Da sich nun der Endzustand nur dadurch von dem ursprünglichen Zustande unterscheidet, daß S_1 die betrachtete Menge verloren und S_n sie gewonnen hat, so wäre Ω auch ungeändert geblieben, wenn die unendlich kleine Quantität von C direkt von S_1 an S_n abgegeben wäre. Auch der Gleichgewichtsbedingung für S_1 und S_n ist also genügt und können wir behaupten, daß, wenn auf dem Wege $S_1 S_2 \ldots S_n$ an allen Stellen Gleichgewicht besteht, dasselbe auch von der Trennungsfläche S_1, S_n gilt.

§ 63. Um die Bedeutung des Satzes klar hervortreten zu lassen, hat man sich nur zu vergegenwärtigen, was geschehen würde, wenn S_n und S_1 in Bezug auf die Komponente C nicht miteinander im Gleichgewicht wären. Dann würde dieser Körper von der einen Schicht nach der anderen, etwa von S_n nach S_1 wandern. Sobald aber infolge dieses Überganges S_1 reicher an C geworden ist, ist das Gleichgewicht zwischen dieser Schicht und S_2 gestört; S_1 wird daher die Substanz wieder an S_2 abtreten. Setzt man diese Schlußfolgerung fort, so sieht man, daß der Körper C im Kreise herumlaufen würde, und zwar würde das, eben weil nach dem soeben Vorausgesetzten nicht an allen Stellen zugleicherzeit Gleichgewicht sein kann, nie aufhören.

Es ist nun ein derartiger Kreislauf irgend eines Körpers, den die Thermodynamik für unmöglich erklärt.

In allen denjenigen Fällen, in welchen der Übergang der betrachteten Komponente aus einer Phase in die andere von einer Wärmeentwicklung oder Absorption begleitet sein würde, ergibt sich der Schluß, zu dem wir gekommen sind, auch aus der Erwägung, daß nach dem Clausius'schen Grundsatze in einem System, dessen Teile alle auf derselben Temperatur gehalten werden, fortwährende thermische Wirkungen nicht bestehen können.

Es verdient besondere Beachtung, daß das im vorigen Paragraphen Gesagte auch dann gilt, wenn an einzelnen Stellen der Kette Phasen, zwischen deren Zuständen ein endlicher Unterschied besteht, sich einander berühren und ebenso wenn an einer oder mehreren Stellen dünne horizontale Scheidewände angebracht sind, die nur einem Teil der Komponenten den Durchtritt gestatten. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, einen der Querschnitte, von denen oben die Rede war, mit einer Unstetigkeitsfläche oder einer Scheidewand zusammenfallen zu lassen.

§ 64. Es mögen jetzt einige Beispiele folgen. Zunächst denke man sich im unteren Teil des Zylinders $P_1 Q_1$ eine nur für Wasser durchlässige Scheidewand, unterhalb derselben, in dem Rohr $Q_1 Q_2$ und

bis zu einer gewissen Höhe im Zylinder $Q_2 P_2$ Wasser, im ersten Zylinder aber oberhalb der Scheidewand eine Salzlösung, und endlich in den oberen Teilen der beiden Zylinder und in dem Rohr $P_1 P_2$ Wasserdampf. Man kann mit Hilfe einer Schlußfolgerung, die zuerst von Arrhenius benutzt wurde, aus dem Satze, daß im ganzen Kreise Gleichgewicht besteht, die Beziehung zwischen dem osmotischen Druck und dem Dampfdruck der Lösung ableiten.

Zweitens wollen wir annehmen, der mittlere Teil des Zylinders $P_1 Q_1$ sei durch zwei halbdurchlässige Wände von dem oberen und unteren Teil getrennt; er sei mit einer Lösung gefüllt, während der übrige Teil des Kreises nur Wasser enthält. Die Anordnung stimmt dann im wesentlichen mit derjenigen überein, deren ich mich in einer früheren Arbeit[1]) bedient habe, um die Unterschiede des osmotischen Drucks in verschiedenen Schichten einer der Schwerkraft unterworfenen Lösung zu bestimmen.

Wir lassen endlich alle Scheidewände weg und füllen das Gefäß mit einer einheitlichen Substanz, die sich teils im gasförmigen oder flüssigen Zustande befinden möge, zum Teil aber auch in denjenigen Zuständen, welche der Körper durchläuft, wenn er in kontinuierlicher Weise aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand übergeführt wird, und die den Punkten der theoretischen Isotherme entsprechen.

Wir erinnern daran (vgl. § 31), daß man, wenn man diese Kurve in der Richtung des abnehmenden Volums durchläuft, zunächst einen Punkt D findet, der dem gesättigten Dampfe entspricht, und dann einen Punkt A, in welchem der Druck ein Maximum wird. Von hier ab senkt sich die Isotherme bis zu einer Stelle B kleinsten Druckes und sie erreicht dann unter erneuertem Steigen den Punkt C, welcher zu demjenigen Zustande gehört, in welchem die Flüssigkeit mit ihrem Dampf im Gleichgewicht sein kann. Wir wollen nun die verschiedenen Zustände, die wir füglich mit den soeben benutzten Buchstaben bezeichnen können, in unser ringförmiges Gefäß zusammenbringen, und zwar in einer eigentümlichen Anordnung, die sich aus der Bedingung ergibt, daß in jedem Zylinder, wenn Gleichgewicht bestehen soll, der Druck nach oben hin abnehmen muß. Wir denken uns nämlich, daß in dem unteren Verbindungsrohr der Zustand A, in dem oberen aber der Zustand B besteht. In der Säule $P_1 Q_1$ mögen die Zustände, auf welche die zwischen A und B liegenden Punkte der Isotherme sich beziehen, kontinuierlich aufeinanderfolgen, was bei geeigneter Höhe der Säule wirklich unter dem Einfluß der Schwerkraft möglich ist. In der anderen Säule aber sollen vom tiefsten Punkte an die Zustände von A bis D, und vom höchsten Punkte an die Zustände von B bis C

1) Siehe diese Sammlung, p. 175. 176.

aufeinanderfolgen; in einer gewissen Höhe begegnen sich hier in einer horizontalen Ebene E die Zustände C und D, die Flüssigkeit und der gesättigte Dampf. Daß nun diese Anordnung, bei welcher an allen Stellen zugleicherzeit Gleichgewicht besteht, möglich ist, lehrt uns der Satz von § 62, und wir wollen jetzt sehen, zu welcher Folgerung diese Möglichkeit uns führt.

Es sei in irgend einem Punkte von $P_1 Q_1$ oder $P_2 Q_2$ z die vertikale Höhe über einer beliebigen horizontalen Ebene; ferner bezeichnen wir mit dz die Änderungen, welche diese Höhe erleidet, wenn man von E aus den Umfang des Rechtecks in der Richtung $E Q_2 Q_1 P_1 P_2 E$ durchläuft. Dann ist offenbar

$$\int dz = 0. \qquad (85)$$

In jedem Punkte besteht aber nach der gewöhnlichen Regel für das hydrostatische Gleichgewicht die Beziehung

$$dp = -\frac{g}{v}\, dz,$$

in der dp die dem dz entsprechende Änderung des Druckes, v das spezifische Volum und g die Beschleunigung der Schwerkraft bedeuten. Infolgedessen verwandelt sich die Gleichung (85) in

$$\int_D^C v\,dp = 0,$$

wo die Buchstaben D und C angeben sollen, daß man längs des Teiles $DABC$ der theoretischen Isotherme zu integrieren hat. Wenn man nun partiell integriert und dabei berücksichtigt, daß der Druck für die Phasen D und C einen und denselben Wert p_s hat, so bekommt man schließlich

$$(v_D - v_C)\, p_s = \int_C^D p\,dv,$$

eine Formel, die sich auch direkt aus der in § 31 erwähnten von Maxwell herrührenden Betrachtung ergibt.

§ 65. Es wird dem Leser nicht entgangen sein, daß bei der in dem letzten Beispiel angenommenen Anordnung die Dichte in $P_1 Q_1$ von oben nach unten abnimmt, und daß in $P_2 Q_2$ die schwerere Flüssigkeit sich über dem leichteren Dampf befindet; das Gleichgewicht war daher labil. Auch sind die Zustände, die wir uns in dem Schenkel $P_1 Q_1$ vorstellten, jeder für sich labil, weil für dieselben der Differentialquotient $\frac{\partial p}{\partial v}$ einen positiven Wert hat.

Es ist dies eine Eigentümlichkeit, die unsere Betrachtungsweise mit der von Maxwell gemein hat; auch bei dieser denkt man sich,

daß die zuletzt genannten Phasen wirklich realisiert werden können. In ähnlicher Weise wird auch in anderen Fällen mit nicht stabilen Phasen operiert. Wenn man z. B., wie in § 39 dargelegt wurde, sich bei der Berechnung der freien Energie vorstellt, daß das Gemisch in den Zustand eines vollkommenen Gases übergeführt wird, so muß man bedenken, daß unter Umständen einige der dabei durchlaufenen Zustände labil sein können.

Da sich nun in diesen und ähnlichen Fällen nie ein Widerspruch mit der Erfahrung gezeigt hat, so dürfen wir schließen, daß die thermodynamischen Sätze auch auf labile Zustände anwendbar sind, und können wir den Clausius'schen Grundsatz dahin verallgemeinern, daß es uns sogar dann, wenn wir solche verwirklichen könnten, unmöglich sein würde, Wärme von einem kälteren nach einem wärmeren Körper überzuführen, ohne daß gleichzeitig irgend eine andere Verwandlung stattfindet.

Molekulartheoretische Behandlung von Gleichgewichtszuständen.

§ 66. Durch ihre zahlreichen wichtigen und, soweit man es hat untersuchen können, immer mit der Erfahrung übereinstimmenden Ergebnisse gehört die Thermodynamik unstreitig zu den schönsten Partien der theoretischen Physik; sie hat besonders deswegen einen hohen Reiz, weil sie auf nur wenigen ganz allgemeinen Grundsätzen beruht. Neben diesem Wege gibt es noch einen zweiten, auf dem wir gleichfalls manche Erscheinung dem Verständnis näher bringen können; das ist der Weg der molekularen und kinetischen Theorien. Auch auf diesem können wir manche erfreuliche Erfolge erzielen, darunter auch solche, die der reinen Thermodynamik unzugänglich sind. Man denke z. B. an die Erklärung der inneren Reibung, der Wärmeleitung und der Diffusion der Gase, an die numerischen Beziehungen zwischen diesen auf den ersten Blick so weit auseinanderliegenden Erscheinungen und an das von der kinetischen Theorie geforderte und später experimentell bewiesene Gesetz, nach welchem die Koeffizienten der inneren Reibung und der Wärmeleitung in weiten Grenzen von der Dichte eines Gases unabhängig sind.

Bei dieser Sachlage kann man, wie mir scheint, kaum daran zweifeln, daß die beiden Betrachtungsweisen, die thermodynamische und die molekulartheoretische, gleich berechtigt sind und daß wirkliche Widersprüche zwischen den beiden auf die Dauer nicht bestehen können, eine Meinung, in der wir durch die Tatsache bestärkt werden, daß man wenigstens einen Teil der Folgerungen, die sich aus den thermodynamischen Sätzen ergeben, auch molekulartheoretisch, mit Hilfe gewisser Vorstellungen über den Mechanismus der Erscheinungen begründen kann. Dies möge hier an einigen Beispielen erläutert werden.

§ 67. Zunächst betrachten wir den aus dem Clausius'schen Prinzip folgenden Satz (§ 4), nach welchem ein Körper, auf den die Schwerkraft wirkt, wenn er sich im Gleichgewicht befindet, an allen Stellen dieselbe Temperatur hat. Dies scheint bei oberflächlicher Betrachtung mit den Annahmen der kinetischen Gastheorie unvereinbar zu sein. In der Tat, wenn die Moleküle eines Gases unter dem Einfluß der Schwerkraft stehen, so muß ein Teilchen, das sich aufwärts bewegt, an Geschwindigkeit verlieren, ein abwärts gehendes Molekül aber in seiner Bewegung beschleunigt werden. Der Schluß scheint daher auf der Hand zu liegen, daß die mittlere Geschwindigkeit in den unteren Schichten einer vertikalen Gassäule größer sei als in den oberen; die Temperatur würde also nach oben hin fallen. Dieser vermeintliche Widerspruch ist indes bereits vor vielen Jahren von Maxwell gelöst worden. Nachdem er das nach ihm benannte Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung in einem Molekülsystem gefunden hatte, gelang es ihm zu zeigen, daß die mittlere kinetische Energie in allen Schichten der Säule gleich groß sein muß.

§ 68. Interessant ist auch der Fall eines Gases G, das sich in zwei Bestandteile G_1 und G_2 dissoziieren kann, so daß man es, wenn das Gleichgewicht erreicht ist, mit einer Mischung der drei Gase G, G_1, G_2 zu tun hat. Wirkt nun hierauf die Schwerkraft, so werden sich die drei Dichten $\varDelta$, $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ von Punkt zu Punkt ändern und die Thermodynamik verlangt, daß zugleicherzeit in jeder Höhe die für das Dissoziationsgleichgewicht erforderliche Beziehung zwischen diesen Dichten besteht. Andernfalls würde an gewissen Stellen fortwährend eine Zersetzung von G und an anderen eine Wiedervereinigung der Bestandteile stattfinden. Die damit verbundenen thermischen Wirkungen sind aber in einem auf konstanter Temperatur gehaltenen System nach dem Clausius'schen Grundsatz unmöglich.

In der kinetischen Theorie lernen wir nun wirklich einen Zustand kennen, welcher der genannten Anforderung genügt. Jedes der drei Gase verteilt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft gerade so über den verfügbaren Raum, als ob es allein vorhanden wäre, und es ist also, wenn wir die z-Achse vertikal nach oben ziehen,

$$\varDelta = Ce^{-sz}, \quad \varDelta_1 = C_1 e^{-s_1 z}, \quad \varDelta_2 = C_2 e^{-s_2 z}, \quad \ldots \quad (86)$$

wo die Konstanten s, s_1, s_2 den Molekulargewichten proportional sind. Was aber das Dissoziationsgleichgewicht betrifft, so wird dieses durch das bekannte Gesetz von Guldberg und Waage beherrscht. Für den Fall, daß ein Molekül von G je ein Molekül von G_1 und G_2 liefert, so daß

$$s = s_1 + s_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

wird, lautet dieses Gesetz

$$\Delta = k \Delta_1 \Delta_2,$$

wo k eine von der Temperatur und der Natur der Körper abhängige Konstante bedeutet. Dieser Formel wird nun, wie aus (86) und (87) ersichtlich, für jeden Wert von z genügt, sobald zwischen den Konstanten die Beziehung

$$C = k C_1 C_2$$

besteht.

Man kann übrigens diese Betrachtung noch leicht etwas verallgemeinern. Wir wollen annehmen, die vertikale Säule enthalte eine Anzahl von Gasen G_1, G_2 usw., G'_1, G'_2 usw., derart, daß sich durch eine chemische Umsetzung $m_1, m_2, \ldots$ Moleküle der zuerst genannten in $m'_1, m'_2 \ldots$ Moleküle der zuletzt genannten verwandeln können; zwischen den Molekulargewichten μ besteht dann die Relation

$$m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + \cdots = m'_1 \mu'_1 + m'_2 \mu'_2 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Für die Dichten hat man jetzt

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta_1 = C_1 e^{-s_1 z}, & \Delta_2 = C_2 e^{-s_2 z}, \ldots \\ \Delta'_1 = C'_1 e^{-s'_1 z}, & \Delta'_2 = C'_2 e^{-s'_2 z}, \ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

und hier genügen die Konstanten s, da sie den Molekulargewichten proportional sind, der aus (88) folgenden Gleichung

$$m_1 s_1 + m_2 s_2 + \cdots = m'_1 s'_1 + m'_2 s'_2 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Der Ausdruck für das Guldberg-Waage'sche Gesetz wird in diesem Fall

$$\Delta_1^{m_1} \Delta_2^{m_2} \cdots = k \Delta'^{m'_1}_1 \Delta'^{m'_2}_2 \cdots,$$

was sich, wegen der Formeln (89) und (90) wieder auf eine Beziehung zwischen den Konstanten reduziert. Da z aus der Gleichung verschwindet, so kann wirklich in allen Schichten gleichzeitig Dissoziationsgleichgewicht bestehen.

Es möge noch hervorgehoben werden, daß die Koordinate z nur deswegen aus den Endgleichungen verschwindet und also der Forderung der Thermodynamik genügt werden kann, weil die Schwerkraft sowohl auf G als auch auf G_1 und G_2 wirkt. Überhaupt hängt die Gültigkeit der thermodynamischen Sätze damit zusammen, daß äußere Kräfte, die auf die einzelnen Atome wirken, nicht verloren gehen, wenn diese eine Verbindung miteinander eingehen.

Als letztes Beispiel für die Übereinstimmung zwischen Thermodynamik und Kinetik möge noch die Betrachtung angeführt werden, die ich in einer früheren Abhandlung auf das Gleichgewicht einer der Schwerkraft unterworfenen Lösung angewandt habe.[1]) Ich kam dabei

---

1) Siehe oben, p. 177—181.

zu dem Schluß, daß zwar die Molekulartheorie zur Zeit die thermodynamisch aufgefundene Änderung des osmotischen Drucks von Punkt zu Punkt nicht ganz erklären kann, aber doch nicht weit von diesem Ziel entfernt bleibt.

Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auf die Prinzipien der Mechanik.

§ 69. Man könnte nun in dieser Weise fortfahren, und in jedem einzelnen Fall die Resultate der Thermodynamik molekulartheoretisch zu deuten oder zu rekonstruieren versuchen. Das wäre freilich ein recht mühseliger und wohl auch ein unnötig weitschweifiger Weg. In der Tat, was in der Thermodynamik aus einem allgemeinen Grundsatze, wie dem Clausius'schen, gefolgert wird, muß auch in allgemeinen Eigenschaften der aus Molekülen bestehenden Systeme wurzeln. Statt daß wir die verschiedenen Fälle, jeden für sich, der Betrachtung unterwerfen, können wir daher nach diesen allgemeinen Eigenschaften suchen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach einer Ableitung der thermodynamischen Sätze aus den für jedes Molekularsystem geltenden Gesetzen der Mechanik.

Verschaffen wir uns zunächst Klarheit darüber, welche Aufgabe wir uns stellen müssen, wenn wir in dieser Weise zu dem zweiten Hauptsatze in einer seiner Formen, etwa zu dem Satze, daß $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential ist, gelangen wollen. Vor allen Dingen haben wir dann offenbar von den in diesem Satze vorkommenden Begriffen, von dem der Wärmemenge und dem der Temperatur Rechenschaft zu geben. Man kann nun die zugeführte Wärmemenge als die Differenz zwischen der Energieänderung des Systems und der Arbeit äußerer Kräfte, die auf sichtbare Körperteile wirken, betrachten; es wird daher einer Molekulartheorie im allgemeinen keine Mühe machen, genau festzusetzen, was man unter dQ zu verstehen hat. Größere Schwierigkeit bietet der Temperaturbegriff. Um diesen zu begründen, hat man zu zeigen, daß ein sich selbst überlassenes System von Molekülen einem stationären oder Gleichgewichtszustande zustrebt, d. h. einem Zustande, in dem alle an dem System beobachtbaren Größen konstant bleiben. Ferner hat man nachzuweisen, daß sich jedem im stationären Zustand befindlichen System eine gewisse Zahl zuordnen läßt, derart, daß, wenn für zwei sich berührende Körper diese charakteristischen Zahlen ungleich sind, Wärme von dem Körper mit der größeren in den mit der kleineren Zahl übergeht, daß aber kein Wärmeaustausch stattfindet, sobald die charakteristischen Zahlen gleich sind.

Gelingt es für eine Gruppe von Körpern die Existenz einer derartigen Zahlenreihe darzutun, so ergeben sich daraus unendlich viele andere Zahlenreihen, die demselben Zweck dienlich sind.

Wenn man so weit gekommen ist, kann man an die Hauptaufgabe herantreten. Diese bezieht sich auf den langsamen Übergang eines Systems aus einem Gleichgewichtszustande in einen anderen unendlich wenig davon verschiedenen. Es gilt jetzt, die für diesen Übergang erforderliche Wärmemenge dQ ins Auge zu fassen und nachzuweisen, daß unter den soeben genannten Reihen eine durch die Eigenschaft ausgezeichnet ist, daß, wenn man die derselben angehörigen Zahlen für T nimmt, der Ausdruck $\frac{dQ}{T}$ zu einem vollständigen Differential wird. Gelingt es, dies zu zeigen, dann hat man den Begriff der Entropie erreicht und kann dann schließlich noch versuchen, diesen auch auf Zustände, in welchen die Körper sich nicht im Gleichgewicht befinden, auszudehnen; damit würde man sogar über diesen Begriff, wie er in der reinen Thermodynamik definiert wird, hinausgehen.

Im ganzen hätte man also drei Schritte zu tun. Der erste hat den Zweck, Gleichgewichtszustände zu untersuchen und die für diese geltenden Gesetze zu erforschen. Der zweite bezieht sich auf die Umwandlung eines Gleichgewichtes in ein anderes, der dritte auf beliebige Abweichungen vom Gleichgewicht. Was den ersten Schritt anlangt, so ist noch hinzuzufügen, daß er bereits an und für sich zu vielen Schlüssen führen kann, die wir jetzt thermodynamisch ableiten. Könnte man z. B. aus dem Spiel der molekularen Bewegungen und Kräfte erklären, daß der stationäre Zustand eines Molekülsystems dadurch gekennzeichnet ist, daß im Kreise umlaufende Bewegungen einer bestimmten Art von Teilchen nicht vorkommen, so wäre man bereits so weit, wie wir mit dem in § 62 ausgesprochenen Satze gekommen waren.

In der Theorie der gasförmigen Körper können wir nun wirklich die drei Schritte alle ausführen. Man hat hier in der mittleren kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls ein Maß für die Temperatur, und die direkte Betrachtung eines sich langsam ändernden Gleichgewichtszustandes lehrt uns, daß $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential ist.[1]) Die Bedeutung der Entropie kommt der zuerst von Boltzmann in die Gastheorie eingeführten (mit dem umgekehrten Vorzeichen genommenen) Größe H zu, und insofern diese Größe sich für jeden beliebigen Zustand vorstellen läßt, ist auch der letzten Forderung, die wir soeben stellten, genügt.

§ 70. Leider kann man nicht sagen, daß eine für alle Körper geltende Ableitung des zweiten Hauptsatzes, die nichts mehr zu wünschen ließe, schon jetzt vorliege. Indes kann man dem Ziel sehr nahe kommen, wenn man sich der Prinzipien der statistischen Mechanik bedient,

---

1) Siehe Art. VIII dieser Sammlung.

die Gibbs in seinem letzten Buche[1]) ausführlich behandelt hat. Bei der großen Wichtigkeit der Ideen dieses Physikers erscheint es angemessen, denselben den Schluß dieser Vorträge zu widmen, wobei allerdings nur ein kleiner Teil des Inhalts des genannten Werkes wiedergegeben werden kann. Der Kürze wegen werde ich mich dabei in der Wahl der zu betrachtenden Systeme etwas weniger allgemein fassen, als Gibbs es getan hat. Auch werde ich, was die Anwendung auf die Thermodynamik betrifft, mich nicht immer mit demselben vorsichtigen Vorbehalt ausdrücken, durch den die Darstellung von Gibbs sich auszeichnet.

Wir betrachten ein System von n materiellen Punkten, deren rechtwinklige Koordinaten wir mit $x_1, x_2, \ldots x_{3n}$ bezeichnen, so daß x_1, x_2, x_3 dem ersten Punkte angehören, x_4, x_5, x_6 dem zweiten, usw. Die Masse des Punktes, zu dem die Koordinate x_ν gehört, möge m_ν heißen; dies involviert, daß jedesmal drei aufeinanderfolgende m_ν, wie m_1, m_2, m_3 dieselbe Masse vorstellen. Für die Geschwindigkeitskomponenten schreiben wir $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{3n}$.

Wir wollen annehmen, daß die materiellen Punkte gewissen Kräften unterworfen sind, die von einer potentiellen Energie abhängen. Ist diese für das gesamte System U, welche Größe also als irgend eine Funktion der $3n$ Koordinaten anzusehen ist, dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$m_\nu \frac{d\xi_\nu}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (91)$$

Die Koordinaten und die Geschwindigkeitskomponenten zusammen bestimmen das, was wir die Phase des Systems nennen können; diese ändert sich fortwährend von einem Augenblick zum anderen.

Das Eigentümliche der Gibbs'schen Betrachtungsweise besteht nun darin, daß man sich nicht ein einziges System, sondern eine sehr große Anzahl ohne Wechselwirkung nebeneinander bestehender Systeme vorstellt. Wir wollen das eine Systemmenge nennen. Die individuellen Systeme, aus denen sie sich zusammensetzt, sollen, was die Anzahl und die Eigenschaften der materiellen Punkte sowie die auf diese wirkenden Kräfte betrifft, genau miteinander übereinstimmen, sich aber in einem bestimmten Augenblick in sehr verschiedenen Phasen befinden. Mit anderen Worten, während die Massen m für alle Systeme gleich sind und U auch immer dieselbe Funktion der Koordinaten ist, weisen die Individuen der Menge zu einer bestimmten Zeit sehr verschiedene Werte von $x_1, \ldots x_{3n}, \xi_1, \ldots \xi_{3n}$ auf.

---

1) J. W. Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics developed with special reference to the rational foundation of thermodynamics, New York, London, 1902.

§ 71. Es empfiehlt sich nun, die Gesamtheit aller Phasen als eine $6n$-fache Mannigfaltigkeit $(x_1, \dots x_{3n}, \xi_1, \dots \xi_{3n})$ (Phasenmannigfaltigkeit) aufzufassen, und uns einer Ausdrucksweise zu bedienen, die derjenigen der mehrdimensionalen Geometrie nachgebildet ist.[1]) Somit sagen wir, jedes System nehme in einem bestimmten Augenblick eine gewisse Stelle in der Phasenmannigfaltigkeit ein und bewege sich in dieser letzteren; die verschiedenen Systeme aber seien in jedem Augenblick in irgend einer Weise über die Phasenmannigfaltigkeit verteilt.

Wir können, und hierin liegt das Statistische der Methode, speziell diejenigen Systeme ins Auge fassen, für welche in dem betrachteten Zeitpunkt die Koordinaten und Geschwindigkeiten zwischen den Grenzen

$$x_1 \text{ und } x_1 + dx_1, \dots x_{3n} \text{ und } x_{3n} + dx_{3n},$$
$$\xi_1 \text{ und } \xi_1 + d\xi_1, \dots \xi_{3n} \text{ und } \xi_{3n} + d\xi_{3n}$$

eingeschlossen sind. Diese liegen in dem nach den x und den ξ begrenzten[2]) unendlich kleinen Gebiet $(dx_1, \dots dx_{3n}, d\xi_1, \dots d\xi_{3n})$ der Phasenmannigfaltigkeit. Ein derartiges Gebiet können wir aber auch in anderer Weise begrenzen. Für die in (x, ξ)-Maß gemessene Größe desselben schreiben wir im allgemeinen $d\lambda$, und zwar sollen die Dimensionen eines solchen Elementes so klein sein, daß man bei physikalischen Betrachtungen von der Verschiedenheit der Phasen der in denselben liegenden Systeme absehen kann. Trotzdem soll das Element $d\lambda$ eine sehr große Zahl von Systemen einschließen, was sich immer dadurch erreichen läßt, daß man die Zahl N aller in der Menge enthaltenen Systeme groß genug wählt.

In dieser Voraussetzung kann man beweisen, daß die betreffende Zahl dem Inhalte des Elementes $d\lambda$ proportional ist; stellt man sie durch $\varrho\, d\lambda$ vor, dann ist ϱ die Dichte, mit der die Systeme über die Phasenmannigfaltigkeit verteilt sind. Sie ist in jedem Augenblick eine gewisse Funktion der Koordinaten x und der Geschwindigkeiten ξ. Ist sie fortwährend dieselbe Funktion dieser Größen, so enthält jedes Element anhaltend gleich viel Systeme, obgleich dies immer wieder andere sind; der Zustand der gesamten Menge ist dann stationär. Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die hierfür erforderliche Bedingung zu suchen.

§ 72. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß, wenn sich $x_1, \dots x_{3n}$, $\xi_1, \dots \xi_{3n}$ auf die Zeit t beziehen, die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t + dt$ die Werte

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \xi_1 dt, \dots x'_{3n} = x_{3n} + \xi_{3n} dt, \\ \xi'_1 &= \xi_1 - \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} dt, \dots \xi'_{3n} = \xi_{3n} - \frac{1}{m_{3n}}\frac{\partial U}{\partial x_{3n}} dt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (92)$$

1) Vgl. zu dem Folgenden Art. VII dieser Sammlung.

2) Siehe oben, p. 151.

haben. Diejenigen Systeme, welche zur Zeit t in dem Elemente $d\lambda$ liegen, werden nun im Moment $t + dt$ in einem anderen Elemente angekommen sein, dessen nach den neuen Koordinaten und Geschwindigkeiten gemessene Größe wir mit $d\lambda'$ bezeichnen. Man hat dann[1])

$$d\lambda' = \left| \frac{\partial(x'_1, \ldots \xi'_{3n})}{\partial(x_1, \ldots \xi_{3n})} \right| d\lambda,$$

oder, wenn man (92) beachtet,

$$d\lambda' = d\lambda. \qquad \qquad (93)$$

Da nun dieselben Systeme, welche zu Anfang des Zeitelementes dt in $d\lambda$ liegen, nach Ablauf dieser Zeit in $d\lambda'$ gekommen sind, so liegen sie dort mit derselben Dichte, mit der sie vorher über $d\lambda$ verteilt waren. Anderseits muß, wenn der Zustand stationär sein soll, in dem Elemente $d\lambda'$ die Dichte fortwährend dieselbe bleiben. Bedingung für den stationären Zustand ist daher, daß die Dichte an den Stellen $(x_1, \ldots \xi_{3n})$ und $(x'_1, \ldots \xi'_{3n})$ der Phasenmannigfaltigkeit gleich groß ist, d. h. wenn man die Dichte als Funktion der Veränderlichen $x_1, \ldots \xi_{3n}$ mit F bezeichnet, daß

$$F(x_1, \ldots \xi_{3n}) = F(x'_1, \ldots \xi'_{3n}).$$

Beachtet man, daß die links und rechts stehenden Größen die Werte sind, welche die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten ein und desselben Systems in zwei aufeinanderfolgenden Augenblicken annehmen, dann ersieht man aus dieser Gleichung, daß F eine Funktion dieser Größen sein muß, die sich im Laufe der Bewegung eines Systems nicht ändert.

Eine solche Größe ist nun die Energie eines Systems, für die wir ε schreiben wollen, und der Zustand der Menge ist also stationär, sobald wir für F eine Funktion dieser Energie nehmen.

Wir wollen nun eine besondere Annahme machen. Nach dem Beispiele von Gibbs setzen wir nämlich

$$F = Ne^{\frac{\psi - \varepsilon}{T}}, \qquad \qquad (94)$$

wo ψ und T Konstanten sind, deren letztere das positive Vorzeichen hat. Die durch diese Formel bestimmte Verteilung der Systeme über die Phasenmannigfaltigkeit wollen wir eine kanonische Verteilung nennen, und die Konstante T den Modul dieser Verteilung. Was ψ betrifft, so ist zu bemerken, daß diese Größe einen bestimmten Wert hat, sobald man die Natur der materiellen Systeme kennt und T, sowie die in ε enthaltene additive Konstante gewählt hat. Wenn man nämlich den Ausdruck (94) mit $d\lambda$ multipliziert und dann über die volle

1) Siehe oben, p. 159 und 160.

Ausdehnung der Phasenmannigfaltigkeit integriert, so muß man die Gesamtzahl N der Systeme finden. Hieraus folgt

$$e^{-\frac{\psi}{T}} = \int e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\lambda. \qquad (95)$$

§ 73. Wenn man sich einen Überblick über den Zustand der Menge von Systemen verschaffen will, liegt es nahe, auf die Mittelwerte verschiedener bei der Bewegung in Betracht kommender Größen die Aufmerksamkeit zu richten. Der Mittelwert $\overline{\varphi}$ irgend einer von der Phase abhängigen Größe φ ist offenbar

$$\overline{\varphi} = \int e^{\frac{\psi - \varepsilon}{T}} \varphi \, d\lambda. \qquad (96)$$

Man hat nämlich, um diesen Mittelwert zu bilden, die Summe der φ für alle Systeme der Menge zu berechnen und dann mit N zu dividieren. Da nun die in dem Element $d\lambda$ liegenden Systeme alle den gleichen Wert von φ haben, so liefern sie zu der gesuchten Summe den Beitrag $F\varphi \, d\lambda$, woraus, wenn man (94) beachtet, sofort die Formel (96) folgt.

Ein sehr einfaches Resultat ergibt sich für die mittlere kinetische Energie eines bestimmten, etwa des ersten materiellen Punktes. Wir können damit anfangen, daß wir den Mittelwert von ξ_1^2 berechnen. Zu diesem Zwecke nehmen wir für das Element $d\lambda$ ein solches, in welchem ξ_1 zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi_1$ liegt, und das ferner, was die Größen $x_1, \ldots x_{3n}, \xi_2 \ldots \xi_{3n}$ betrifft, in beliebiger Weise begrenzt ist. Wir können dann setzen[1])

$$d\lambda = d\lambda' d\xi_1,$$

wo jetzt $d\lambda'$ ein unendlich kleines Gebiet in der $(6n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit $(x_1 \ldots x_{3n}, \xi_2, \ldots \xi_{3n})$ bedeutet, und zunächst für die in diesem Element liegenden Systeme den Mittelwert von ξ_1^2 bestimmen. Die Bemerkung, daß ε das Glied

$$\tfrac{1}{2} m_1 \xi_1^2$$

enthält, übrigens aber von ξ_1 unabhängig ist, und daß ferner ξ_1 alle positiven und negativen Werte haben kann, führt zu der Gleichung

$$\overline{\xi_1^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1^2 e^{-\frac{m_1 \xi_1^2}{2T}} d\xi_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m_1 \xi_1^2}{2T}} d\xi_1}.$$

---

1) Vgl. oben, p. 159.

Das Integral im Nenner hat den Wert $\sqrt{\frac{2\pi T}{m_1}}$, und für das Integral im Zähler findet man

$$\frac{T}{m_1}\sqrt{\frac{2\pi T}{m_1}}.$$

Also

$$\overline{\xi_1^2} = \frac{T}{m_1}, \qquad \tfrac{1}{2}\overline{m_1\xi_1^2} = \tfrac{1}{2}T.$$

Da dieses Resultat unabhängig ist von der speziellen Wahl des Elementes $d\lambda'$ in der Mannigfaltigkeit $(x_1, \ldots x_{3n}, \xi_2, \ldots \xi_{3n})$, auf welches wir uns soeben beschränkt haben, so gilt es auch für alle diejenigen Systeme, die in einem beliebigen Gebiete dieser Mannigfaltigkeit, in irgend einem Teil der Mannigfaltigkeit $(x_1, \ldots x_{3n})$, oder in der ganzen Phasenmannigfaltigkeit enthalten sind. Denselben Wert erhält man für $\tfrac{1}{2}\overline{m_2\xi_2^2}$ und $\tfrac{1}{2}\overline{m_3\xi_3^2}$, wobei wir daran erinnern, daß diese beiden Größen sich ebenso wie die zuerst untersuchte auf das erste Teilchen beziehen. Der Mittelwert der kinetischen Energie des ersten materiellen Punktes beträgt daher $\tfrac{3}{2}T$. Von jedem anderen materiellen Punkt können wir dasselbe aussagen. Wir schließen daher, daß ein bestimmter materieller Punkt, sowohl in denjenigen Systemen der Menge, welche irgend eine bestimmte Konfiguration haben, als auch in allen Systemen der Menge, im Mittel die kinetische Energie $\tfrac{3}{2}T$ hat. Hieraus folgt für den Mittelwert der gesamten kinetischen Energie eines Systems

$$\tfrac{3}{2}nT.$$

§ 74. In den weiteren Entwicklungen setzen wir voraus, daß die Zahl n der materiellen Punkte eines Systems sehr groß ist, ähnlich wie die Zahl der Atome in einem ponderablen Körper. Dann hat die kanonische Verteilung die merkwürdige Eigenschaft, daß, obgleich alle möglichen Phasen in der Menge vertreten sind, dennoch der weitaus größere Teil der N Systeme sich, was die der Beobachtung zugänglichen Größen betrifft, nicht merklich voneinander unterscheiden. Zunächst gilt das von der räumlichen Anordnung der Massenteilchen. In der Energie ε eines Systems ist nämlich die potentielle Energie U enthalten, und der Ausdruck (94) zeigt daher, daß Anordnungen, für welche diese einen großen positiven Wert hat, in der Menge verhältnismäßig selten vorkommen. Lagerungen der Teilchen, welche man vom experimentellen Standpunkte für unmöglich erklären würde, weil denselben ein sehr hoher Wert der potentiellen Energie zukommen würde, findet man in nur so wenigen Fällen, daß man ganz davon absehen darf.

Daß bei den gewöhnlichen Temperaturen Kupfer ein fester Körper ist, dessen Volum nur geringer Änderungen fähig ist, müssen wir durch die Annahme erklären, daß sich der Trennung der Metallatome Kräfte von beträchtlicher Größe widersetzen, und daß also eine Kupfermasse,

deren Atome zu einem irgendwie beträchtlichen Teil weit voneinander getrennt wären, so daß sie etwa Kupferdampf bildeten, eine sehr hohe potentielle Energie besitzen würde. Wenn wir nun den materiellen Punkten der Systeme, die wir oben betrachteten, die Eigenschaften von Kupferatomen zuschreiben, so dürfen wir annehmen, daß große gegenseitige Entfernungen zwischen den einander zunächst liegenden Atomen kaum in der kanonisch verteilten Systemmenge angetroffen werden. In der großen Mehrzahl der Systeme, aus welchen die Menge besteht, würde man es also wirklich mit festem Kupfer zu tun haben.

§ 75. Für die kinetische Energie kann man streng beweisen, daß ihr Gesamtwert, sei es für die n Massenpunkte eines Systems, oder für eine beliebig herausgegriffene sehr zahlreiche Gruppe dieser Punkte, in der großen Mehrzahl der zu der kanonisch verteilten Menge gehörenden Systeme nur ganz unbedeutenden Variationen unterliegt.

Wir betrachten die k Punkte der ausgewählten Gruppe als die k ersten Punkte des Systems und bezeichnen zur Abkürzung mit $d\mu$ das Element $d\xi_1 \ldots d\xi_{3k}$ der Mannigfaltigkeit

$$(\xi_1, \ldots \xi_{3k}), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (97)$$

mit $d\nu$ aber das Gebiet $dx_1 \ldots dx_{3n}\, d\xi_{3k+1} \ldots d\xi_{3n}$ in der Mannigfaltigkeit $(x_1, \ldots x_{3n}, \xi_{3k+1}, \ldots \xi_{3n})$, so daß wir

$$d\lambda = d\mu\, d\nu$$

setzen dürfen. Aus (94) ergibt sich dann, indem wir über alle Elemente $d\nu$ integrieren, für die Anzahl der Systeme, die in dem Elemente $d\mu$ liegen, ein Ausdruck von der Form

$$CNe^{-\frac{1}{2T}(m_1\xi_1^2 + \cdots + m_{3k}\xi_{3k}^2)}\, d\mu. \quad \ldots \ldots \quad (98)$$

Hier ist C eine Konstante, deren Wert man angeben kann, wenn man berücksichtigt, daß sich bei Ausführung der Integration nach $\xi_1, \ldots \xi_{3k}$ die Zahl N herausstellen muß.

Wir können nun in der Mannigfaltigkeit (97) ein unendlich kleines Gebiet in der Weise begrenzen, daß innerhalb desselben die kinetische Energie $\frac{1}{2}(m_1\xi_1^2 + \cdots + m_{3k}\xi_{3k}^2)$ zwischen den Werten u und $u + du$ liegt. Offenbar ist die Größe dieses Gebietes dem Intervall du proportional, und kann man für dieselbe schreiben Jdu, wo J eine gewisse Funktion von u ist. Aus (98) ergibt sich dann für die Anzahl der in diesem Bereich enthaltenen Systeme, d. h. derjenigen Systeme, in welchen die k Punkte zusammen eine kinetische Energie zwischen u und $u + du$ haben,

$$CNe^{-\frac{u}{T}}\, Jdu. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (99)$$

Um J zu berechnen, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf denjenigen Teil der Mannigfaltigkeit (97), in welchem

$$\tfrac{1}{2}(m_1 \xi_1^2 + \cdots + m_{3k} \xi_{3k}^2) < u$$

ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Größe desselben der Potenz

$$u^{\frac{3}{2}k}$$

proportional ist und also durch

$$C' u^{\frac{3}{2}k},$$

wo C' unabhängig von u ist, ausgedrückt werden kann. Offenbar ist nun $J du$ das der Zunahme du entsprechende Differential dieser Größe. Folglich ist, wenn wir

$$\tfrac{3}{2}k - 1 = q$$

setzen,

$$J du = \tfrac{3}{2} k C' u^q du.$$

Der Ausdruck (99) verwandelt sich hierdurch in

$$\tfrac{3}{2} k C C' N u^q e^{-\frac{u}{T}} du.$$

Hier wollen wir nun noch die Variable u durch

$$w = \frac{u}{qT} \qquad (100)$$

ersetzen. Wir erhalten dann, indem wir mehrere von u oder w unabhängige Faktoren in einen einzigen zusammenziehen, für die Anzahl der Systeme, in welchen w zwischen w und $w + dw$ liegt,

$$C'' N (w e^{-w})^q dw.$$

Der Koeffizient C'' ist durch die Bedingung bestimmt, daß Integration nach w zwischen den Grenzen 0 und ∞ den Wert N liefern muß.

Die Variable w hat eine einfache Bedeutung. Da die Zahl k der ausgewählten Punkte sehr groß ist, so kann man in (100) q durch $\frac{3}{2}k$ ersetzen. Es wird dann

$$u = \tfrac{3}{2} k T w,$$

d. h., man erhält die kinetische Energie für den betrachteten Teil des Systems, wenn man w mit $\frac{3}{2}kT$ multipliziert.

Die Größe we^{-w}, und also auch die Größe $(we^{-w})^q$ ist ein Maximum für $w = 1$ und wird Null, sowohl für $w = 0$, als auch für $w = \infty$. Da nun dem Wert $w = 1$ die kinetische Energie $u = \frac{3}{2}kT$ entspricht, so sind unter allen Systemen der Menge diejenigen am häufigsten vertreten, in welchen die ausgewählte Gruppe von Punkten gerade die kinetische Energie hat, die derselben im Mittel zukommt.

Stellt man die Funktion we^{-w} durch die Ordinaten einer Kurve dar, so erhält man daraus die graphische Darstellung von $(we^{-w})^q$, wenn man alle Ordinaten durch die q^{te} Potenz ihrer Werte ersetzt. Dabei

treten die kleineren Ordinaten um so mehr im Verhältnis zu der maximalen Ordinate zurück, je größer die Anzahl k der Punkte und also q wird. Sogar die Ordinaten, welche auf der einen oder der anderen Seite in beliebig kleiner Entfernung von $w = 1$ liegen, können im Verhältnis zu der maximalen Ordinate so klein gemacht werden, wie man will, wenn man nur k groß genug wählt. Auch beschränkt sich das Integral

$$\int_0^\infty CN(we^{-w})^q dw,$$

welches die Anzahl der Systeme bedeutet, bei fortwährender Zunahme von q immer mehr auf den Anteil, der ein sehr kleines Intervall in der Nähe von $w = 1$ für dasselbe liefert. Hiermit ist bewiesen, daß bei wachsendem q die Systeme immer mehr in die Nähe von $w = 1$ zusammengedrängt werden. Ist also die betrachtete Gruppe von Punkten sehr zahlreich, dann wird sie in fast allen Systemen der Menge eine kinetische Energie besitzen, die sich kaum von $\frac{3}{2}kT$ unterscheidet.

Was hier von einer ausgewählten Gruppe von Punkten gesagt wurde, gilt natürlich auch für das ganze System und nach den Betrachtungen von Gibbs darf man sich vorstellen, daß auch die gesamte potentielle Energie und andere Größen, die sich nicht auf ein einzelnes Massenteilchen, sondern auf sehr viele Teilchen beziehen, in dem weitaus größten Teil der Menge sehr wenig verschiedene Werte haben.

§ 76. Was die Energie ε der Systeme anbelangt, so müssen wir noch einen wichtigen Punkt besprechen. Während in der Phasenmannigfaltigkeit alle möglichen Werte der Energie vertreten sind, behält jedes individuelle System fortwährend denselben Energieinhalt; es durchläuft daher nicht die volle Phasenmannigfaltigkeit, sondern nur einen Teil derselben. Bei der Besprechung dieses Punktes wollen wir uns eines neuen bildlichen Ausdrucks bedienen. Den Inbegriff aller Phasen, welche einer durch eine einzige Gleichung ausgedrückten Bedingung genügen, wollen wir eine Fläche von Phasen nennen. Speziell verstehen wir unter einer Fläche σ eine solche, die durch einen bestimmten Wert der Energie charakterisiert ist. Den Teil der Phasenmannigfaltigkeit zwischen den Flächen, welche den Energiewerten ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ entsprechen, nennen wir die unendlich dünne Schicht $(d\varepsilon)$. Wenn die Fläche σ gegeben ist, kann man offenbar eine in derselben enthaltene Phase durch $6n - 1$ Größen bestimmen. Nennen wir irgend welche Veränderlichen, die zu diesem Zweck dienen können, $h_1, \ldots h_{6n-1}$, so können wir die Schicht $(d\varepsilon)$ in Elemente teilen, deren jedes einerseits von den Grenzflächen der Schicht und anderseits nach den Größen h begrenzt ist. Für die Größe eines solchen Elementes dürfen wir nun setzen

$$d\lambda = d\sigma\, d\varepsilon, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (101)$$

wenn

$$d\sigma = \left| \frac{\partial (x_1, \ldots \xi_{3n-1}, \xi_{3n})}{\partial (h_1, \ldots h_{6n-1}, \varepsilon)} \right| dh_1 \ldots dh_{6n-1}$$

ist. Offenbar bestimmen nun die Differentiale $dh_1, \ldots dh_{6n-1}$ ein unendlich kleines Gebiet in der Mannigfaltigkeit $(h_1, \ldots h_{6n-1})$, d. h. in der Fläche σ, und wir können das Maß, nach welchem wir dies Gebiet messen wollen, so wählen, daß seine Größe gerade durch obigen Ausdruck $d\sigma$ angegeben wird. Wir wollen $d\sigma$ ein Element der Fläche nennen, und fügen noch hinzu, daß, wenn wir ein in beliebiger Weise begrenztes Element der Fläche, d. h. der Mannigfaltigkeit $(h_1, \ldots h_{6n-1})$ nach demselben Maß wie das soeben betrachtete messen, diesem $d\sigma$ immer nach Gleichung (101) ein $d\lambda$ entspricht.

Ein System, das einmal in einer unendlich dünnen Schicht $(d\varepsilon)$ liegt, kann diese, da die Energie konstant bleibt, nie verlassen. Wenn wir daher die Phasenmannigfaltigkeit in derartige Schichten teilen, so entspricht jeder derselben ein Teil der gesamten Systemmenge, derart, daß zwischen diesen Teilen gar kein Zusammenhang besteht. Wir dürfen nun allen in einer Schicht $(d\varepsilon)$ liegenden Systemen die gleiche Energie zuschreiben, was so viel heißt, als sie alle nach der Fläche σ verlegen. Auf ein Element $d\sigma$ dieser letzteren entfallen dann, wie aus (94) und (101) hervorgeht, $\omega d\sigma$ Systeme, wenn wir

$$\omega = N e^{\frac{\psi - \varepsilon}{T}} d\varepsilon$$

setzen. Diese Größe, die wir die Flächendichte der Verteilung nennen können, hat für alle Elemente der Fläche den gleichen Wert.

Eine solche Verteilung einer gewissen Menge von Systemen über eine Fläche konstanter Energie, mit an allen Stellen gleicher Flächendichte, bezeichnet Gibbs als eine mikrokanonische Verteilung[1]), und wir können nun sagen, die kanonische Verteilung bestehe aus unendlich vielen, sich gleichsam umschließenden mikrokanonischen Verteilungen. Wir wissen aber bereits, daß die große Mehrzahl der Systeme in der kanonisch verteilten Menge eine kaum von dem Mittelwert $\bar{\varepsilon}$ verschiedene Energie besitzt; in der Phasenmannigfaltigkeit liegen sie also in der unmittelbaren Nähe von der entsprechenden Fläche $(\bar{\varepsilon})$ und wir dürfen, wenn n sehr groß ist, indem wir von den verhältnismäßig wenig vorkommenden Abweichungen absehen, die Sache so auffassen, daß alle Systeme über diese Fläche verteilt sind, und zwar mit konstanter Flächendichte. Letzteres geht daraus hervor, daß in jeder der vielen Flächen (ε), über welche die Systeme in Wirklichkeit verteilt sind, die Flächendichte, wie wir sahen, konstant ist, und daß wir jetzt alle diese Flächen in eine einzige zusammenfallen ließen.

---

1) Derartige Verteilungen, die er Ergoden nennt, hatte schon früher Boltzmann betrachtet, siehe seine Vorlesungen über Gastheorie.

Wir schließen aus diesen Betrachtungen, daß man vom experimentellen Standpunkt zwischen einer kanonischen und einer mikrokanonischen Verteilung keinen Unterschied zu machen braucht.

Ich bemerke noch, daß die kanonische Verteilung durch den Modul T, die mikrokanonische, durch welche wir sie ersetzen können, durch den Wert von $\bar{\varepsilon}$ bestimmt ist. Jedem T entspricht ein bestimmtes $\bar{\varepsilon}$, da man, wenn die Natur der Systeme gegeben ist, $\bar{\varepsilon}$ nach der Gleichung (96) berechnen kann.

§ 77. Man kann nun zu einer Ableitung der thermodynamischen Sätze gelangen, wenn man von der Annahme ausgeht, jeder Körper K, an dem wir einen Gleichgewichtszustand beobachten, habe dieselben Eigenschaften wie ein beliebig aus einer gewissen kanonisch oder mikrokanonisch verteilten Menge herausgegriffenes System K'. Zunächst ist hiermit die Existenz des Gleichgewichtes in dem Körper K erklärt. Das System K' würde nämlich bei allen Wandlungen seines inneren Zustandes fortwährend der kanonischen oder mikrokanonischen Verteilung angehören, und wir dürfen daher erwarten, daß beobachtbare Veränderungen sich an ihm nicht zeigen werden, da wir uns vorstellen müssen, daß so gut wie alle Systeme der genannten Menge sich unseren Beobachtungsmitteln gegenüber als gleich erweisen. Der Körper K stimmt aber nach unserer Voraussetzung genau mit K' überein; auch an seinem Zustande werden wir daher keine Veränderung beobachten.

Ebenso wie der Zustand der kanonisch verteilten Menge, zu welcher K' gehört, hängt nun auch der Zustand des Körpers K von der Größe des Moduls T ab. Wir nennen daher T auch den Modul des Körpers. Seine Bedeutung geht daraus hervor, daß, wie man dem in § 73 Gesagten entnehmen kann, ein viele Massenteilchen enthaltendes Volumelement des Körpers eine kinetische Energie besitzt, die pro Teilchen $\frac{3}{2}T$ beträgt. Wenn wir die, wie mir scheint, sehr plausible Annahme machen, daß der innere Zustand des Körpers, eines Kupferstückes z. B., durch den Wert dieser kinetischen Energie bestimmt ist, so ist also T für den inneren Zustand maßgebend.

Ist L ein beliebiger zweiter Körper, so wird auch für diesen ein Gleichgewichtszustand mit dem Modul T existieren können. Wir werden jetzt zeigen, daß die Körper K und L, wenn sie sich in diesen durch den gleichen Modul gekennzeichneten Zuständen befinden, miteinander in Berührung gebracht werden können, ohne daß sich die inneren Zustände ändern, daß also Gleichheit der Werte des Moduls Bedingung für das Wärmegleichgewicht ist.

§ 78. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine neue kanonisch oder mikrokanonisch verteilte Menge von Systemen, wieder mit dem Modul T.

Jedes System dieser Menge enthalte zunächst eine Anzahl von Massenteilchen k, die den materiellen Punkten von K gleich sind, und sodann eine Anzahl von Teilchen l, die genau mit denen des Körpers L übereinstimmen, und zwar mögen die Teilchen k und die Teilchen l in ähnlicher Weise nebeneinander liegen, wie wir die Körper K und L in Berührung bringen wollen. Wir brauchen nicht zu befürchten, daß in den kanonisch verteilten Systemen (k, l) eine Vermischung der beiden Arten von Teilchen in merklichem Grade vorkommen wird. Wir setzen nämlich voraus, daß die wirklichen Körper K und L sich berühren können, ohne sich gegenseitig zu durchdringen. Dies involviert, daß gewisse Kräfte sich der Vermischung widersetzen, und derartige Kräfte werden dann auch bewirken (§ 74), daß in fast allen Systemen (k, l) die aus den Teilchen k und l bestehenden Partien, wir wollen kurz sagen, die Teile k und l nebeneinander liegen.

Man fasse jetzt ein beliebiges der Systeme (k, l) ins Auge. Im Laufe seiner Bewegung bleibt es fortwährend der kanonischen Verteilung angehörend; seine Eigenschaften ändern sich also nicht in wahrnehmbarer Weise. Das gilt auch von dem inneren Zustande von k, sowohl als auch von l, denn jedes Volumelement, sei es von k oder von l, besitzt fortwährend eine kinetische Energie, die pro Massenteilchen $\frac{3}{2} T$ beträgt. Das System (k, l) befindet sich also in einem stationären Zustande; die Körper k und l, die es zusammensetzen, sind miteinander im Temperaturgleichgewicht. Aus dem soeben von der kinetischen Energie im Inneren dieser Körper Gesagten folgt aber, daß der innere Zustand von k und l genau mit dem inneren Zustande übereinstimmt, der in den voneinander getrennten Körpern K und L des vorigen Paragraphen bestand. Diese Körper können also miteinander in Berührung gebracht werden, ohne daß sich der innere Zustand ändert. Hiermit ist bewiesen, daß Gleichheit der Werte des Moduls Bedingung für das Wärmegleichgewicht ist, woraus dann sofort folgt, daß zwei Körper, die mit einem dritten im Gleichgewicht sind, dies auch sind, wenn man sie miteinander in Berührung setzt. Als Temperatur, d. h. als diejenige Größe, deren Wert über das Wärmegleichgewicht entscheidet, können wir nun den Modul oder irgend einen davon abhängigen Zahlenwert betrachten. Indes können wir uns schon jetzt davon überzeugen, daß die in den thermodynamischen Gleichungen vorkommende Temperatur sich nur durch einen konstanten Faktor von dem Modul unterscheiden kann. Wenn wir nämlich das Gefundene auf ein einatomiges Gas anwenden, so finden wir, daß die mittlere kinetische Energie des Moleküls eines solchen den Wert $\frac{3}{2} T$ hat. Anderseits unterliegt es keinem Zweifel, daß diese mittlere kinetische Energie der thermodynamischen Temperatur proportional ist.

§ 79. Bevor wir nun den zweiten Schritt, von dem in § 69 die Rede war, versuchen, müssen wir die Frage beantworten, ob in einer Menge von Systemen eine Tendenz bestehe, eine kanonische oder mikrokanonische Verteilung anzunehmen. Wir können das insofern tun, als wir zeigen können, daß eine in beliebiger Weise über eine Fläche σ konstanter Energie verteilte Systemmenge, sich selbst überlassen, höchstwahrscheinlich einer mikrokanonischen Verteilung zustreben wird.

Zunächst bemerken wir, daß diejenigen Systeme, welche in einem bestimmten Augenblick in einem Elemente $d\sigma$ der Fläche liegen, zu einer beliebigen späteren Zeit in einem Elemente der Fläche, das dieselbe Größe wie $d\sigma$ hat, sich befinden werden, daß, mit anderen Worten, ein Element $d\sigma$, welches der Phasenwanderung der in demselben enthaltenen Systeme folgt, die Größe nicht ändert. Dieser Satz ergibt sich ohne Mühe, wenn wir wieder für einen Augenblick die Fläche σ durch eine unendlich dünne Schicht $(d\varepsilon)$ ersetzen. In einer unendlich kurzen Zeit möge sich das Element $d\sigma$ in $d\sigma'$ verwandeln: dann ist aus dem entsprechenden unendlich kleinen Teil $d\lambda = d\sigma\, d\varepsilon$ der Schicht der Teil $d\lambda' = d\sigma'\, d\varepsilon$ entstanden. Wir fanden aber (§ 72), daß $d\lambda' = d\lambda$ ist. Folglich muß auch $d\sigma' = d\sigma$ sein.

Obgleich nun bei der Phasenänderung ein Element der Fläche fortwährend seine Größe beibehält, kann seine Begrenzung, seine Gestalt, wie wir sagen können, sich im Laufe der Zeit sehr erheblich ändern, ähnlich wie ein Element einer geometrischen Fläche, wenn die Punkte derselben sich über diese verschieben, sehr gut zu einem langen Streifen ausgezogen werden könnte.

Wir teilen nun die Fläche σ in Elemente $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, usw. gleichen Inhalts, die wir als unbeweglich betrachten und so klein annehmen, daß es, was die beobachtbaren Eigenschaften der Menge betrifft, nur auf die Anzahl der Systeme ankommt, die in den einzelnen Elementen enthalten sind, nicht aber auf die Art und Weise, wie die in einem bestimmten Element enthaltenen Systeme über den Inhalt desselben verteilt sind. Zu einer beliebigen Anfangszeit t_0 seien ω_1, ω_2 usw. die Werte der Dichte in $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ usw. Wenn nun die Systeme, welche zu dieser Zeit in einem dieser Elemente $\Delta\sigma$ liegen, zu einer späteren Zeit wieder genau in einem anderen der festgesetzten Elemente sich befänden, so würde man offenbar in diesem späteren Augenblick noch genau dieselbe Verschiedenheit der Dichten beobachten, die anfangs bestand. In Wirklichkeit verhält sich aber die Sache anders. Im Moment t wird irgend ein Element $\Delta\sigma$ Systeme enthalten, die aus vielen anderen Elementen stammen; wir werden in $\Delta\sigma$ kleinere Flächenelemente $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ usw. unterscheiden können, von welchen das erste zur Zeit t_0 einen Teil von $\Delta\sigma_1$ bildete, das zweite einen Teil von $\Delta\sigma_2$, usw.

Diese Elemente enthalten nun $\omega_1 d\sigma_1$, $\omega_2 d\sigma_2$ usw. Systeme und dem Element $\Delta\sigma$, im ganzen genommen, haben wir daher die Dichte

$$\frac{\omega_1 d\sigma_1 + \omega_2 d\sigma_2 + \cdots}{\Delta\sigma}$$

zuzuschreiben. Da nun $d\sigma_1 + d\sigma_2 + \cdots = \Delta\sigma$, so ist dies ein gewisser Mittelwert der ursprünglichen Dichten. In diesem Umstande, daß die später in den Elementen $\Delta\sigma$ bestehenden Dichten Mittelwerte der ursprünglichen sind, liegt offenbar eine Tendenz zur Nivellierung der anfangs bestehenden Differenzen.

Daß nun diese Ausgleichung immer weiter fortschreiten muß, kann man leicht einsehen. Man kann sagen, daß, wie groß man t auch wählen möge, sich immer die Elemente $\Delta\sigma$ in kleinere $d\sigma$ zerlegen lassen, derart, daß in jedem dieser letzteren eine Dichte besteht, die ursprünglich in einem anderen derselben vorhanden war, daß aber diese Elemente $d\sigma$ um so kleiner und so zahlreicher werden, je größer t wird. Am Ende enthält jedes große Element $\Delta\sigma$ Systeme, die von sehr vielen anderen ähnlichen Elementen herrühren. Die Annahme, daß der Endzustand in einer mikrokanonischen Verteilung besteht, ist daher sehr plausibel.

Daß eine Systemmenge, in welcher verschiedene Werte der Energie vorkommen, sich einer kanonischen Verteilung nähert, können wir nicht durch eine ähnliche Schlußfolgerung beweisen. Das verbietet schon der Umstand, daß die in den verschiedenen Flächen konstanter Energie liegenden Systeme ohne jeden Zusammenhang miteinander sind. Während die in jeder Fläche, oder in jeder unendlich dünnen Schicht ($d\varepsilon$) enthaltenen Systeme einer mikrokanonischen Verteilung zustreben, wird an der Art und Weise, wie die Energie über die Systeme verteilt ist, nichts geändert; somit kann in dieser Hinsicht von einer Tendenz zur kanonischen Verteilung die Rede nicht sein.

Hierin liegt jedoch keine Schwierigkeit für die Anwendung, die wir beabsichtigen. Wir werden es dabei mit einer Systemmenge zu tun haben, von der wir bereits wissen, daß fast alle Glieder derselben die gleiche Energie haben. Mit genügender Annäherung werden wir dann sagen können, die Verteilung sei von vornherein auf eine einzige Fläche konstanter Energie beschränkt. Sie nähert sich dann im Laufe der Zeit einer mikrokanonischen, und diese können wir, mit Rücksicht auf die Bequemlichkeit der Rechnung, durch eine kanonische ersetzen. In diesem Sinne wird es erlaubt sein, eine solche als den Endzustand der Menge anzusehen.

§ 80. Um uns nun noch weiter für die Ableitung des zweiten Hauptsatzes vorzubereiten, müssen wir eines Umstandes gedenken, den wir eigentlich schon früher hätten berücksichtigen müssen.

Der Zustand der Körper, mit welchen man sich in der Thermodynamik beschäftigt, ist nicht durch die Temperatur allein gegeben; zur vollständigen Bestimmung desselben ist auch noch eine Angabe über andere Parameter, wie z. B. das Volum, erforderlich. Daher kann die Theorie kanonisch verteilter Mengen nur dann unserem Zweck dienlich sein, wenn wir auch in sie, neben dem Modul, andere jenen Parametern entsprechende Größen einführen. Wie das geschehen kann, liegt auf der Hand. Ein Gas oder eine Flüssigkeit sperren wir in ein bestimmtes Volum ein, indem wir den Zylinder, in dem es sich befindet, durch einen beweglichen Kolben abschließen; dieser verhindert den Körper an der Ausdehnung durch die Kräfte, die er auf die Moleküle ausübt. Demgemäß denken wir uns, daß die Systeme, aus welchen sich die betrachtete Menge zusammensetzt, nicht bloß aus den n Massenteilchen bestehen, von denen im bisherigen die Rede war, sondern außerdem äußere Körper enthalten, welche die Zylinderwände und den Kolben in dem genannten Beispiel repräsentieren sollen, und von welchen Kräfte ausgehen, denen eine gewisse potentielle Energie entspricht. Letztere bildet einen Teil der Gesamtenergie des Systems, und indem nun von denjenigen Anordnungen, in welchen die potentielle Energie einen hohen positiven Wert haben würde, abgesehen werden darf (§ 74), dienen die äußeren Kräfte uns dazu, dem System ein bestimmtes Volum oder eine bestimmte Lage und Gestalt aufzuzwingen.

Wir wollen die Lage der äußeren Körper durch gewisse Größen $a_1, a_2, \ldots$ bestimmen und von diesen Koordinaten annehmen, daß sie für alle Systeme der Menge gleiche Werte haben. Während nämlich die Vorstellung einer großen Anzahl über die Phasenmannigfaltigkeit verteilter Systeme den Zweck hatte, der großen Verschiedenheit in den Anordnungen und Bewegungen der Moleküle, welche nacheinander in einem Körper bestehen können, Rechnung zu tragen, besteht eine solche Verschiedenheit, was die äußeren Parameter betrifft, nicht.

Der potentielle Teil der Energie ε hängt nun für jedes System nicht nur von den Koordinaten $x_1, \ldots x_{3n}$ der materiellen Punkte, sondern überdies von $a_1, a_2, \ldots$ ab, und wenn wir ihn nach diesen Größen differentiieren, erhalten wir die mit dem negativen Vorzeichen genommenen von dem System auf die äußeren Körper ausgeübten Kraftkomponenten. Da nun die kinetische Energie von den a nicht abhängt, so können wir für die Kraftkomponenten auch setzen

$$A_1 = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}, \qquad A_2 = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2}, \ldots$$

Diese Ausdrücke hängen von $x_1, \ldots x_{3n}$ ab und sind also für die verschiedenen Systeme nicht gleich. Indes dürfen wir uns vorstellen, daß sich die individuellen Werte von den Mittelwerten

$$\bar{A}_1 = -\overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}}, \qquad \bar{A}_2 = -\overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2}}, \ldots \qquad (102)$$

in der Mehrzahl der Systeme nur unbedeutend entfernen.

Ich füge noch die Bemerkung hinzu, daß die Betrachtungen der vorhergehenden Paragraphen etwas an Strenge gewonnen haben würden, wenn wir schon früher die äußeren Körper in Betracht gezogen hätten. Wir hätten dann den Zustand der Systeme, die wir in § 78 miteinander in Berührung brachten, etwas genauer festsetzen können. Ich habe jedoch absichtlich die einfachere Darstellung gewählt, um das Wesentliche in der Beweisführung besser hervortreten zu lassen.

§ 81. Der thermodynamische Satz, daß $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential ist, gilt für eine langsame Zustandsänderung eines Körpers, bei der ein Gleichgewichtszustand in einen unendlich wenig davon verschiedenen übergeht. Um ihn zu beweisen, machen wir wieder nicht einen einzigen Körper, sondern eine Menge, in der er sich viele Male wiederholt, zum Gegenstand der Untersuchung. Diese Menge sei anfangs bei bestimmten Werten des Moduls T, sowie der Koordinaten $a_1, a_2, \ldots$ kanonisch, oder wie wir auch sagen können, mikrokanonisch verteilt, und wir wollen nun die Größen $a_1, a_2, \ldots$ sich langsam ändern lassen, und zwar bei allen Systemen der Menge in gleicher Weise. Da wir die Kraftkomponenten $A_1, A_2, \ldots$ bei allen Systemen als gleich betrachten dürfen, so leisten bei dieser Verschiebung der äußeren Körper alle Systeme die gleiche Arbeit. Während sich schon hierdurch ihre Energie ändert, bewirken wir dies gleichzeitig auch noch dadurch, daß wir die Bewegung der einzelnen Massenteilchen in den Systemen direkt durch geeignete Kräfte beeinflussen; in der Arbeit dieser Kräfte haben wir das zu erblicken, was man die zugeführte Wärmemenge nennt. Auch sie soll sich in den verschiedenen Systemen nur unbedeutend von einem für die gesamte Menge geltenden Mittelwert entfernen.

Unsere Voraussetzungen haben zur Folge, daß die Energie der verschiedenen Systeme fortwährend als gleich betrachtet werden kann; in der Phasenmannigfaltigkeit liegen sie also stets auf derselben Fläche (ε), die sich aber allmählich verschiebt.

Alle die genannten Änderungen, die der Koordinaten $a_1, a_2, \ldots$ sowohl als auch die Wärmezufuhr, nehmen wir in so langsamem Tempo vor, daß der Menge Zeit gelassen wird, stets wieder eine mikrokanonische Verteilung anzunehmen (§ 79); wir dürfen dann sagen, daß eine solche, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine kanonische Verteilung in jedem Augenblick existiert.

§ 82. Nach einer gewissen Zeit, während welcher in jedem System viele verschiedene Phasen in raschem Wechsel aufeinander gefolgt sind,

ist nun eine neue kanonische Verteilung entstanden, die sich von der ursprünglichen dadurch unterscheidet, daß die Koordinaten $a_1, a_2, \ldots$ und die mittlere kinetische Energie $\bar{\varepsilon}$ sich unendlich wenig verändert haben. Gleiches gilt dann auch von T und ψ, da bei gegebenen $a_1, a_2, \ldots$ die Energie den tatsächlich erreichten Wert nur bei einem bestimmten Modul haben kann, und da ferner, wie die Formel (95) zeigt, ψ von $T, a_1, a_2, \ldots$ abhängt. Wir bezeichnen die Änderungen der genannten Größen mit einem vorgesetzten d, die einem bestimmten System zugeführte Wärmemenge mit dQ und betrachten zunächst den Mittelwert $\overline{dQ}$.

Da die von einem System geleistete Arbeit den Wert

$$A_1\,da_1 + A_2\,da_2 + \cdots$$

hat, so hat man

$$\overline{dQ} = \overline{d\varepsilon} + \bar{A}_1\,da_1 + \bar{A}_2\,da_2 + \cdots,$$

oder nach (102), da $\overline{d\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}$ ist,

$$\overline{dQ} = d\bar{\varepsilon} - \overline{\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_1}}\,da_1 - \overline{\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_2}}\,da_2 - \cdots,$$

und mit Rücksicht auf die Formel (96)

$$\overline{dQ} = d\bar{\varepsilon} - \int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_1}\,da_1 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial a_2}\,da_2 + \cdots\right)d\lambda. \quad . \quad (103)$$

Zu einer Umformung dieses Ausdrucks führt nun die Bemerkung, daß sowohl vor als auch nach der Änderung des stationären Zustandes

$$\int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}}\,d\lambda = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

ist. Das Differential dieser Größe, in welcher die bei der Integration als konstant zu betrachtenden Größen $a_1, a_2, \ldots, T$ und ψ vorkommen, ist daher Null; folglich, wenn man unter dem Integralzeichen nach diesen Größen differentiiert,

$$\int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}}\,d\left(\frac{\psi}{T}\right)d\lambda + \int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}}\,\frac{\varepsilon}{T^2}\,dT\,d\lambda$$
$$-\int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}}\,\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_1}\,da_1 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial a_2}\,da_2 + \cdots\right)d\lambda = 0. \quad . \quad (105)$$

In dem ersten Integral ist $d\left(\frac{\psi}{T}\right)$ unabhängig von den Integrationsvariablen $x_1, \ldots \xi_{3n}$, so daß dieses Integral, wegen der Gleichung (104), den Wert $d\left(\frac{\psi}{T}\right)$ hat. Für das zweite Integral findet man leicht $\frac{\bar{\varepsilon}}{T^2}\,dT$,

und es ergibt sich also, wenn man (103) mit T dividiert und den Wert des letzten Gliedes der Gleichung (105) entnimmt,

$$\frac{\overline{dQ}}{T} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{T} - d\left(\frac{\psi}{T}\right) - \frac{\bar{\varepsilon}}{T^2}\,dT = d\left(\frac{\bar{\varepsilon} - \psi}{T}\right), \quad . \; . \; . \quad (106)$$

womit der Satz, daß $\frac{\overline{dQ}}{T}$ ein vollständiges Differential ist, bewiesen ist.

Indem wir nun wieder auf einen einzigen Körper anwenden, was von den Mittelwerten für alle Körper der Menge gilt, was wir tun dürfen, weil sich die Werte von dQ und ε für jenen Körper von $\overline{dQ}$ und $\bar{\varepsilon}$ nur unerheblich unterscheiden werden, gewinnen wir den zweiten Hauptsatz auch für jenen einzelnen Körper in der Gestalt

$$\frac{dQ}{T} = d\left(\frac{\varepsilon - \psi}{T}\right).$$

Man sieht hieraus, daß der Modul T, oder dieser Modul, mit einer beliebigen Konstante multipliziert, die Bedeutung der thermodynamischen Temperatur hat, und daß man als Entropie die Größe

$$\eta = \frac{\varepsilon - \psi}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (107)$$

zu betrachten hat. Da hieraus folgt

$$\psi = \varepsilon - T\eta,$$

so hat ψ die Bedeutung der freien Energie (vgl. § 20).

§ 83. Hiermit wäre auch der zweite der in § 69 unterschiedenen Schritte vollzogen. Was nun schließlich den dritten betrifft, d. h. die Erweiterung des Entropiebegriffs auf nicht stationäre Zustände eines Körpers, so liegt es nahe, an nicht kanonische Verteilungen einer Menge von Systemen zu denken. Man kann bei jeder Verteilung über die Phasenmannigfaltigkeit die Dichte ϱ (§ 71) in der Gestalt

$$Ne^{-\eta}$$

darstellen, wo η in irgend einer Weise von den Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten abhängt. Man könnte nun, und dies würde der Festsetzung (107) entsprechen, den Mittelwert von η als die Entropie der betrachteten nicht kanonischen Verteilung definieren.

Jedoch wäre damit noch keine Definition der Entropie für nicht stationäre Zustände eines Körpers gewonnen. Eine solche Definition muß nämlich angeben, wie die Entropie von dem Zustande des Körpers abhängt, und das geschieht denn auch wirklich in der Gleichung (107), da wir, wenn uns ein Körper im stationären Zustande gegeben ist, uns nur eine einzige kanonisch verteilte Menge denken können, in welcher ein genau mit dem Körper übereinstimmendes System vorkommt. Man sieht aber nicht, in welcher Weise eine nicht kanonische Verteilung da-

durch bestimmt sein könnte, daß uns ein Körper in einem nicht stationären Zustande gegeben ist. Vielleicht kann diese Schwierigkeit dadurch beseitigt werden, daß man den Körper in eine sehr große Anzahl von Volumelementen teilt, deren jedes gleich viel Massenteilchen, und zwar sehr viele enthält, und daß man diese als die Individuen in einer Systemmenge betrachtet. Bei dieser Auffassung ist der Körper nicht ein Glied einer solchen Menge, sondern die Menge selbst, und kann man seine Entropie in der soeben angegebenen Weise definieren und untersuchen, welche Eigenschaften derselben zukommen. Ich muß mich jedoch auf diese Andeutung beschränken, da in der weiteren theoretischen Untersuchung nicht stationärer Zustände noch sehr viel zu tun übrig bleibt.

Dies gilt übrigens auch von den stationären Zuständen, und es braucht kaum bemerkt zu werden, daß die Ableitung des zweiten Hauptsatzes aus der Theorie kanonisch verteilter Systemmengen, namentlich was die Strenge der Beweisführung betrifft, noch mancher Verbesserung bedarf. Nichtsdestoweniger darf man, wie mir scheint, die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes auf die Prinzipien der Mechanik, die in den Betrachtungen von Gibbs enthalten ist, als im wesentlichen gelungen betrachten.

§ 84. Ich schließe damit, daß ich aus der Theorie von Gibbs zwei sich auf Gase beziehende Folgerungen ableite. Erstens will ich zeigen, wie sie für einatomige Gase zu dem Maxwell'schen Gesetze für die Geschwindigkeitsverteilung führt.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das Gas sehr viele Male wiederholt, so daß eine kanonisch verteilte Menge entsteht. Indem wir nun die Integration über alle möglichen Konfigurationen ausführen, erhalten wir für die Anzahl der Systeme, in welchen die Geschwindigkeiten der n Moleküle zwischen den Grenzen

$$\xi_1 \text{ und } \xi_1 + d\xi_1, \ldots \qquad \xi_{3n} \text{ und } \xi_{3n} + d\xi_{3n}$$

eingeschlossen sind, einen Ausdruck von der Form

$$CNe^{-\frac{m}{2T}(\xi_1^2 + \cdots + \xi_{3n}^2)} d\xi_1 \ldots d\xi_{3n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

wo mit m die für alle Moleküle gleiche Masse bezeichnet ist.

Wir können nun die $3n$-fache Mannigfaltigkeit $(\xi_1, \ldots \xi_{3n})$ als aus n drei-dimensionalen Räumen bestehend betrachten, deren jeder einem Molekül des Systems entspricht und in welchen die Geschwindigkeitskomponenten des betreffenden Moleküls durch die Koordinaten $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \ldots (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$ eines Punktes dargestellt werden. Diese Punkte mögen Geschwindigkeitspunkte heißen; ihre Entfernungen $r_1, \ldots r_n$, jedesmal von dem Koordinatenursprung in dem betreffenden Raum geben die Größe der Molekulargeschwindigkeiten an. Da nun der Exponent in (108)

lediglich von $r_1^2 + \ldots + r_n^2$ abhängt, so findet man, indem man in jedem der genannten Räume eine unendlich dünne kugelförmige Schicht mit ihrem Mittelpunkt im Koordinatenursprung betrachtet, daß in

$$C' N e^{-\frac{m}{2T}(r_1^2 + \cdots r_n^2)} r_1^2 \ldots r_n^2 \, dr_1 \ldots dr_n \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Systemen die Geschwindigkeiten der n Moleküle zwischen

$$r_1 \text{ und } r_1 + dr_1, \ldots \qquad r_n \text{ und } r_n + dr_n$$

liegen. Die Konstante C' ist durch die Bedingung bestimmt, daß, wenn man nach $r_1, \ldots r_n$ zwischen 0 und ∞ integriert, die Gesamtzahl N der Systeme sich herausstellen muß.

Den Ausdruck (109) können wir nun ferner noch dadurch umformen, daß wir jedem r eine Größe s nach der Gleichung

$$\sqrt{\frac{2m^3}{\pi T^3}} \int_0^r e^{-\frac{m}{2T}r^2} r^2 dr = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

zuordnen. Die den Einzelwerten $r_1, \ldots r_n$ entsprechenden Werte nennen wir $s_1, \ldots s_n$. Aus (110) folgt

$$e^{-\frac{m}{2T}r^2} r^2 dr = \sqrt{\frac{\pi T^3}{2m^3}} \, ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

und wir erhalten daher, wenn C'' eine neue Konstante ist, aus (109)

$$C'' ds_1 \ldots ds_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

für die Anzahl der Systeme, bei welchen die neuen die Geschwindigkeiten der n Moleküle bestimmenden Größen zwischen den Grenzen

$$s_1 \text{ und } s_1 + ds_1, \ldots \qquad s_n \text{ und } s_n + ds_n$$

liegen. Jede dieser Größen bewegt sich dabei in dem Intervall von 0 bis 1, da nach (110) für $r = 0$ auch $s = 0$ und für $r = \infty$, wegen der Wahl des vor das Integral gesetzten Koeffizienten, $s = 1$ ist.

Es ist nun möglich, in einer einzigen Figur die Geschwindigkeiten aller Moleküle in allen den N Systemen darzustellen, und zwar in der Weise, daß man auf einer geraden Linie von einem festen Punkt aus Strecken abschneidet, die den verschiedenen Werten s gleich sind. Den Endpunkt einer solchen Strecke nennen wir den s-Punkt des betreffenden Moleküls.

Der Umstand, daß in (112) das Produkt der Differentiale mit einer Konstanten multipliziert ist, zeigt an, daß die s-Punkte, welche ein bestimmtes Molekül in den verschiedenen Systemen hat, gleichförmig über eine Strecke von der Länge Eins verteilt sind, ganz unabhängig von der Lage der s-Punkte der übrigen Moleküle. Es ist also, als ob man allen Molekülen in allen Systemen Werte von s zuerteilt hätte, die man aufs Geratewohl zwischen 0 und 1 gewählt hat, derart, daß die Wahr-

scheinlichkeit dafür, daß der s-Punkt auf einem bestimmten Teil der genannten Strecke liegt, für gleiche Teile dieser letzteren gleich groß ist. Daraus folgt aber unmittelbar, daß die s-Punkte, welche den Molekülen eines bestimmten Systems zukommen, gleichförmig zwischen den extremen Lagen 0 und 1 verteilt sein werden. Unter den n Molekülen des Gases wird es also $n\,ds$ Teilchen geben, für welche s zwischen s und $s + ds$ liegt. Mit Rücksicht auf die Beziehung (111) kann man hieraus schließen, daß

$$\sqrt{\frac{2m^3}{\pi T^3}}\, n\, e^{-\frac{m}{2T}r^2} r^2\, dr$$

Moleküle eine Geschwindigkeit zwischen r und $r + dr$ haben. Damit ist das Maxwell'sche Gesetz bewiesen.

§ 85. Unsere letzte Folgerung wird sich auf ein mehratomiges Gas beziehen. Wir könnten hier, ähnlich wie wir soeben das Maxwell'sche Gesetz abgeleitet haben, zu der von Boltzmann gefundenen Zustandsverteilung gelangen; dies wollen wir jedoch dahingestellt sein lassen. Ich beschränke mich darauf nachzuweisen, daß die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung eines mehratomigen Moleküls, ebenso wie die eines einatomigen, im Mittel den Wert $\frac{3}{2}T$ hat.

Wir wählen in den Systemen einer kanonisch verteilten Menge eine beliebige Gruppe von Teilchen, etwa die k ersten, zur Betrachtung aus und fassen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt derselben ins Auge. Die kinetische Energie, welche dieser Punkt haben würde, wenn in ihm die Masse M der k Punkte vereinigt wäre, beträgt

$$\varepsilon' = \frac{(m_1 \xi_1 + \cdots + m_{3k} \xi_{3k})^2}{2M}.$$

Den Mittelwert dieser Größe findet man leicht, wenn man beachtet, daß bei der kanonischen Verteilung die Mittelwerte der Produkte $\xi_1 \xi_2$, $\xi_1 \xi_3$ usw. gleich Null sind, während

$$\tfrac{1}{2} m_1 \overline{\xi_1^2} = \cdots = \tfrac{1}{2} m_{3k} \overline{\xi_{3k}^2} = \tfrac{1}{2} T$$

ist. Daraus folgt

$$\overline{\varepsilon'} = \frac{m_1^2 \overline{\xi_1^2} + \cdots + m_{3k}^2 \overline{\xi_{3k}^2}}{2M} = \frac{m_1 + \cdots + m_{3k}}{M} \cdot \tfrac{1}{2} T,$$

oder, da $m_1 + \cdots + m_{3k} = 3M$ ist,

$$\overline{\varepsilon'} = \tfrac{3}{2} T,$$

was wir beweisen wollten.

Man könnte diesen Satz z. B. auf ein kleines in einer Flüssigkeit suspendiertes Körperchen, an dem man die sogenannte Brown'sche Bewegung beobachtet, anwenden. Er gilt auch sofort für mehratomige Moleküle, da wir für die k Teilchen, von welchen die Rede war, die in einem solchen enthaltenen Atome nehmen können. Hierbei verdient

es Beachtung, daß nach dem in § 73 bewiesenen Satze auch jedes Atom für sich im Mittel die kinetische Energie $\overline{\varepsilon'}$ hat; die mittlere kinetische Energie der relativen Bewegung der k Atome in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt beträgt daher $(k-1)\overline{\varepsilon'}$.

Ich erwähne diese schon vor vielen Jahren von Boltzmann bewiesenen Sätze, weil in denselben die größte Schwierigkeit liegt, mit der man in der kinetischen Theorie zu kämpfen hat, eine Schwierigkeit, die auch auf die molekulartheoretische Ableitung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik ihren Schatten wirft. Sie zeigt sich, wenn man die experimentell gefundenen Werte des Verhältnisses $\varkappa$ der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und bei konstantem Volum mit dem, was die Theorie verlangt, vergleicht. Bei Temperaturerhöhung nimmt $\overline{\varepsilon'}$ zu und muß die gesamte kinetische Energie des Moleküls den k-fachen Zuwachs erleiden. Hieraus erhält man, wenn man von der Zunahme der potentiellen Energie absieht, für das genannte Verhältnis den Wert $\varkappa = 1 + \frac{2}{3k}$, während sich ein noch kleinerer Wert ergibt, wenn man die Änderung der potentiellen Energie mit berücksichtigt. In Wirklichkeit sind aber die Werte von $\varkappa$ durchgängig größer als $1 + \frac{2}{3k}$.

Diese Schwierigkeit besteht indes nur für mehratomige Moleküle. Sie braucht uns, wie mir scheint, nicht abzuhalten, jedem kleinen Teilchen, das sich wie ein einziger freier materieller Punkt bewegt, die kinetische Energie $\frac{3}{2}T$ beizulegen, und also z. B., wie man das in neueren Theorien oft getan hat, den freien Elektronen in einem Metall eine mittlere kinetische Energie von derselben Größe zuzuschreiben, wie die mittlere kinetische Energie, die ein Gasmolekül infolge seiner fortschreitenden Bewegung hat.

XII.

Über die Symmetrie der Kristalle.

(Den Vorlesungen des Verfassers entnommen.)

---

§ 1. Die nachstehenden Betrachtungen verfolgen den Zweck, in möglichst einfacher Weise den von *Hessel* herrührenden und von vielen späteren Forschern aufs neue abgeleiteten Satz zu beweisen, nach welchem alle Kristalle sich auf Grund ihrer Symmetrieverhältnisse in 32 Klassen einteilen lassen. Dabei stellen wir die physikalischen Eigenschaften, zu welchen allerdings auch das Auftreten von Grenzflächen bestimmter Richtung zu rechnen ist, in den Vordergrund. In den meisten Paragraphen werden wir übrigens gar nicht an Grenzflächen zu denken haben und können uns vielmehr den Kristall als nach allen Richtungen hin beliebig weit ausgedehnt vorstellen.

Wir nehmen an, daß die betrachteten Körper *homogen* sind. Dies bedeutet, daß, wenn wir aus der Kristallmasse zwei Teile abtrennen, die von gleichen und gleich gelagerten Flächen begrenzt sind, so daß die Begrenzung des einen Teils durch Parallelverschiebung in die des andern übergeht, zwischen diesen Teilen in keiner Weise eine Verschiedenheit nachgewiesen werden kann.

§ 2. Zwei Körper A und B nennen wir *kongruent*, wenn zwischen einem beliebigen Teil von A und einem Teil von B von solcher Lage, daß die Begrenzungen durch Parallelverschiebung ineinander übergehen, keine Verschiedenheit beobachtet werden kann.

Die in dieser Weise definierte Kongruenz bleibt bestehen, wenn man einen der Körper verschiebt; im allgemeinen geht sie aber bei einer Drehung verloren.

§ 3. Zwei Körper A und B können auch solcher Art sein, daß man den einen das *Spiegelbild* des andern in bezug auf irgend eine Ebene V nennen kann. Damit soll gesagt sein, daß Teile von A und B, die sich, was die geometrische Begrenzung betrifft, wie Gegenstand und Spiegelbild verhalten, auch in bezug auf ihre physikalischen Eigenschaften als solche betrachtet werden können. Welche Bedeutung man diesen letzteren Worten beizulegen hat, ist in gewissen Fällen ohne weiteres klar, in andern durch geeignete Definition festzusetzen. Jedenfalls involviert unsere Aussage, daß, insofern die physikalischen Vor-

gänge in A und B eine Darstellung mittels geometrischer Figuren zulassen, die Figuren, welche sich auf B beziehen, die Spiegelbilder der entsprechenden für A geltenden Figuren sein müssen.

Wir setzen voraus, daß alle Eigenschaften des Körpers B vollständig dadurch bestimmt sind, daß man ihn das Spiegelbild des gegebenen Körpers A in bezug auf eine gegebene Ebene V nennt, und wir sagen auch zur Abkürzung, der Körper B „entstehe“ durch Spiegelung von A an dieser Ebene.

Aus dem Gesagten schließt man ohne Mühe, daß die Körper, welche durch Spiegelung von A an zwei parallelen Ebenen V und V' entstehen, unter sich kongruent sind. Ebenso, daß, wenn B und B' die Körper sind, welche durch Spiegelung von A an zwei sich in der Linie L unter einem Winkel φ schneidenden Ebenen V und V' erhalten werden, B durch eine Drehung 2φ um L in B' übergeführt werden kann. Man überzeugt sich hiervon, wenn man beachtet, daß A und B spiegelbildlich gleich bleiben müssen, wenn man diesen Körpern Bewegungen erteilt, deren eine das Spiegelbild der andern in bezug auf V ist. Man wähle für diese Bewegungen Rotationen φ von entgegengesetzter Richtung um die Achse L, und erteile sodann dem ganzen, aus A, B und der Ebene V bestehenden System eine gemeinschaftliche Rotation φ in solcher Richtung, daß A in die Anfangslage zurückkehrt. Dann entsteht aus V eine Ebene, die mit der ursprünglichen den Winkel φ einschließt, während B eine Lage B' annimmt, die von der ursprünglichen aus durch eine Drehung 2φ erreicht wird.

§ 4. Es sei wieder A irgend ein Körper und B das Spiegelbild desselben in bezug auf die Ebene V. Man erteile letzterem Körper eine Rotation von 180°, um irgend eine senkrecht zur Ebene V stehende und dieselbe in dem Punkt O schneidende Achse L. Von dem Körper C, den man dadurch erhält, wollen wir sagen, daß er *invers* zu dem ursprünglichen Körper A ist.

Indem man der Ebene V und der senkrecht zu ihr stehenden Achse L verschiedene Lagen gibt, kann man verschiedene Körper C erhalten, die alle invers zu ein und demselben Körper A sind. Es kann nun gezeigt werden, daß alle diese Körper unter sich kongruent sind.

Sind die Ebenen V, V', an welchen in zwei Fällen gespiegelt wird, parallel, und also auch die Drehungsachsen L, L', so folgt die Kongruenz der erhaltenen Körper C, C' sofort aus der Erwägung, daß eine Rotation um L' einer gleichen Rotation um L, verbunden mit einer Translation, äquivalent ist. Wir haben also nur noch den Fall zu betrachten, in welchem einmal an einer Ebene V und dann an einer dieselbe schneidenden Ebene V' gespiegelt wird.

Wir bezeichnen mit O einen Punkt der Schnittlinie OP der Ebenen V

und V', mit OL und OL' die von demselben nach beliebigen Seiten gezogenen Normalen, mit φ den Winkel zwischen diesen Linien. Entstehen nun aus einem Körper A durch Spiegelung an V und V' die Körper B und B', und aus diesen durch Drehung über 180° um OL bzw. OL' die Körper C und C', so haben wir zu zeigen, daß diese beiden unter sich kongruent sind. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß man in drei Schritten von C zu C' gelangen kann. Man erhält zunächst B, indem man dem Körper C eine Rotation von 180° um OL erteilt. Sodann verwandelt eine Rotation 2φ um die Achse OP, und zwar in solcher Richtung, daß die halbe Drehung φ OL in OL' überführt, B in B', worauf man schließlich, um C' zu erhalten, noch eine Rotation von 180° um die Achse OL' vornehmen muß. Um nun einzusehen, daß C' dem Körper C kongruent ist, hat man nur zu bedenken, daß jede Linie in einem System, welchem man die genannten drei Drehungen gibt, in die ursprüngliche Lage zurückkehrt; es genügt, dies für zwei der ursprünglich mit OL, OL' und OP zusammenfallenden Linien zu zeigen.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Beziehung zwischen zwei Körpern, welche wir durch das Wort invers andeuten, ganz unabhängig ist von der Lage einer bestimmten Ebene oder einer bestimmten Achse. Durch eine Drehung von 180° um eine *beliebige* Achse und eine Spiegelung an einer zu dieser Achse senkrechten Ebene geht immer der eine Körper in einen dem andern kongruenten über.

Wir bemerken noch, daß korrespondierende geometrische Figuren in zwei inversen Körpern solche Lagen haben, daß alle Verbindungslinien zweier korrespondierender Punkte durch ein und denselben Punkt gehen und von diesem halbiert werden.

§ 5. Wenn wir von einer Richtung in einem Kristall reden, werden wir immer die beiden entgegengesetzten Richtungen, in welchen man längs einer geraden Linie fortschreiten kann, voneinander unterscheiden.

In jedem der in §§ 2, 3 und 4 genannten Fälle sprechen wir von *korrespondierenden* Richtungen in den Körpern A und B, bzw. C. In zwei kongruenten Körpern fallen solche Richtungen zusammen, in zwei spiegelbildlich gleichen Systemen erhält man die mit einer gegebenen Richtung korrespondierende Richtung durch Spiegelung, in zwei inversen Körpern sind korrespondierende Richtungen einander entgegengesetzt.

§ 6. Viele Kristalle haben die Eigenschaft, daß, wenn man von einer Lage P ausgeht, eine andere Lage Q gefunden werden kann, derart, daß der Kristall in der Lage Q mit sich selbst in der Lage P in dem in § 2 definierten Sinne kongruent ist. Mit einer „anderen" Lage ist hier eine solche gemeint, die nicht durch eine Parallelverschiebung aus der

ursprünglichen erhalten werden kann; Lagen, die durch eine Translation ineinander übergehen, werden als nicht voneinander verschieden angesehen.

Hat man eine Lage Q gefunden, die in der genannten Weise zu der ursprünglichen Lage P paßt, so können wir nach einem bekannten Satze der Kinematik eine Achse von bestimmter Richtung angeben, um welche man den Kristall in einer bestimmten Richtung über einen bestimmten Winkel ϑ zu drehen hat, um die Lage P in die Lage Q überzuführen.

Eine solche Achse nennen wir eine *Symmetrieachse erster Art* oder kurz eine Achse erster Art, und ϑ ihren Drehungswinkel; wir benutzen für dieselbe die Bezeichnung a oder $a(\vartheta)$.

Man sieht leicht, daß, wenn durch die Rotation ϑ in der einen Richtung eine Lage Q erhalten wird, in welcher der Kristall mit sich selbst in der ursprünglichen Lage P kongruent ist, eine von P aus stattfindende Drehung ϑ in entgegengesetzter Richtung zu einer Lage Q' führt, von der dasselbe gilt. Wenn man nämlich zwei kongruente Kristalle, von denen der eine die Lage P und der andere die Lage Q hat, beide um den Winkel ϑ in der zuletztgenannten Richtung dreht, wobei die Kongruenz bestehen bleibt, so erhält der zweite die Lage P und der erste die Lage Q'.

Man braucht daher, wenn von dem Winkel ϑ die Rede ist, die Richtung der Drehung nicht anzugeben.

§ 7. Die Erfahrung hat ferner gezeigt, daß in manchen Fällen, wenn man von einer bestimmten Lage P ausgeht, eine andere Lage Q gefunden werden kann, derart, daß der Kristall in dieser Lage sich selbst in der ursprünglichen Lage invers ist.

Der Übergang von P in Q kann durch Drehung um eine Achse von bestimmter Richtung über einen bestimmten Winkel ϑ vollzogen werden. Eine derartige Achse nennen wir eine *Symmetrieachse zweiter Art* oder kurz eine Achse zweiter Art. Wir bezeichnen sie mit b oder, indem wir auch den Drehungswinkel in das Symbol aufnehmen, mit $b(\vartheta)$. Den Sinn der Drehung brauchen wir auch jetzt nicht anzugeben.

Die Symmetrieachsen sowohl der ersten als auch der zweiten Art, haben feste Richtungen in der Materie des Kristalls.

Zur Abkürzung wollen wir gelegentlich den Kristall in der Lage P mit dem einzelnen Buchstaben P bezeichnen. Auch nennen wir zwei Lagen kongruent oder invers, wenn der Kristall in der einen Lage dem Körper in der andern Lage kongruent, bzw. invers zu ihm ist.

§ 8. Man sagt, ein Kristall habe ein *Symmetriezentrum*, wenn er in einer beliebigen Lage zu sich selbst in eben dieser Lage invers ist.

Besteht diese Eigenschaft, dann fällt offenbar der Unterschied der zweierlei Achsen fort, d. h. jede Symmetrieachse ist sowohl von der ersten als auch von der zweiten Art.

Umgekehrt, sobald man dies von *einer* Achse weiß, muß der Körper ein Symmetriezentrum haben; die Rotation ϑ um die Achse, von einer Lage P aus, führt dann nämlich zu einer Lage Q derart, daß Q zu gleicher Zeit kongruent mit der Lage P und invers zu ihr ist. Aus der Tatsache, daß *eine* Achse sowohl von der ersten als auch von der zweiten Art ist, folgt daher, daß gleiches von *allen* Achsen gilt.

Wir können das Ergebnis auch so ausdrücken: Hat ein Kristall mehr als ein Achse, so ist entweder jede Achse von beiden Arten (Kristalle mit Symmetriezentrum) oder jede Achse ist nur von einer Art (Kristalle ohne Symmetriezentrum).

§ 9. Durch wiederholte Drehungen ϑ um eine Achse $a(\vartheta)$ erhält man eine Reihe von Lagen derart, daß der Kristall in allen diesen Lagen mit sich selbst in der ersten Lage kongruent ist.

Dagegen gelangt man durch wiederholte Drehungen ϑ um eine Achse $b(\vartheta)$ zu einer Reihe von Lagen, in welchen der Körper abwechselnd mit sich selbst in der ursprünglichen Lage kongruent und zu sich selbst in dieser Lage invers ist. Sind z. B. P_1, P_2, P_3 aufeinanderfolgende Lagen, so sind sowohl P_1 als auch P_3 invers zu P_2; folglich sind sie unter sich kongruent.

Da also eine Rotation 2ϑ den Kristall in eine Lage bringt, in welcher er mit sich selbst in der Anfangslage kongruent ist, so schließen wir: Eine Achse zweiter Art mit dem Drehungswinkel ϑ ist zu gleicher Zeit eine Achse erster Art mit dem Drehungswinkel 2ϑ.

§ 10. Wenn man von einer bestimmten Lage P eines Kristalls ausgeht, so gibt es immer nur eine *endliche* Anzahl von anderen Lagen, in welchen er mit sich selbst in der Lage P kongruent ist. Daraus folgt, daß der Drehungswinkel ϑ kommensurabel mit 360^0 ist. Wäre er das nicht, so könnte man durch fortgesetzte Rotationen ϑ um eine Achse erster, bzw. 2ϑ um eine Achse zweiter Art, eine unendliche Anzahl von Lagen finden, in welchen der Kristall mit sich selbst in der ersten Lage kongruent ist.

Es ist daher stets

$$\vartheta = \frac{m}{n} \times 360^0, \tag{1}$$

wo m und n ganze Zahlen, und zwar relative Primzahlen sind. Da wir, ohne die Allgemeinheit zu vermindern, von Rotationen, die größer als 360^0 sind, absehen dürfen, so können wir annehmen, daß

$$m < n$$

ist.

Wir wollen noch bemerken, daß für eine Achse, die nur von der zweiten Art ist, n notwendig eine gerade Zahl sein muß. Dies geht daraus hervor, daß man nach n-maliger Drehung um den Winkel ϑ zu der ursprünglichen Lage zurückkehrt und also einen Körper erhält, der vollkommen mit dem gegebenen übereinstimmt; dies ist bei einer Achse, die bloß von der zweiten Art ist, nur möglich, wenn die Anzahl der Drehungen gerade ist.

Da nach unserer Voraussetzung m und n relative Primzahlen sind, so muß, wenn n gerade ist, m notwendig ungerade sein.

§ 11. Hat der Kristall eine Achse erster Art mit dem Drehungswinkel (1), so kehrt man nach n-maliger Rotation um diesen Winkel wieder zu der ursprünglichen Lage zurück. Die Lagen, zu denen man in dieser Weise gekommen ist, erhält man offenbar auch, wenn auch in anderer Reihenfolge, durch wiederholte Rotation um den Winkel

$$\frac{360^0}{n};$$

man kann daher dem Drehungswinkel auch diesen Wert, statt (1), beilegen.

Gleiches gilt, wenn es sich bei einem Kristall ohne Symmetriezentrum um eine Achse zweiter Art mit dem Drehungswinkel (1) handelt. Zunächst bemerken wir, daß auch in diesem Fall die Wiederholung der Rotation zu n äquidistanten um $\frac{360^0}{n}$ voneinander entfernten Lagen führt, die in solcher Weise in zwei Gruppen zerfallen, daß die Lagen der einen Gruppe invers zu den Lagen der andern sind.

Setzen wir

$$n = 2n',$$

wo nach dem Gesagten auch n' eine ganze Zahl ist, so ist die Achse auch eine Achse erster Art mit dem Drehungswinkel

$$\frac{m}{n'} \times 360^0,$$

und es gibt daher n' äquidistante kongruente Lagen. Offenbar bilden diese die eine der soeben genannten Gruppen, und es müssen die Lagen der andern jedesmal in der Mitte zwischen zwei solchen um $\frac{360^0}{n'}$ voneinander entfernten kongruenten Lagen liegen. Man gelangt daher von einer Lage zu der ihr nächstliegenden inversen Lage durch eine Drehung

$$\frac{360^0}{n}$$

und kann die Erscheinungen beschreiben, indem man der Achse zweiter Art diesen Drehungswinkel zuschreibt.

§ 12. Wie in § 34 gezeigt werden wird, kann man aus dem Gesetz der rationalen Indizes der Kristallflächen ableiten, daß die Zahl n nur die Werte

$$2,\ 3,\ 4 \text{ und } 6$$

haben kann. Es gibt also, was die Größe des Drehungswinkels betrifft, nur vier Arten von Symmetrieachsen, die wir zwei-, drei-, vier-, und sechszählige nennen wollen.

§ 13. Wir wollen jetzt zwei Sätze folgen lassen, die dazu dienen können, wenn zwei Symmetrieachsen eines Kristalls gegeben sind, auf das Vorhandensein anderer Achsen zu schließen. Dabei schicken wir eine Bemerkung voraus.

Zwei Körper A und B, deren einer das Spiegelbild des andern in bezug auf eine Ebene V ist, können bei gewissen Bewegungen fortwährend in diesem Verhältnis zueinander bleiben, z. B. wenn man sie um Achsen, deren eine das Spiegelbild der andern ist, in korrespondierenden Richtungen um gleiche Winkel dreht. Ist nach dieser Bewegung der Körper A mit sich selbst in der ursprünglichen Lage kongruent, so gilt dasselbe auch von B. Ebenso wird B nach der Rotation invers zu sich selbst in der Anfangslage sein, sobald dies für den Körper A zutrifft. Man überzeugt sich hiervon, wenn man beachtet, daß zwei Körper, die zueinander invers sind, dies bleiben, wenn sie beide an einer Ebene gespiegelt werden; man kann dies ohne Mühe aus dem in § 4 Gesagten ableiten.

Diese Betrachtung führt zu dem Schluß, daß, wenn der Körper A eine Symmetrieachse p hat, die Linie q, welche durch Spiegelung von p erhalten wird, eine Symmetrieachse mit demselben Drehungswinkel in dem Körper B ist, und zwar sind die Achsen p und q von derselben Art. Geht man nun mittels einer Rotation von 180° um eine zur Ebene V senkrechte Achse von B zu dem in bezug auf A inversen Körper C über, so nimmt die Achse q die Richtung von p an. Also: wenn von zwei Körpern A und C, die invers zueinander sind, der eine eine Symmetrieachse hat, so hat der andere eine damit zusammenfallende Achse von derselben Art und mit demselben Drehungswinkel.

§ 14. Wir wollen jetzt annehmen, ein Kristall habe eine Symmetrieachse p erster oder zweiter Art mit dem Drehungswinkel ϑ und außerdem eine zweite Achse q. Es sei q' die Linie, in welche diese übergeht, wenn man sie, während man den Kristall stehen läßt, in der einen oder der andern Richtung um p über den Winkel ϑ dreht. Dann ist auch q' eine Symmetrieachse, und zwar von derselben Art wie q und mit demselben Drehungswinkel.

Um dies zu beweisen, denke man sich zwei vollkommen gleiche Kristalle A_1 und A_2, und fixiere im ersten die Richtungen p, q und q', und im zweiten die parallelen Richtungen, die wir mit den gleichen Buchstaben bezeichnen. Man gebe nun dem Körper A_2 eine Drehung ϑ um p, sodaß die Richtung q in diesem Körper mit q' in A_1 zusammenfällt. A_2 wird dabei mit dem ersten Körper kongruent oder invers zu ihm; das hängt von der Art der Achse p ab. In beiden Fällen können wir schließen (vgl. § 13), daß q' in dem Körper A_1, eben weil diese Richtung mit q in A_2 zusammenfällt, eine Achse von derselben Art und mit demselben Drehungswinkel wie q sein muß, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir können sagen, daß die Achsen q und q' durch Drehung um p auseinander entstehen und nennen solche Achsen *gleichwertig*. Da man die Drehung wiederholen kann, so muß es, wenn p n-zählig ist, eine Gruppe von n derartigen gleichwertigen Achsen q, q', q'' usw. geben, die in gleichen Entfernungen auf der Oberfläche eines Kreiskegels liegen. Existieren noch weitere Achsen, so ordnen sich auch diese in solche Gruppen von je n Achsen.

§ 15. Um zu dem zweiten der in § 13 genannten Sätze zu gelangen, gehen wir wieder von zwei Achsen aus, die durch die von einem Punkte O aus, jede nach einer beliebigen Seite hin gezogenen Geraden OL_1 und OL_2 angegeben werden mögen; die Drehungswinkel seien ϑ_1 und ϑ_2. Auf OL_1L_2 als Seitenfläche, an einer beliebigen Seite derselben konstruieren wir eine dreiseitige Ecke mit den Kantenwinkeln $\frac{1}{2}\vartheta_1$ an OL_1 und $\frac{1}{2}\vartheta_2$ an OL_2; die dritte Kante derselben sei OL_3. Man hat dann folgendes Theorem: die Linie OL_3 ist eine Symmetrieachse mit einem Drehungswinkel gleich dem Doppelten des an demselben liegenden Kantenwinkels (oder, was auf dasselbe hinauskommt, gleich dem Doppelten des zugehörigen Supplementwinkels). Diese Achse ist erster oder zweiter Art, je nachdem OL_1 und OL_2 von derselben oder von verschiedener Art sind.

Der Beweis ergibt sich aus einer einfachen kinematischen Betrachtung. Um ihn kurz zu fassen, nennen wir OL'_3 das Spiegelbild von OL_3 in bezug auf die Ebene OL_1L_2 und ebenso OL'_1 das Spiegelbild von OL_1 in bezug auf die Ebene OL_2L_3. Wir erteilen nun dem Kristall nacheinander zwei Drehungen, die erste von der Größe ϑ_1 um OL_1 und die zweite von der Größe ϑ_2 um die Linie im Raum OL_2, d. h. um eine Linie des Körpers, die ursprünglich nicht mit OL_2 zusammenfiel, aber nach dem in § 14 Gesagten als eine mit OL_2 gleichwertige Achse zu betrachten ist, und zwar sollen diese Drehungen solche Richtungen haben, daß die Linie OL_3 des Körpers durch die erste in die Lage OL'_3 kommt und durch die zweite in die ursprüngliche Lage zurückgeführt wird. Da somit in der Endlage Q des Körpers die Linie OL_3 dieselbe

Richtung hat wie in der Anfangslage P, so sind diese Drehungen einer einzigen Rotation um OL_3 äquivalent, für deren Drehungswinkel sich die oben angegebene Größe ergibt, wenn man erwägt, daß am Ende die Linie OL_1 des Körpers nach OL'_1 hin gekommen ist. Daß nun wirklich OL_3 eine *Symmetrieachse* ist, schließen wir daraus, daß bei jeder der beiden vorgenommenen Drehungen der Körper entweder mit sich selbst kongruent bleibt oder invers zu sich selbst wird, und daß also auch die Endlage Q mit der Anfangslage P kongruent oder invers zu ihr ist. Daß die Lagen Q und P unter sich kongruent sind, wenn die Achsen OL_1 und OL_2 beide erster oder beide zweiter Art sind, invers zueinander dagegen, wenn die eine der beiden Achsen von der ersten, die andere von der zweiten Art ist, braucht wohl nicht weiter erklärt zu werden. Was oben von der Art der Achse OL_3 gesagt wurde, ist schließlich eine naheliegende Folgerung.

Wir können drei Linien wie OL_1, OL_2, OL_3 füglich ein *Achsentripel* nennen. Die angeführten Betrachtungen zeigen, daß die Existenz von zwei Achsen eines solchen das Vorhandensein der dritten bedingt, daß die Drehungswinkel durch die doppelten Kantenwinkel der dreiseitigen Ecke gegeben werden und daß in einem Kristall ohne Symmetriezentrum entweder die drei Achsen alle von der ersten Art sind oder eine von der ersten und die anderen von der zweiten Art. Hat der Kristall ein Symmetriezentrum, dann ist, wie wir bereits wissen, jede der drei Achsen sowohl von der ersten als auch von der zweiten Art.

Ein wichtiger spezieller Fall ist der eines Tripels, in welchem zwei Achsen zweizählig sind. Die dritte Achse steht dann senkrecht zu diesen beiden und ihr Drehungswinkel ist doppelt so groß wie der Winkel zwischen den zweizähligen Achsen. Umgekehrt folgt aus der Existenz einer n-zähligen Achse und einer zu dieser senkrechten zweizähligen, daß der Körper eine zweite zweizählige Achse besitzt, die mit der ersten einen Winkel von $\frac{180^\circ}{n}$ einschließt und ebenfalls senkrecht zur n-zähligen Achse steht.

§ 16. Nach diesen Vorbereitungen können wir zu der beabsichtigten Klassifikation übergehen. Dabei fassen wir zunächst nur die Anzahl, die relative Lage und die Drehungswinkel der Achsen ins Auge, ohne uns darum zu kümmern, ob sie erster oder zweiter Art sind. Offenbar sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Kristalle ohne Symmetrieachse.
b) Kristalle mit einer einzigen Achse.
c) Kristalle mit mehr als einer Achse, die alle zweizählig sind.
d) Kristalle mit mehreren Achsen, von welchen nur eine mehr als zweizählig ist.
e) Kristalle mit mehr als einer drei- oder mehrzähligen Achse.

Bei näherer Betrachtung dieser Fälle gelangt man zu verschiedenen Gruppen, die wir dadurch voneinander unterscheiden wollen, daß wir die Zahl der Achsen angeben und dahinter eingeklammert den Wert der Zahl n. So wäre das Symbol für einen Kristall mit p n-zähligen, p' n'-zähligen Achsen usw. $[p(n), p'(n'), \ldots]$.

§ 17. Den Fall a) bezeichnen wir mit [0]; hier ist weiter nichts zu unterscheiden. Dagegen zerfallen die Kristalle mit einer einzigen Achse in vier Gruppen, je nachdem die Achse zwei-, drei-, vier- oder sechszählig ist, was wir mit

$$[1(2)],\ [1(3)],\ [1(4)],\ [1(6)]$$

andeuten.

Auch der Fall c) ist rasch erledigt. Es müssen nämlich zwei zweizählige Achsen in diesem Fall notwendig senkrecht zueinander stehen, da sonst der Satz vom Achsentripel die Existenz einer Achse mit einem von 180° verschiedenen Drehungswinkel erfordern würde. Da somit alle Achsen senkrecht zueinander stehen müssen, kann die Zahl derselben höchstens drei sein; weniger Achsen kann es aber nicht geben, weil wir mehr als eine vorausgesetzt haben und die Existenz zweier Achsen das Vorhandensein einer dritten involviert. Wir haben also nur die Abteilung

$$[3(2)].$$

§ 18. Wenn der Kristall nur *eine* Achse aufweist, die mehr als zweizählig ist, wollen wir diese die *Hauptachse*, und die übrigen, die zweizähligen, die *Nebenachsen* nennen. Zunächst ist nun klar, daß jede dieser letzteren senkrecht zur Hauptachse stehen muß; wäre das nämlich nicht der Fall, so würde man (§ 14) durch eine Rotation von 180° um die Nebenachse aus der Hauptachse eine neue mehr als zweizählige Achse erhalten. Was ferner die Lage der Nebenachsen in der zur Hauptachse senkrechten Ebene anbelangt, so ergibt sich aus dem Satze vom Achsentripel, daß man, wenn die Hauptachse n-zählig ist, durch Rotation einer Nebenachse um $\frac{180^\circ}{n}$ eine neue Nebenachse erhält. Hierdurch ist die Anzahl der Nebenachsen bestimmt; denn eine Nebenachse, die mit einer andern einen Winkel kleiner als $\frac{180^\circ}{n}$ einschließen würde, kann es nicht geben, weil dies für die Hauptachse einen Drehungswinkel, kleiner als $\frac{360^\circ}{n}$, erfordern würde.

Indem wir nun für n die Werte 3, 4, 6 annehmen, erhalten wir folgende Fälle:

$$[1(3),\ 3(2)],\ [1(4),\ 4(2)],\ [1(6),\ 6(2)].$$

Wir erinnern noch daran, daß zwei Nebenachsen, die durch eine Drehung von $\frac{360^\circ}{n}$ um die Hauptachse zur Koinzidenz gebracht werden

können, gleichwertig sind. Hieraus folgt, daß in dem Falle [1 (3), 3(2)] alle Nebenachsen gleichwertig sind, während sie in den beiden andern Fällen in zwei abwechselnd zueinander liegende Gruppen von je zwei oder drei unter sich gleichwertigen Achsen zerfallen.

§ 19. Bei der Untersuchung des Falles e) gehen wir davon aus, daß der Kristall mindestens zwei mehr als zweizählige Symmetrieachsen besitzt, und daß es, da man durch Rotation der einen um die andere neue Achsen erhalten kann, jedenfalls eine gewisse Anzahl von Achsen mit demselben Drehungswinkel $\frac{360^0}{n}$ geben muß. Da die Anzahl dieser Achsen endlich ist, so kann man unter allen Winkeln, die sie miteinander bilden, einen auswählen, von solcher Größe φ, daß kein Winkel kleiner als φ ist; natürlich ist dann φ höchstens 90^0.

Wir ziehen nun von einem Punkte O aus zwei Linien OL_1 und OL_2, welche die Richtung zweier der genannten n-zähligen Achsen angeben und gerade den Winkel φ miteinander bilden. Indem man OL_1 um OL_2 über den Winkel $\frac{360^0}{n}$ rotieren läßt, erhält man eine neue n-zählige Achse OL_3, die mit OL_1 und OL_2 auf der Oberfläche eines gewissen Kreiskegels K liegt. Die drei erzeugenden Linien OL_1, OL_2, OL_3 liegen gleich weit voneinander und die weiteren erzeugenden Linien, die man erhält, wenn man mit Intervallen, die den Winkeln L_1OL_2, L_2OL_3 gleich sind, am Kegel herumgeht, werden ebenfalls n-zählige Achsen sein. Da ferner die Anzahl der Achsen endlich ist, so muß man bei dem genannten Verfahren wieder nach OL_1 zurückkehren, und zwar bereits nach einmaligem Umlauf, weil eine Achse, die auf der Kegelfläche zwischen OL_1 und OL_2 läge, mit diesen Linien Winkel einschließen würde, die kleiner als φ sind. Die auf dem Kegel liegenden n-zähligen Achsen sind daher die Kanten einer gewissen regelmäßigen vielseitigen Ecke mit der Seitenfläche φ und dem Kantenwinkel $\frac{360^0}{n}$. Hat nun diese Figur k Kanten, so ist, da bekanntlich die Summe der Kantenwinkel die Summe der Winkel eines k-Ecks übersteigt,

$$k\,\frac{360^0}{n} > (k-2) \times 180^0$$

oder

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

Es ist aber $k \geq 3$, folglich $n < 6$. Die mehr als zweizähligen Achsen, von denen jetzt die Rede ist, können somit nur drei- oder vierzählig sein.

Ferner ist noch folgendes zu beachten. Zwei aufeinanderfolgende, auf der genannten Kegelfläche liegende Achsen OL_1 und OL_2 bilden mit der geometrischen Achse OK des Kegels ein Achsentripel, da in

der dreiseitigen Ecke OL_1L_2K die Kantenwinkel an OL_1 und OL_2 dem halben Drehungswinkel dieser Achsen gleich sind. Der Kantenwinkel an OK ist $\frac{360^0}{k}$ und es ist also OK eine Symmetrieachse mit dem Drehungswinkel $\frac{720^0}{k}$. Daraus folgt, daß k den Wert 5 nicht haben kann, und da aus der Ungleichung (2) wegen $n \geq 3$ folgt, daß $k < 6$, so sind 3 und 4 die einzigen zulässigen Werte. Die Achsen OL_1, OL_2, usw. sind also die Kanten einer regelmäßigen drei- oder vierseitigen Ecke.

§ 20. Wir wollen nun erstens annehmen, die Achsen OL_1, OL_2 usw., von welchen im Vorhergehenden die Rede war, seien dreizählig. Dann ist der Kantenwinkel der betrachteten vielseitigen Ecke 120°. Wäre nun $k = 3$, dann müßte, wie man leicht findet, die Seitenfläche φ größer als 90° sein, was der in § 19 gemachten Voraussetzung widerspricht. Die oft genannte vielseitige Ecke muß daher vierseitig sein, und da man weiß, daß die Kantenwinkel 120° sind, so ist ihre Gestalt vollkommen bestimmt. Um sich diese zu vergegenwärtigen, hat man nur den Mittelpunkt eines Würfels mit den Eckpunkten einer Seitenfläche zu verbinden.

Der Kristall besitzt also in dem jetzt betrachteten Fall vier dreizählige Achsen, deren gegenseitige Lage durch die Hauptdiagonalen eines Würfels gegeben wird.

Weitere dreizählige Achsen können nicht existieren, da jede durch den Würfel gezogene Linie mit einer der Hauptdiagonalen einen Winkel bildet, der kleiner ist als der spitze Winkel, unter welchem diese letzteren sich schneiden, während wir bei unseren Betrachtungen von der Annahme ausgegangen sind, daß L_1OL_2 der *kleinste* Winkel zwischen den betrachteten n-zähligen Achsen ist.

§ 21. Um die Einteilung weiterzuführen, unterscheiden wir jetzt die Fälle, daß neben den vier dreizähligen Achsen auch vierzählige vorhanden sind oder nicht. Wir fangen mit der letzteren Alternative an. Dann können nur noch zweizählige Achsen vorkommen und in der Tat lassen sich solche leicht angeben. Die geometrische Achse des in § 19 genannten Kegels fällt nämlich zusammen mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seitenflächen; diese Linie ist eine zweizählige Symmetrieachse, da, wie wir sahen, der zu der Kegelachse gehörende Drehungswinkel im allgemeinen $\frac{720^0}{k}$, also jetzt 180° beträgt. Was von der Linie gilt, welche die Mittelpunkte *eines* Paars gegenüberstehender Seitenflächen verbindet, gilt natürlich auch von jeder andern ähnlichen Linie, so daß wir drei zueinander senkrechte zweizählige Achsen kennen gelernt haben.

Es fragt sich nur, ob es vielleicht noch andere derartige Achsen gibt. Um hierüber zu entscheiden, bemerken wir, daß nach einer Rotation von 180° um eine zweizählige Achse jede dreizählige Achse wieder mit einer andern ähnlichen Achse, d. h. jede Hauptdiagonale des Würfels mit einer andern Hauptdiagonale zusammenfallen muß. Als mögliche Richtungen einer zweizähligen Achse kommen daher nur die Linien in Betracht, welche einen Winkel zwischen zwei Hauptdiagonalen halbieren, also außer den drei bereits genannten nur noch die sechs Linien, welche die Mitten je zweier gegenüberliegender Würfelkanten miteinander verbinden.

Indes können diese sechs Linien in den Kristallen, von denen jetzt die Rede ist, keine Symmetrieachsen sein. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit O den Mittelpunkt des Würfels, mit A einen Eckpunkt, mit B die Mitte einer von A ausgehenden Kante und mit C den Mittelpunkt einer an BA liegenden Seitenfläche. Die dreiseitige Ecke $OABC$ hat Kantenwinkel von 60°, 90° und 45° an OA, bzw. OB und OC. Der erste Winkel ist der halbe Drehungswinkel der dreizähligen Achse OA und ebenso wäre der zweite der halbe Drehungswinkel von OB, wenn diese Linie eine zweizählige Achse wäre. Es müßte dann also OC eine vierzählige Achse sein, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Zusammenfassend können wir sagen, daß es Kristalle geben kann mit vier dreizähligen Achsen (Hauptdiagonalen eines Würfels) und drei zweizähligen (den Würfelkanten parallel); das Symbol für dieselben lautet:

$$[4(3),\ 3(2)].$$

Wir fügen noch hinzu, daß sowohl die dreizähligen als auch die zweizähligen Achsen unter sich gleichwertig sind. Man kann nämlich zwei beliebige Hauptdiagonalen des Würfels dadurch zur Koinzidenz bringen, daß man die eine über 180° um eine Linie dreht, die einer Kante parallel läuft, und ebenso kann man durch eine Drehung von 120° um eine Hauptdiagonale eine Kantenrichtung in eine andere überführen.

§ 22. Wir könnten jetzt untersuchen, ob es neben den dreizähligen Achsen, zu welchen wir in § 20 gelangt sind, auch vierzählige geben könne. Indes gestaltet sich die Beantwortung dieser Frage einfacher, wenn wir einen anderen Weg einschlagen und von der Existenz vierzähliger Achsen ausgehen. Wir wollen daher annehmen, daß die in § 19 eingeführte Zahl n den Wert 4 hat. Dann kann der Ungleichung (2) nur durch $k = 3$ genügt werden. Die regelmäßige k-seitige Ecke wird daher jetzt dreiseitig, so daß wir es, da die Kantenwinkel 90° sein müssen, mit drei zueinander senkrechten vierzähligen Achsen zu tun haben. Weitere derartige Achsen kann es nicht geben, denn jede beliebige Linie bildet mit wenigstens zwei der gefundenen Achsen einen

Winkel, der kleiner als 90° ist, und wir haben im Anfang unserer Betrachtung vorausgesetzt, daß der Winkel φ, der jetzt 90° ist, der kleinste Winkel ist, der in der Gruppe der n-zähligen Achsen vorkommt.

Nehmen wir jetzt für die drei vierzähligen Achsen die Linien, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen eines Würfels miteinander verbinden, so fällt die geometrische Achse des in § 19 genannten Kegels K mit einer Hauptdiagonale zusammen, und zwar muß für diese der Drehungswinkel $\frac{720^\circ}{3} = 240^\circ$, oder, wie man auch ebenso gut sagen kann, 120° sein. Die Existenz der vierzähligen Achsen involviert daher die der vier dreizähligen, von welchen in § 20 die Rede war. Was zweizählige Achsen betrifft, so sind deren jetzt sechs vorhanden; es sind das die bereits in § 21 genannten Linien, welche die Mitten gegenüberstehender Würfelkanten verbinden. Dies folgt sofort aus der dreiseitigen Ecke $OABC$, von der wir jetzt wissen, daß OA eine drei- und OC eine vierzählige Achse ist.

Das Symbol für die Gruppe von Kristallen, um die es sich jetzt handelt, ist

$$[3(4),\ 4(3),\ 6(2)]$$

und wir können noch hinzufügen, daß, wie man leicht erkennt, die drei vierzähligen Achsen und ebenso alle drei-, bzw. zweizähligen unter sich gleichwertig sind.

§ 23. Um die Klassifikation der Kristalle zu Ende zu führen, haben wir nur noch auf die bis jetzt offen gelassene Frage, ob ein Symmetriezentrum vorhanden sei oder nicht, und auf die Art der Achsen unsere Aufmerksamkeit zu richten. Die Schlüsse, die sich dabei ergeben, lassen sich kurz ausdrücken, wenn wir den bereits benutzten Symbolen noch einige Andeutungen hinzufügen. Wir wollen nämlich durch einen Index 1 oder 2, den wir der Zahl der Achsen anhängen, angeben, ob dieselben von der ersten oder von der zweiten Art sind. Dementsprechend könnten wir nun auch Achsen, die gleichzeitig von der ersten und der zweiten Art sind, mit dem Doppelindex 1, 2 bezeichnen. Da indes (§ 8) entweder alle Achsen zu gleicher Zeit diese Eigentümlichkeit zeigen oder keine einzige, so können wir die Anhäufung jener doppelten Indizes dadurch vermeiden, daß wir einfach durch ein C hinter den übrigen Zeichen im Symbol die Existenz eines Symmetriezentrums angeben.

Wir erinnern ferner daran, daß eine dreizählige Achse nie bloß von der zweiten Art sein kann, daß gleichwertige Achsen auch gleichartig sind, daß in einem Achsentripel, falls kein Symmetriezentrum besteht, entweder zwei Achsen von der zweiten Art sind oder keine einzige, und daß, wie hieraus hervorgeht, eine Achse des Tripels von der ersten Art sein muß, sobald die beiden andern gleichwertig sind.

Behält man diese Regeln im Auge, so findet man leicht folgendes.

§ 24. Die Kristalle ohne Symmetrieachse zerfallen in *zwei* Gruppen

$$[0, C] \text{ und } [0].$$

Ist nur *eine* Achse vorhanden und besteht kein Symmetriezentrum, so kann die Achse, falls sie zwei-, vier- oder sechszählig ist, entweder von der ersten oder von der zweiten Art sein. Es gibt also *elf* Kristallklassen mit *einer* Symmetrieachse:

$$[1(2), C],\ [1^1(2)],\ [1^2(2)],$$
$$[1(3), C],\ [1^1(3)],$$
$$[1(4), C],\ [1^1(4)],\ [1^2(4)],$$
$$[1(6), C],\ [1^1(6)],\ [1^2(6)].$$

Die Kristalle mit drei zweizähligen Achsen liefern die *drei* Klassen

$$[3(2), C],\ [3^1(2)],\ [1^1(2),\ 2^2(2)],$$

und ebenso hat man *drei* Klassen mit einer dreizähligen Hauptachse und drei zweizähligen Nebenachsen, nämlich

$$[1(3),\ 3(2),\ C],\quad [1^1(3),\ 3^1(2)],\quad [1^1(3),\ 3^2(2)].$$

Hier sind die Nebenachsen alle gleichwertig. In den Kristallen mit vier oder sechs Nebenachsen dagegen lassen sich diese in zwei miteinander abwechselnde Gruppen einteilen, derart, daß nur die Achsen, die derselben Gruppe angehören, gleichwertig sind. Wenn in diesem Fall kein Symmetriezentrum besteht, so können die Achsen der einen Gruppe von der ersten und die der andern von der zweiten Art sein, was nach dem Satze vom Achsentripel zur Folge hat, daß die Hauptachse von der zweiten Art ist. Infolgedessen ergeben sich die *acht* Klassen

$$[1(4),\ 4(2),\ C],\quad [1^1(4),\ 4^1(2)],\quad [1^1(4),\ 4^2(2)],\quad [1^2(4),\ 2^1(2),\ 2^2(2)],$$
$$[1(6),\ 6(2),\ C],\quad [1^1(6),\ 6^1(2)],\quad [1^1(6),\ 6^2(2)],\quad [1^2(6),\ 3^1(2),\ 3^2(2)].$$

Schließlich zerfallen die Kristalle mit vier dreizähligen Achsen in folgende *fünf* Klassen, womit wir im ganzen 32 Klassen gefunden haben,

$$[4(3),\ 3(2),\ C],\quad [4^1(3),\ 3^1(2)],$$
$$[3(4),\ 4(3),\ 6(2),\ C],\quad [3^1(4),\ 4^1(3),\ 6^1(2)],\quad [3^2(4),\ 4^1(3),\ 6^2(2)].$$

Was die drei letzten Symbole anbelangt, so erinnern wir an das in § 22 genannte Achsentripel $OABC$. Da bei Abwesenheit eines Symmetriezentrums die dreizählige Achse OA von der ersten Art sein muß, so müssen OB und OC von derselben Art sein.

§ 25. Es möge zum Schluß noch so viel von den möglichen Begrenzungen eines Kristalls gesagt werden, als nötig ist, um die Behauptung, daß es nur zwei-, drei-, vier- und sechszählige Achsen geben

kann, zu rechtfertigen. Dabei kommt es hauptsächlich auf das sogen. Gesetz der rationalen Indizes an, welches mit den Symmetriegesetzen die Grundlage der Lehre von den Kristallformen bildet. Den Betrachtungen über dieses Gesetz und den Folgerungen, die aus demselben gezogen werden können, schicken wir einige geometrische Sätze voran.

Wenn P_1, P_2, P_3, P_4 vier beliebige Punkte auf einer Geraden sind, nennt man bekanntlich die Größe

$$\frac{P_1P_3}{P_2P_3} : \frac{P_1P_4}{P_2P_4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

das anharmonische Verhältnis von P_3, P_4 in bezug auf P_1, P_2. Dasselbe wird je nach der relativen Lage der Punkte mit dem positiven oder dem negativen Vorzeichen versehen, und zwar wird es, wenn die Lage der Punkte durch ihre Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 auf der Geraden bestimmt wird, sowohl dem Vorzeichen als auch der Größe nach durch den Ausdruck

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

gegeben.

Wir werden nun Fälle zu betrachten haben, in denen das anharmonische Verhältnis eine rationale Zahl ist, und in welchen also die Produkte

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \text{ und } (x_3 - x_2)(x_4 - x_1)$$

kommensurabel sind. Es ist dann auch das Produkt

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$$

das sich als die Differenz jener beiden darstellen läßt, mit jedem derselben kommensurabel.

Für unsere Zwecke kommt es auf das Vorzeichen der genannten Größen nicht an. Wenn wir mit P_1P_2 usw. die absoluten Werte der Entfernungen bezeichnen, besteht die spezielle Eigenschaft, von der jetzt die Rede ist, einfach darin, daß die drei Produkte

$$P_1P_2 \times P_3P_4, \quad P_1P_3 \times P_2P_4, \quad P_1P_4 \times P_2P_3 \quad . \; . \quad (5)$$

unter sich kommensurabel sind. Ist dies der Fall, so wollen wir die Punktreihe eine *rationale* nennen oder auch sagen, daß die Punkte rational zueinander liegen.

Da die Produkte (5) die einzigen sind, die man erhalten kann, wenn man die Entfernung von zwei beliebigen der vier Punkte mit der Entfernung der beiden anderen multipliziert, so spielen in einer rationalen Punktreihe alle Punkte dieselbe Rolle, und es besteht kein Anlaß, den ersten, zweiten Punkt usw. oder das erste, zweite Punktpaar usw. voneinander zu unterscheiden.

Es ist übrigens nicht aus dem Auge zu verlieren, daß die Punktreihe rational ist, sobald *zwei* der Produkte (5) kommensurabel miteinander sind.

§ 26. Wir wollen jetzt annehmen, daß auf einer geraden Linie fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 so liegen, daß sowohl P_1, P_2, P_3, P_4 als auch P_1, P_2, P_3, P_5 eine rationale Reihe bilden. Dann sind die Größen

$$\frac{P_1P_2 \times P_3P_4}{P_1P_3 \times P_2P_4} \text{ und } \frac{P_1P_2 \times P_3P_5}{P_1P_3 \times P_2P_5}$$

rationale Zahlen. Der Quotient

$$\frac{P_2P_4 \times P_3P_5}{P_3P_4 \times P_2P_5},$$

den man erhält, wenn man die zweite mit der ersten dividiert, ist dann gleichfalls eine rationale Zahl. Also: wenn P_1, P_2, P_3, P_4 und P_1, P_2, P_3, P_5 rationale Punktreihen sind, so hat auch die Reihe P_2, P_3, P_4, P_5 die gleiche Eigenschaft.

Dieser Satz läßt sich noch bedeutend verallgemeinern. Zunächst kann man beweisen, daß auch P_1, P_3, P_4, P_5 und P_1, P_2, P_4, P_5 rationale Punktreihen sind. Ferner gelangt man, indem man jedesmal wieder einen neuen Punkt hinzufügt, der mit drei der bereits vorhandenen eine rationale Vierpunktreihe bildet, zu dem Begriff von dem, was wir eine rationale Reihe beliebig vieler, sogar unendlich vieler Punkte nennen können. Eine solche ist hierdurch gekennzeichnet, daß vier Punkte, die man willkürlich herausgreift, rational zueinander liegen.

§ 27. Wenn man die vier auf einer Geraden liegenden Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit einem beliebigen Punkt A verbindet und die Winkel P_1AP_2, P_1AP_3 usw. mit (12), (13) usw. bezeichnet, so ist, wie sich durch einfache Anwendung der Sinusregel der Trigonometrie ergibt das Verhältnis (3) oder (4) dem entsprechenden Verhältnisse

$$\frac{\sin(13)}{\sin(23)} : \frac{\sin(14)}{\sin(24)} = \frac{\sin(13)\sin(24)}{\sin(23)\sin(14)} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

gleich. Letzteres, mit solchem Vorzeichen genommen, daß es auch in dieser Hinsicht mit (4) übereinstimmt, nennt man das anharmonische Verhältnis der Linien AP_3, AP_4 in bezug auf AP_1, AP_2.

Ist nun der Ausdruck (4) eine rationale Zahl, so ist (6) ebenfalls rational, und man gelangt daher zu folgendem Satz:

Wenn man die Punkte einer rationalen aus beliebig vielen Punkten bestehenden Reihe mit einem Punkte A verbindet, so hat das entstandene Linienbüschel die Eigenschaft, daß, wenn man vier Linien AP

AQ, AR, AS willkürlich auswählt und diese in zwei verschiedenen Weisen zu Paaren kombiniert, etwa (AP, AQ), (AR, AS) und (AP, AR), (AQ, AS), die Produkte

$$\sin PAQ \sin RAS \text{ und } \sin PAR \sin QAS$$

kommensurabel miteinander sind.

Ein Linienbüschel dieser Art möge ein *rationales* heißen. Wir bemerken noch, daß wir bei der Frage, ob ein solches vorliege, alle Sinus mit dem positiven Vorzeichen nehmen können und nie zwischen einem Winkel und seinem Supplementwinkel zu unterscheiden brauchen. Ferner, daß die hervorgehobene Eigenschaft sich nur auf die Winkel zwischen den Linien bezieht und also auch dann bestehen kann, wenn diese zwar in derselben Ebene liegen, aber nicht durch ein und denselben Punkt gehen. Wir wollen dann von einer *rationalen Liniengruppe* sprechen. Man erhält eine solche z. B., wenn man die Linien eines rationalen Linienbüschels, ohne ihre Richtungen zu ändern, über beliebige Strecken verschiebt.

Von einem rationalen Linienbüschel gilt, daß es von jeder in derselben Ebene liegenden Geraden in einer rationalen Punktreihe geschnitten wird.

Auch ist zu erwähnen, daß in einem rationalen Vierlinienbüschel oder einer rationalen Vierliniengruppe, entsprechend der Vierpunktreihe, alle Linien die gleiche Rolle spielen.

§ 28. Wenn man durch jeden Punkt einer rationalen Punktreihe P_1, P_2 usw. und irgend eine Linie AB, die mit der Geraden $P_1 P_2$ *nicht* in einer Ebene liegt, Ebenen legt, entsteht ein Gebilde, das wir eine *rationale Ebenenschar* nennen können. Es hat die Eigenschaft, daß die Schnittlinien mit einer beliebigen Ebene E ein rationales Linienbüschel bilden. Um sich hiervon zu überzeugen, projiziere man die ursprünglichen Punkte P_1, P_2 usw. mittels Geraden, die parallel zu AB sind, also im allgemeinen schiefwinklig auf die Ebene E. Da die Entfernungen zwischen den Projektionen Q_1, Q_2 usw. zu den Entfernungen zwischen den entsprechenden Punkten P_1, P_2 usw. in einem konstanten Verhältnis stehen, so ist die Punktreihe Q_1, Q_2 usw. rational. Die Schnittlinien, um die es sich handelt, sind aber die Verbindungslinien von Q_1, Q_2 usw. mit dem Punkte, in welchem die Ebene E die Gerade AB schneidet.

Offenbar kann man auch schließen, daß die rationale Ebenenschar von einer Geraden in Punkten geschnitten wird, die eine rationale Reihe bilden.

§ 29. Das Gesetz der rationalen Indizes, dem wir uns jetzt zuwenden, drückt eine Beziehung zwischen *fünf* Grenzflächen eines Kristalls aus. Man kann nämlich unter allen möglichen Grenzflächen drei be-

liebige auswählen, mit der einzigen Bedingung, daß sie eine dreiseitige Ecke bilden, und diese drei „fundamentalen" Ebenen benutzen, um die Richtung aller andern Grenzflächen anzugeben. Zu diesem Zwecke wählen wir die Schnittlinien AB, AC, AD der drei fundamentalen Ebenen, d. h. die Kanten der genannten dreiseitigen Ecke zu (im allgemeinen schiefwinkligen) Koordinatenachsen und bestimmen die Lage irgend einer andern Kristallfläche durch die Stücke, die sie von diesen Achsen abschneidet, oder vielmehr die Richtung der Fläche durch die Verhältnisse zwischen diesen Stücken. Werden nun die Koordinatenachsen von *einer* weiteren Kristallfläche in den Punkten B, C, D und von einer andern in B', C', D' geschnitten, so setze man

$$AB = u, \quad AC = v, \quad AD = w$$

und

$$AB' = u', \quad AC' = v', \quad AD' = w'.$$

Das Gesetz der rationalen Indizes besagt, daß die drei Verhältnisse

$$\frac{u'}{u}, \; \frac{v'}{v}, \; \frac{w'}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

kommensurabel miteinander sind. Es ist klar, daß hierin eine Beziehung zwischen den *Richtungen* der Flächen ausgesprochen ist, und daß das Gesetz genügt, um, sobald *vier* Grenzflächen ABC, ABD, ACD, BCD gegeben sind, alle übrigen möglichen Grenzflächen zu bestimmen.

Wir wollen sagen, daß, wenn wirklich die Größen (7) miteinander kommensurabel sind, die Ebenen BCD und $B'C'D'$ *in bezug auf die Fundamentalebenen zueinander passen.* Eine ähnliche Ausdrucksweise wenden wir auch auf die Linien an, welche in derselben Seitenfläche der dreiseitigen Ecke liegen. Daß z. B. die Werte von $\frac{u'}{u}$ und $\frac{v'}{v}$ kommensurabel sind, geben wir dadurch zu erkennen, daß wir sagen, die Linien BC und $B'C'$ passen zueinander in bezug auf die Linien AB und AC.

Da die drei Werte (7) unter sich kommensurabel sind, sobald man dies von dem ersten und zweiten, und ebenso von dem ersten und dritten weiß, so gilt der Satz:

Wenn in zwei Seitenflächen der fundamentalen dreiseitigen Ecke die Spuren zweier Ebenen in bezug auf die Koordinatenachsen zueinander passen, so passen diese Ebenen zueinander in bezug auf die Fundamentalebenen.

§ 30. Wir bezeichnen die vier Linien AB, AC, BC und $B'C'$ in der Ebene ABC für einen Augenblick mit 1, 2, 3, 4, die Winkel, welche sie miteinander bilden, mit (12) usw. und bemerken, daß nach dem Sinussatze

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin(2\,3)}{\sin(1\,3)} \text{ und } \frac{u'}{v'} = \frac{\sin(2\,4)}{\sin(1\,4)}$$

ist. Sind nun $\frac{u'}{u}$ und $\frac{v'}{v}$ kommensurabel und hat also die Größe

$$\frac{u'v}{uv'}$$

einen rationalen Wert, so ist auch

$$\frac{\sin(13)\sin(24)}{\sin(23)\sin(14)}$$

rational, d. h., wenn die Linien 3, 4 in bezug auf 1, 2 zueinander passen, so bilden die vier Linien eine rationale Liniengruppe. Hieraus können wir schließen, daß in dem System diese vier Linien alle dieselbe Rolle spielen, und daß man z. B. auch sagen kann, daß 1, 3 in bezug auf 2, 4 zueinander passen.

§ 31. Bevor man das Gesetz der rationalen Indizes als ein kristallographisches Grundgesetz hinstellen kann, ist es nötig zu zeigen, daß es nicht mit sich selbst in Widerspruch tritt. Wir fingen nämlich damit an, daß wir drei *beliebige* Grenzflächen zu Fundamentalebenen wählten, und es erhebt sich also die Frage: Wenn wir *bei dieser Wahl* mit Hilfe einer vierten Fläche die Richtungen aller möglichen Grenzflächen bestimmen, werden diese dann auch dem Gesetz der rationalen Indizes genügen, falls man sie nachher auf drei *andere* beliebig unter ihnen gewählte Fundamentalebenen bezieht? Mittels folgender Erwägungen kann man sich davon überzeugen, daß dies wirklich zutrifft.

Zunächst kann man nachweisen, daß der Zusammenhang zwischen den fünf Flächen ABC, ABD, ACD, BCD und $B'C'D'$, von denen in § 29 die Rede war, nicht bloß darin besteht, daß die beiden letztgenannten in bezug auf die drei ersten zueinander passen, sondern auch darin, daß zwei willkürlich aus den fünf herausgegriffenen in bezug auf die drei übrigen zueinander passen. Um z. B. zu zeigen, daß ACD und $B'C'D'$ in bezug auf BAC, BAD und BCD als Fundamentalebenen dem Gesetz der rationalen Indizes genügen, fassen wir die beiden Ebenen ABC und ABD, die sowohl zu den früheren als zu den neuen Fundamentalebenen gehören, ins Auge. In BAC liegen die vier Linien AB, AC, BC, $B'C'$, die eine rationale Vierliniengruppe bilden, in der sie alle dieselbe Rolle spielen; folglich passen AC und $B'C'$ in bezug auf BA und BC zueinander. In derselben Weise sieht man, daß in der Ebene BAD die Linien AD und $B'D'$ in bezug auf BA und BD zueinander passen. Da somit in zwei Seitenflächen der dreiseitigen Ecke $BACD$ die Schnittlinien mit den Ebenen ACD und $B'C'D'$ in bezug auf die Kanten des Trieders zueinander passen, so können wir schließen (vgl. § 29), daß jene beiden

Ebenen in bezug auf BAC, BAD, BCD dem Gesetz der rationalen Indizes gehorchen.

Um den gefundenen Satz kurz auszudrücken, bezeichnen wir die fünf Ebenen ABC, ABD, ACD, BCD, $B'C'D'$ in dieser Reihenfolge mit den Buchstaben a, b, c, d, e und drücken die Tatsache, daß zwei dieser Ebenen in bezug auf die drei übrigen dem Gesetz entsprechen, dadurch aus, daß wir zwischen Klammern die zwei sich auf die ersten Ebenen beziehenden Buchstaben *vor* und die drei andern Buchstaben *hinter* einen vertikalen Strich niederschreiben. Die Tatsache, von der wir ausgingen, wird dann durch das Symbol

$$[d, e \mid a, b, c]$$

und das Ergebnis unserer Schlußfolgerung durch das Symbol

$$[c, e \mid a, b, d]$$

versinnlicht. Da nun offenbar die Reihenfolge, in welcher die zwei Buchstaben vor und die drei übrigen hinter dem Strich stehen, ganz gleichgültig ist, so können wir sagen, daß wir nach Belieben zwei Buchstaben, deren einer vor, der andere aber hinter dem Strich steht, miteinander verwechseln können. Indem man dies wiederholt tut, kann man je zwei beliebige Buchstaben vor den Strich bringen.

Die fünf Ebenen bilden somit eine Gruppe, in der sie alle dieselbe Rolle spielen, und die wir füglich, in Übereinstimmung mit den früheren Benennungen, eine *rationale Fünfebenengruppe* nennen können. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß je zwei Ebenen in bezug auf die drei übrigen Richtungen haben, die mit dem Gesetz der rationalen Indizes im Einklang sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dadurch, daß jede Ebene von den vier übrigen in Linien geschnitten wird, die eine rationale Vierliniengruppe bilden.

Um auch in der Bezeichnung hervortreten zu lassen, daß den fünf Ebenen dieselbe Rolle zukommt, können wir den Strich fortlassen; das Symbol für eine rationale Fünfebenengruppe wird dann einfach

$$[a, b, c, d, e].$$

§ 32. Es ist hier noch eine Bemerkung einzuschalten, zu welcher das in § 29 Gesagte uns veranlaßt. In bezug auf drei Fundamentalebenen a, b, c (ABC, ABD, ACD) mögen zwei andere d, e (BCD und $B'C'D'$) Lagen haben, die durch die Größen u, v, w bzw. u', v', w' bestimmt sind. Es sei f eine weitere Ebene, die von den Kanten des Trieders $ABCD$ die Stücke u'', v'', w'' abschneidet. Sobald man nun weiß, daß die Verhältnisse

$$\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}$$

unter sich kommensurabel sind, und daß ebenso die Verhältnisse

$$\frac{u''}{u}, \frac{v''}{v}, \frac{w''}{w}$$

diese Eigenschaft haben, so kann man daraus schließen, daß auch die Größen

$$\frac{u''}{u'}, \frac{v''}{v'}, \frac{w''}{w'}$$

kommensurabel sind. Also, wenn die Ebenen d, e in bezug auf a, b, c zueinander passen und ebenso die Ebenen d, f, so gilt dasselbe von den Ebenen e, f.

Mit Rücksicht auf die Betrachtung des vorigen Paragraphen kann man diesen Satz auch folgendermaßen einkleiden. Aus der Existenz der rationalen Fünfebenengruppen

$$[a, b, c, d, e] \text{ und } [a, b, c, d, f]$$

folgt die Existenz der rationalen Fünfebenengruppe

$$[a, b, c, e, f],$$

d. h.:

Wenn zwei rationale Gruppen von je fünf Ebenen bekannt sind, die vier Ebenen miteinander gemein haben, so bilden auch die zwei übrigen Ebenen mit drei beliebigen von jenen vier eine rationale Fünfebenengruppe.

§ 33. Dies führt nun sofort zur Beantwortung der in § 31 gestellten Frage und zu der Erkenntnis, das wirklich das Gesetz der rationalen Indizes bei geänderter Wahl der Fundamentalebenen bestehen kann. Wir wollen nämlich annehmen, daß wir von drei Fundamentalebenen a, b, c ausgegangen sind und mit Hilfe einer vierten Kristallfläche d alle übrigen möglichen Grenzflächen gefunden haben; vier derselben mögen e, f, g, h heißen. Es muß gezeigt werden, daß d, e, f, g, h eine rationale Fünfebenengruppe bilden, und daß also z. B. d, e in bezug auf f, g, h dem Gesetz der rationalen Indizes genügen. Zu diesem Zwecke gehen wir davon aus, daß nach unseren Voraussetzungen

$$[a, b, c, d, e], \quad [a, b, c, d, f], \quad [a, b, c, d, g], \quad [a, b, c, d, h]$$

sämtlich rationale Fünfebenengruppen sind, und wenden wiederholt den Satz an, zu dem wir am Schluß des vorhergehenden Paragraphen gekommen sind. Wir schließen so nacheinander auf die Existenz der rationalen Fünfebenengruppen

$$[b, c, d, e, f], \quad [b, c, d, f, g], \quad [b, c, d, g, h],$$
$$[c, d, e, f, g], \quad [c, d, f, g, h],$$
$$[d, e, f, g, h].$$

Wir können das Gefundene so zusammenfassen, daß alle möglichen Grenzflächen eines Kristalls eine rationale Ebenengruppe bilden, was wir so verstehen, daß je fünf Ebenen eine rationale Fünfebenengruppe liefern. Auch sieht man leicht, daß *eine* Ebene von allen übrigen in den Linien einer rationalen Liniengruppe geschnitten wird. Legt man alle Grenzflächen durch ein und denselben Punkt, dann liefert die Durchschneidung in jeder derselben ein rationales Linienbüschel.

§ 34. Nach diesen Erörterungen wird uns der Beweis des in § 12 angeführten Satzes ohne Mühe gelingen. Wir stützen uns dabei auf die Bemerkung, daß zwei Kristalle, sowohl wenn sie kongruent als auch wenn sie invers zueinander sind, Grenzflächen von derselben Richtung zulassen. Für den ersten Fall ist das selbstverständlich. Was aber zwei zueinander inverse Kristalle betrifft, erinnern wir daran, daß an Körpern, die spiegelbildlich gleich sind, Grenzflächen vorkommen können, deren eine das Spiegelbild der andern ist. Solche Ebenen werden einander parallel, wenn man die eine 180° um eine Achse dreht, die senkrecht zu der Ebene steht, an der die Spiegelung stattfand.

Wir wollen jetzt annehmen, ein Kristall besitze eine Symmetrieachse erster oder zweiter Art mit dem Drehungswinkel ϑ und eine gewisse Ebene E sei eine mögliche Grenzfläche. Erteilt man dem Körper dann eine Drehung ϑ um die Achse, dann ist er in der neuen Lage entweder mit sich selbst in der ursprünglichen Lage kongruent oder zu sich selbst in jener Lage invers. In beiden Fällen muß der Kristall nach der Drehung eine Grenzfläche E' haben, die dieselbe Richtung im Raum hat, welche die Ebene E ursprünglich hatte; offenbar hatte diese Grenzfläche vor der Drehung eine Lage, die man aus der von E durch eine Rotation ϑ erhalten kann. Wir schließen daher: wenn man *eine* mögliche Grenzfläche des Kristalls um die Symmetrieachse über den Winkel ϑ dreht (während der Kristall selbst stillsteht), so erhält man eine neue Ebene, die gleichfalls eine mögliche Grenzfläche ist.

Zu andern derartigen Flächen führt abermalige Rotation um die Achse, oder auch eine Rotation um andere Symmetrieachsen, jedesmal um den zugehörigen Drehungswinkel, und alle Grenzflächen, die man in dieser Weise erhält, müssen nun der Bedingung genügen, daß sie zusammen eine rationale Ebenengruppe bilden.

Wir wollen uns hier auf die Betrachtung *einer* Symmetrieachse beschränken. Dann ist von den Fällen, in denen diese zwei-, drei- oder vierzählig ist, weiter nichts zu sagen, da erst dann von der genannten Bedingung die Rede ist, wenn wenigstens *fünf* Kristallflächen vorliegen. Wir setzen daher, wenn der Drehungswinkel $\frac{360^0}{n}$ ist, $n > 4$, so daß aus

einer Ebene E durch Drehung mindestens vier andere abgeleitet werden können.

In Fig. 9, in der wir uns die Ebene der Zeichnung senkrecht zu der Symmetrieachse denken wollen, gehe diese letztere durch den Punkt O. Irgend eine Kristallfläche möge die Achse in einem Punkte P, der in einer gewissen Entfernung von O liegt, und die Ebene der Zeichnung in der Linie AB schneiden. Dreht man nun diese Fläche wiederholt um den Winkel $\vartheta = \frac{360^\circ}{n}$, dann nimmt sie Lagen an, in welchen sie noch immer den Punkt P enthält, die Ebene der Zeichnung aber sukzessive in BC, CD, DE, EF schneidet, und zwar erhält man diese aus AB durch wiederholte Rotationen ϑ um den Punkt O. Wir bezeichnen mit C, D, G und H die Punkte, in welchen die mittlere der fünf betrachteten Linien durch die übrigen geschnitten wird.

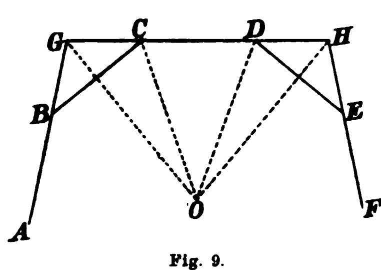


Fig. 9.

Die fünf Ebenen PAB, PBC, PCD, PDE und PEF müssen nun eine rationale Fünfebenengruppe bilden, und die Schnittlinien PG, PC, PD, PH der mittleren Ebene mit den andern ein rationales Linienbüschel. Daraus folgt, daß in den Ebenen POG, POC, POD, POH eine rationale Ebenenschar vorliegt, und daß auch OG, OC, OD, OH ein rationales Linienbüschel ist. Also gilt die Bedingung, daß

$$\frac{\sin GOH \sin COD}{\sin GOC \sin DOH}$$

eine rationale Zahl sein muß. Für diesen Ausdruck findet man, da

$$\angle COD = \vartheta, \quad \angle GOC = \angle DOH = \tfrac{1}{2}\vartheta$$

ist,

$$\frac{\sin 2\vartheta \sin \vartheta}{\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta} = 8 \cos^2 \tfrac{1}{2}\vartheta \cos \vartheta$$

und dies ist nur dann eine rationale Größe, wenn $n = 6$ und also $\vartheta = 60^0$ ist; der Ausdruck hat dann den Wert 3.

XIII.

Die Begrenzung der Kristalle.

(Nachtrag zu dem vorstehenden Artikel, 1906.)

---

§ 1. Ohne eine irgendwie erschöpfende Behandlung der Lehre von den Kristallformen zu geben, wollen wir noch etwas weiter auf die Frage eingehen, welche Flächen an einem Kristall vorkommen können. Zu diesem Zwecke haben wir zu untersuchen, welche Begrenzungen sowohl mit dem Gesetz der rationalen Indizes als auch mit den in jedem speziellen Fall existierenden Symmetrieverhältnissen verträglich sind.

Was den letzteren Punkt betrifft, so erinnern wir daran, daß man durch Drehung irgend einer Kristallfläche um eine Symmetrieachse um den zu dieser Achse gehörenden Winkel immer wieder eine neue Grenzfläche erhält, und zwar brauchen Achsen verschiedener Art hierbei nicht unterschieden zu werden, wenn man, wie wir das zunächst tun wollen, nur die *Richtung* der Grenzflächen ins Auge faßt. Erst späterhin, wenn wir auch die *Lage* der Flächen betrachten, wird sich die Notwendigkeit ergeben, auf die Art der Achsen Rücksicht zu nehmen.

§ 2. Was das Gesetz der Indizes anbelangt, so wissen wir, daß man, um dieses auszusprechen, die Schnittlinien OA, OB, OC dreier beliebiger Grenzflächen zu Koordinatenachsen wählen muß, auf die man die Lage jeder anderen Seitenfläche bezieht. Bezeichnen wir die von den Achsen abgeschnittenen Stücke, die wir *Koordinaten* nennen wollen, für *eine* Fläche mit a, b, c und für eine andere mit a', b', c', dann müssen die Verhältnisse der Größen

$$\frac{a'}{a},\ \frac{b'}{b},\ \frac{c'}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

rationale Zahlen sein. Ist dies der Fall, so können wir sagen, daß die verschiedenen Ebenen in bezug auf die Achsen OA, OB, OC dem Gesetz der rationalen Indizes genügen. Linien, wie OA, OB, OC in bezug auf welche das Gesetz gilt, wollen wir *kristallographische Achsen* nennen, wobei das Wort „kristallographisch" dazu dienen soll, eine Verwechslung mit den Symmetrieachsen auszuschließen. Aus dem Gesagten geht übrigens hervor, daß die Richtungen der kristallographischen Achsen in einem gegebenen Kristall keineswegs bestimmt sind; man

kann ja alles auf die Schnittlinien dreier beliebig gewählter Grenzflächen beziehen. Anderseits kann man aber auch nicht drei ganz willkürlich gewählte Richtungen im Raum als kristallographische Achsen betrachten; in bezug auf solche würde eben das Gesetz der rationalen Indizes nicht gelten.

Da es uns auf die *Richtung* der Grenzflächen ankommt, so können wir die Koordinaten a', b', c' mit einer beliebigen Zahl multiplizieren. Wir können dadurch bewirken, daß die erste der Größen (1) in eine ganze Zahl übergeht und die beiden andern in rationale Brüche, und also auch, daß die drei Größen sämtlich ganze Zahlen werden. Mit anderen Worten, wenn a, b, c die Koordinaten *einer* Fläche sind, so läßt sich für die Koordinaten jeder andern Fläche schreiben

$$la, \; mb, \; nc, \qquad (2)$$

wo l, m, n ganze Zahlen sind.

Die Richtungen aller möglichen Grenzflächen sind demnach bestimmt, sobald man die Koordinaten *einer* Fläche kennt. Diese, nämlich die Strecken a, b, c, nennt man die *Parameter* des Kristalls, wobei freilich zu bemerken ist, daß denselben keine ganz bestimmten Werte zukommen. Man kann ebensogut die Koordinaten irgend einer andern Ebene als Parameter nehmen, also z. B. drei beliebige Längen, die zu a, b, c in irgend welchen rationalen Verhältnissen stehen, oder die Längen

$$a, \; \mu b, \; \nu c,$$

wenn μ und ν rationale Faktoren sind.

Sind nun z. B. a und b kommensurabel, dann gewinnt die Darstellung an Einfachheit, wenn man μ so wählt, daß $\mu b = a$ wird; der Kristall hat dann, wie man sagt, zwei *gleiche* Parameter. Ebenso führt man *drei* gleiche Parameter ein, sobald die drei Koordinaten irgend einer Ebene rationale Verhältnisse zueinander zeigen. Was die Größe der Parameter betrifft, gibt es also drei Fälle, die sich durch die Symbole $\{a, a, a\}$, $\{a, a, c\}$ und $\{a, b, c\}$ angeben lassen.

Selbstverständlich wählt man bei jedem Kristall die kristallographischen Achsen und die Parameter derart, daß die Beschreibung der geometrischen Formen sich möglichst einfach gestaltet.

§ 3. Es ist noch zu bemerken, daß man in den Größen (2) eine oder auch zwei der ganzen Zahlen l, m, n unendlich groß werden lassen kann, ohne daß die Ebene, auf die sich die Größen beziehen, aufhört, eine mögliche Begrenzungsfläche zu sein. Man gelangt in dieser Weise zu Kristallflächen, die einer oder zwei kristallographischen Achsen parallel laufen, und zu der Umkehrung des Satzes, von welchem wir in § 2 ausgingen. Nicht nur können die Schnittlinien dreier Kristall-

flächen als kristallographische Achsen dienen, sondern auch umgekehrt kann man behaupten, daß, wenn drei Linien OA, OB, OC kristallographische Achsen sind, d. h. wenn in bezug auf diese das Gesetz der Indizes sich bewährt, die Ebenen AOB, BOC, COA die Richtungen möglicher Kristallflächen angeben. Das Wort „möglich" hat hier und an vielen andern Stellen dieselbe Bedeutung wie „mit dem Gesetz der Indizes verträglich". Es soll nicht gesagt sein, daß jede Fläche, die diese Bedingung erfüllt, auch wirklich vorkommt.

Übrigens ist, wie die Erfahrung lehrt, das genannte Gesetz so zu verstehen, daß eine oder mehrere der Zahlen l, m, n in (2) auch negativ sein können.

§ 4. Den weiteren Betrachtungen schicken wir noch folgende Bemerkungen voraus.

a) Wenn auf einer geraden Linie vier Punkte A, B, C, D rational zueinander liegen, ist, wie wir wissen,

$$\frac{AD \times BC}{BD \times AC}$$

eine rationale Zahl.

Lassen wir nun den Punkt D ins Unendliche rücken, so nähert sich das Verhältnis von AD und BD der Einheit. Im Grenzfall stehen daher die Strecken AC und BC zueinander und also auch zu AC in einem rationalen Verhältnis. Dies drücken wir dadurch aus, daß wir sagen, die Punkte A, B, C liegen rational zueinander.

b) Werden die Seiten AB und BC eines Dreiecks von einer Transversale so in den Punkten D und E geschnitten, daß D rational zu A, B, und ebenso E rational zu B, C liegt, so liegt auch der Durchschnittspunkt der Transversale mit der dritten Seite rational zu den Endpunkten dieser letzteren. Dies folgt sofort aus einem bekannten Satz der Planimetrie.

§ 5. Wir wollen jetzt untersuchen, welche kristallographischen Achsen mit welchen Parametern in den verschiedenen Fällen existieren können, und uns zugleicherzeit Gewißheit darüber verschaffen, daß wirklich alle Flächen, die wir dem Kristall zuschreiben, eine rationale Ebenengruppe bilden.

Hat zunächst der Kristall keine einzige Symmetrieachse, so gibt es gar kein Mittel, aus der Existenz von weniger als vier Seitenflächen auf das Vorhandensein einer neuen zu schließen. Wir können nur, nachdem wir die Richtungen von vier Flächen der Beobachtung entnommen haben, aus diesen mit Hilfe des Gesetzes der Indizes die Richtung aller möglichen weiteren Flächen ableiten. Als kristallographische Achsen können wir dann etwa die Schnittlinien der drei ersten Ebenen

nehmen und als Parameter die Stücke, welche die vierte Fläche von denselben abschneidet. Die Achsen stehen im allgemeinen schiefwinklig zueinander und die Parameter sind unter sich inkommensurabel.

§ 6. Wenn eine zweizählige Symmetrieachse existiert, so braucht man, (falls die Richtung derselben bekannt ist) nur die Richtung von zwei Grenzflächen, E_1 und E_2, durch Beobachtung zu bestimmen. Erteilt man nämlich diesen beiden eine Rotation von 180° um die Achse, dann erhält man zwei neue Grenzflächen E'_1 und E'_2 und jede weitere Seitenfläche ist nun der Bedingung zu unterwerfen, daß sie mit den vier genannten eine rationale Fünfebenengruppe bildet. Es stehe die Ebene der Zeichnung in Fig. 10 senkrecht zur Symmetrieachse und es mögen alle Kristallflächen durch einen Punkt P des in O errichteten Lotes, um welches wir die genannte Drehung geschehen lassen, gelegt werden. Jede Fläche kann dann durch ihre Schnittlinie mit der Ebene der Zeichnung, durch ihre Spur in dieser Ebene angegeben werden. Die Spuren der Ebenen E_1, E_2, E'_1, E'_2 bilden offenbar ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Mittelpunkt O, und wenn KL die Spur einer fünften Kristallfläche ist, so müssen die Punkte, in welchen eine der fünf Linien von den vier übrigen geschnitten wird, eine rationale Vierpunktreihe bilden. Fassen wir die Linie AB ins Auge und bemerken wir, daß sie von DC in unendlicher Entfernung geschnitten wird, dann zeigt es sich, daß A, Q, B rational zueinander liegen müssen. Gleiches gilt von B, R, C und man sieht leicht, daß, sobald diesen beiden Bedingungen genügt wird, die Gruppe der fünf Ebenen wirklich rational ist.

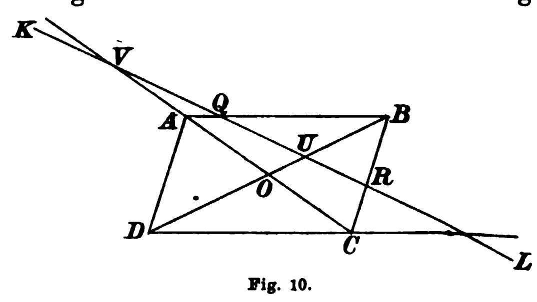


Fig. 10.

Wir benutzen dieses Resultat, um zu zeigen, daß die Ebene PKL und eine der vier andern, z. B. PAB, in bezug auf die Linien OP, OA, OB dem Gesetz der rationalen Indizes gehorchen. Die Koordinaten von PAB sind nämlich OP, OA, OB, die von PKL aber OP, OV, OU, und wir haben somit nur zu beweisen, daß

$$\frac{OV}{OA} \text{ und } \frac{OU}{OB}$$

rationale Zahlen sind. Dies ergibt sich sofort, wenn man den in § 4, b angeführten Satz einmal auf das Dreieck ABC mit der Transversale KL und dann auf das Dreieck ABD mit derselben Transversale anwendet. Von dem ersten Dreieck z. B. weiß man, daß A, Q, B und ebenso

B, R, C rational zueinander liegen. Daraus folgt, daß V rational zu A, C und also auch zu A, O liegt.

§ 7. Es ist ferner noch folgendes zu bemerken:

a) Die Fläche PKL genügt auch, wenn man sie mit PBC, PCD oder PDA kombiniert, dem Gesetz der rationalen Indizes in bezug auf die Achsen OP, OA, OB.

b) Gleiches gilt von der Ebene, die aus PKL durch Rotation um die zweizählige Achse entsteht. Diese Ebene hat nämlich die Koordinaten OP, $-OV$ und $-OU$.

c) Da PKL eine beliebig gewählte Seitenfläche des Kristalls war, so ist klar, daß für die Gesamtheit *aller* Kristallflächen das Gesetz der Indizes in bezug auf die eingeführten Achsen zutrifft. Alle Flächen zusammen bilden daher, wie es sein muß, eine rationale Gruppe (vgl. den vorigen Artikel, § 33).

d) Auch die Ebenen AOP, BOP, AOB geben die Richtung möglicher Grenzflächen an (vgl. oben, § 3).

Das Hauptergebnis unserer Untersuchung ist, daß bei einem Kristall mit einer zweizähligen Symmetrieachse eine senkrecht auf dieser stehende Ebene eine mögliche Grenzfläche ist, und daß die Symmetrieachse in Verbindung mit zwei Linien, nämlich OA und OB, in jener Ebene als kristallographische Achse eingeführt werden kann. Der Winkel zwischen den letzteren Linien ist im allgemeinen schief und die drei Parameter sind voneinander verschieden.

Übrigens können auch andere Linien in der zu OP senkrechten Ebene, in Verbindung mit OP selbst als kristallographische Achsen genommen werden, z. B. die durch O parallel zu AB und BC gezogenen Geraden. Dies geht daraus hervor, daß die durch AB und BC parallel zu OP gelegten Ebenen zu den möglichen Kristallflächen gehören (§ 3).

§ 8. Der nächste Fall, den wir zu betrachten haben, ist der eines Kristalls mit einer dreizähligen Symmetrieachse. Hier können wir mittels Drehungen von 120^0 um diese letztere aus *einer* Kristallfläche E_1 zwei andere E_2 und E_3 ableiten, die offenbar mit E_1 eine gleichseitige dreiflächige Ecke bilden, deren Spitze P auf der Linie PQ liegt, um welche die Drehung stattgefunden hat und deren Kanten PA, PB, PC wir zu kristallographischen Achsen wählen wollen. Von den Parametern a, b, c läßt sich nun zeigen, daß die dritten Potenzen derselben unter sich kommensurabel sein müssen. Hat nämlich irgend eine Kristallfläche die Koordinaten

$$la,\ mb,\ nc \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wo l, m, n, wie wir wissen, ganze Zahlen sind, dann entstehen aus der-

selben durch zweimalige Drehung von 120° um die Achse PQ neue Ebenen mit den Koordinaten

$$mb,\ nc,\ la \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und

$$nc,\ la,\ mb \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Wendet man das Gesetz der rationalen Indizes auf die Ebenen (3) und (4), oder auf (4) und (5) an, so findet man, daß die Größen

$$\frac{m^2 b^2}{lnac} \text{ und } \frac{n^2 c^2}{lmab}$$

und also auch die Größen

$$\frac{b^2}{ac} \text{ und } \frac{c^2}{ab}$$

rational sein müssen. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß b^3, c^3 (und also auch a^3) in einem rationalen Verhältnis zu abc stehen. Sobald dies der Fall ist, können sämtliche Grenzflächen eine rationale Gruppe bilden.

Da wir aus der Bedingung, die wir für a^3, b^3, c^3, abc gefunden haben, nicht schließen dürfen, daß a, b, c selbst miteinander kommensurabel sind, so gehört im allgemeinen eine Ebene mit gleichen Koordinaten, d. h. eine Ebene, die senkrecht zu der Symmetrieachse steht, *nicht* zu den möglichen Kristallflächen.

Abgesehen von der Kommensurabilität von a^3, b^3, c^3, abc, liegt das Eigentümliche der Kristalle mit einer dreizähligen Symmetrieachse darin, daß man für dieselben kristallographische Achsen einführen kann, die durch Drehungen von 120° um die Symmetrieachse miteinander zur Deckung gebracht werden können. Daß es in einem gegebenen Körper unendlich viel derartige kristallographische Achsen gibt, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

§ 9. Auch jetzt können wir die Richtungen der verschiedenen Flächen in der § 6 benutzten Weise veranschaulichen. Zu diesem Zwecke schneiden wir die im letzten Paragraphen eingeführte dreiseitige Ecke durch eine Ebene, die senkrecht zur Symmetrieachse steht. Es entsteht dann ein gleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 11), dessen Seiten die Spuren der Ebenen PAB usw. sind. Ist nun KL die Spur der oben durch die Koordinaten (3) bestimmten Ebene, nachdem man sie nach P hin

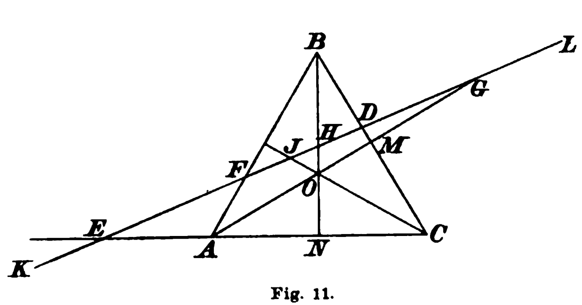


Fig. 11.

verlegt hat, dann findet man leicht durch Betrachtung der in den Ebenen PBC, PCA, PAB gebildeten Figuren

$$\frac{BD}{CD} = \frac{nc}{mb}, \quad \frac{CE}{AE} = \frac{la}{nc}, \quad \frac{AF}{BF} = \frac{mb}{la} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Mit Rücksicht auf das für die Parameter a, b, c Bewiesene folgt hieraus, daß diese drei Größen unter sich kommensurabel sind. Da das Produkt derselben den Wert 1 hat, so kann man weiter schließen, daß

$$\left(\frac{BD}{CD}\right)^3, \quad \left(\frac{CE}{AE}\right)^3, \quad \left(\frac{AF}{BF}\right)^3$$

rationale Werte haben. Damit haben wir die Bedingungen gefunden, an welche in Fig. 11 die Spur jeder durch P gehenden Kristallfläche gebunden ist.

§ 10. Die speziellen Eigenschaften von Kristallen mit einer vierzähligen Achse lassen sich sehr leicht ermitteln, wenn man sich aufs neue der in den Figuren 10 und 11 angewandten Darstellungsweise bedient. Durch wiederholte Rotation erhält man jetzt aus *einer* Seitenfläche drei andere, deren Spuren mit der Spur der ursprünglichen ein Quadrat $ABCD$ (Fig. 12) bilden. Ferner kann man schließen wie in § 6, nur daß an die Stelle des Parallelogramms $ABCD$ in Fig. 10 das genannte Quadrat tritt. Der Kristall läßt daher drei zueinander senkrechte kristallographische Achsen OP, OA, OB zu, deren eine mit der Symmetrieachse zusammenfällt, während die zu den beiden andern gehörenden Parameter gleiche Werte haben. Die Lage der beiden zu der Symmetrieachse und zueinander senkrechten kristallographischen Achsen bleibt hierbei teilweise unbestimmt und mit dieser Lage ändern sich auch die entsprechenden Parameter. Während diese für die Achsen OA und OB die Länge $OA = OB$ haben, hat man es, wenn man die Linien OM und ON (vgl. § 7) zu kristallographischen Achsen wählt, mit den Parametern OM und ON zu tun, deren Länge gleich $OA\sqrt{2}$ ist. Dies folgt z. B. aus dem Umstande, daß auch die Ebene PMN, die in bezug auf OP, OA, OB die Koordinaten OP, ∞, OB hat, dem Gesetz der Indizes zufolge eine mögliche Kristallfläche ist.

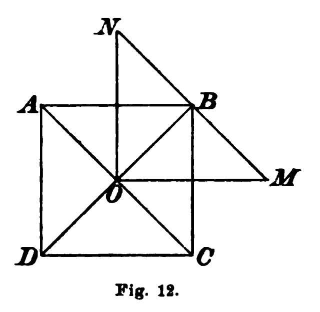


Fig. 12.

Bei dem Nachweis, daß alle Kristallflächen, die man durch Rotation um die vierzählige Symmetrieachse erhalten kann, wirklich zusammen eine rationale Ebenengruppe bilden, brauchen wir uns nicht aufzuhalten.

§ 11. Wir wenden uns nunmehr den Kristallen mit einer sechszähligen Symmetrieachse zu. Da eine solche auch eine zwei- und eine

dreizählige Achse ist, so gilt sowohl das in §§ 6 und 7 als auch das in §§ 8 und 9 Gesagte. Zu den möglichen Kristallflächen gehört die zu der Achse senkrecht stehende. Diese hat in bezug auf die Achsen PA, PB, PC von § 8 gleiche Koordinaten, und wir dürfen somit die zu diesen Achsen gehörenden Parameter a, b, c einander gleichsetzen. Ferner folgt dann, daß, (vgl. die Formeln (6)) in Fig. 11, wenn KL die Spur einer beliebigen Kristallfläche ist, die Verhältnisse

$$\frac{BD}{CD}, \; \frac{CE}{AE}, \; \frac{AF}{BF}$$

(und nicht bloß ihre dritten Potenzen) rationale Werte haben. Man sieht das auch sofort ein, wenn man erwägt, daß jetzt die Ebene ABC eine Grenzfläche ist und daß somit die in A, B oder C zusammenstoßenden Kanten des Tetraeders $PABC$ als kristallographische Achsen dienen können. Nimmt man z. B. für diese AP, AB, AC, dann sind die Koordinaten der Ebene PBC

$$AP, \; AB, \; AC$$

und die der Ebene PKL

$$AP, \; AF, \; AE.$$

Aus dem Gesetz der Indizes folgt daher, daß die Punkte A, B, F und ebenso die Punkte A, C, E rational zueinander liegen.

Wir machen von dem in § 4, b genannten Satze Gebrauch, um zu zeigen, daß zwei der Linien, welche den Mittelpunkt O des gleichseitigen Dreiecks mit den Eckpunkten verbinden, etwa OA und OB, zusammen mit der Senkrechten OP kristallographische Achsen sind. Bezogen auf diese Linien OP, OA, OB hat die Seitenfläche PAB die Koordinaten

$$OP, \; OA, \; OB \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und die beliebig gewählte Grenzfläche PKL die Koordinaten

$$OP, \; OG, \; OH.$$

Das Gesetz der Indizes erfordert daher, daß OG in einem rationalen Verhältnis zu OA steht, und ebenso OH zu OB. Für OG und OA ergibt sich dies, wenn man den soeben genannten Satz auf das Dreieck ABM mit der Transversale KL anwendet. Wir wissen nämlich, daß F rational zu A, B und ebenso D rational zu B, C, also, da M die Mitte von BC ist, auch zu B, M liegt. Folglich liegt G rational zu A, M, und weil $AO = 2\,OM$ ist, ebenfalls zu A, O. Daß OB und OH kommensurabel sind, geht in derselben Weise aus der Betrachtung des Dreiecks ABN, wieder mit der Transversale KL hervor.

Auch mit PBC oder PCA kombiniert, genügt die Ebene PKL in bezug auf die Linien OP, OA, OB dem Gesetz der Indizes. Was aber die zu diesen Linien gehörenden Parameter betrifft, so können wir

denselben, da PAB eine Grenzfläche ist, offenbar die Werte (7) beilegen. Also: in einem Kristall mit einer sechszähligen Symmetrieachse kann man zwei senkrecht zu dieser stehende und sich unter einem Winkel von 120° schneidende Linien angeben, die mit der Symmetrieachse selbst ein System kristallographischer Achsen bilden, und zwar haben die für diese beiden Linien geltenden Parameter gleiche Länge.

Es ist indes nicht aus dem Auge zu verlieren, daß die Richtung jener beiden kristallographischen Achsen, obgleich wir sie nicht ganz nach Belieben annehmen dürfen, doch in hohem Grade unbestimmt bleibt. Nicht nur können wir statt OA, OB auch OB, OC oder OC, OA wählen; wir hätten ganz andere Richtungen (mit andern Werten der Parameter) erhalten, wenn wir ursprünglich nicht von PAB, sondern von irgend einer andern Seitenfläche ausgegangen wären.

Daß Ebenen, die in bezug auf OP, OA, OB dem Gesetz der Indizes gehorchen, dies auch tun, wenn man OP, OB, OC als kristallographische Achsen zugrunde legt, läßt sich ohne Mühe bestätigen. Man hat nur zu berücksichtigen, daß, sobald G rational zu O, A und zugleicherzeit H rational zu O, B liegt, auch der Schnittpunkt J der Linie KL mit OC rational zu O, C liegen wird. Um uns hiervon zu überzeugen, wenden wir wieder den Satz von § 4, b, an und leiten zunächst aus der Annahme, daß G und H rational zu O, A bzw. O, B liegen, die Kommensurabilität von BD und CD, sowie die von BF und AF ab, woraus dann weiter folgt, daß J rational zu O und C liegt.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses können wir nun endlich zeigen, daß, wenn man zwei Ebenen gefunden hat, deren Richtungen mit dem Gesetz der Indizes in bezug auf POA, POB, AOB in Übereinstimmung sind, und dann *einer* Ebene eine Rotation von 60° um die Symmetrieachse erteilt, diese in ihrer neuen Lage wieder mit der andern jenem Gesetz genügt.

Bei der Drehung einer durch P gehenden Ebene wird nämlich die Spur derselben mit der Ebene ABC eine Drehung von 60° um den Punkt O erleiden. Diese Spur möge ursprünglich die Linien OA, OB, OC in G, H, J schneiden. Findet nun die Rotation im Sinne der Uhrzeigerbewegung statt, dann hat die Linie nach der Drehung dieselbe Lage gegen OB und OM, wie vorher gegen OJ und OB. Der neue Schnittpunkt mit AM wird also in einer Entfernung von O liegen, die der Distanz OH gleich ist, er liegt daher rational zu O, A, weil H rational zu O, B lag. Ebenso folgt aus der rationalen Lage von O, C, J (die wir oben aus der rationalen Lage von O, A, G und aus der von O, B, H abgeleitet haben), daß der neue Schnittpunkt mit OB rational zu O, B liegen wird. Damit ist gezeigt, daß eine Ebene, die mit POA, POB, AOB, PAB eine rationale Fünfebenengruppe bildet, auch nach der betrachteten Drehung dieselbe Eigenschaft besitzt.

§ 12. Nachdem wir hiermit die Fälle, in denen nur eine einzige Symmetrieachse besteht, erledigt haben, können wir zu den Kristallen mit mehr als *einer* solchen Achse übergehen. Besonders einfach liegen da die Verhältnisse, wenn drei zueinander senkrechte zweizählige Achsen vorhanden sind. Jede derartige Achse bedingt nämlich (§ 7) die Existenz einer zu ihr senkrechten Grenzfläche und die drei durch die Achsen gelegten Ebenen geben daher die Richtungen möglicher Seitenflächen des Körpers an. Als kristallographische Achsen können folglich die Symmetrieachsen selbst dienen. Die Parameter a, b, c bleiben dabei noch unbestimmt. Man wird immer, welche Größen sie auch haben mögen, aus einer Ebene, deren Koordinaten Vielfache von a, b, c sind, durch Umklappung um eine der Symmetrieachsen eine neue Ebene mit derselben Eigenschaft erhalten.

§ 13. Wir schließen hier gleich die Besprechung der Kristalle mit einer vierzähligen Hauptachse und vier zweizähligen senkrecht zu derselben gerichteten Nebenachsen an. Da die Hauptachse auch zweizählig ist, so können wir unter Anwendung des soeben Gefundenen sie und zwei zueinander senkrechte Nebenachsen zu kristallographischen Achsen wählen. Die beiden letzteren seien OR und OS in Fig. 13, bei der wir uns die Hauptachse OP durch den Punkt O senkrecht zur Ebene der Zeichnung zu denken haben, und in welcher EF die Spur irgend einer durch den Punkt P gelegten Grenzfläche sein möge. Dem Parallelogramm in Fig 10 entspricht jetzt das Quadrat $ABCD$, welches O zum Mittelpunkt hat und von dem eine Seite in EF liegt.

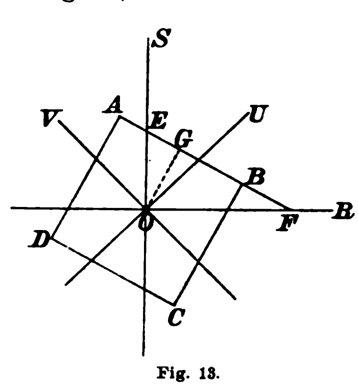


Fig. 13.

Da nun OR und OS die Spuren möglicher Kristallflächen sind, so müssen sowohl F als auch E rational zu A und B liegen. Daraus folgt, daß, wenn OG senkrecht auf AB steht und also G die Mitte von AB ist, zwischen EG und FG ein rationales Verhältnis besteht, und daß auch OE und OF kommensurabel sind. Wir haben daher jetzt den Achsen OR, OS gleiche Parameter beizulegen. Das Resultat steht im Einklang mit dem in § 10 Gefundenen, geht aber insofern weiter, als wir jetzt in zwei Nebenachsen Richtungen erkannt haben, die in Verbindung mit der vierzähligen Achse zu kristallographischen Achsen gewählt werden können. Selbstverständlich können nun auch (abgesehen von andern gleichfalls zulässigen Wahlen) die zwei senkrecht zur Hauptachse stehenden kristallographischen Achsen längs der andern zweizähligen Achsen OU, OV gelegt werden. Be-

sondere Beachtung verdient es dabei, daß (vgl. § 10), wenn die Parameter für OR und OS den Wert a haben, bei jener neuen Wahl der kristallographischen Achsen die Parameter $a\sqrt{2}$ (oder, wie man ebensogut sagen kann, die Parameter $\frac{a}{\sqrt{2}}$) auftreten, vorausgesetzt, daß man den Parameter für die dritte Achse ungeändert läßt.

§ 14. Den Fall eines Kristalls mit einer dreizähligen und drei senkrecht zu dieser stehenden und sich unter gleichen Winkeln schneidenden zweizähligen Symmetrieachsen besprechen wir mit Hilfe von Fig. 14. In dieser hat das gleichseitige Dreieck ABC dieselbe Bedeutung wie in Fig. 11; wir denken uns wieder, daß die dreizählige Achse im Mittelpunkte O senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht, und daß alle Grenzflächen durch ein und denselben Punkt P der genannten Achse gehen. Es seien ferner OE und OF die senkrecht zu zwei zweizähligen Achsen gezogenen Linien, so daß $\angle EOF = 120^0$ ist. Diese Linien sind die Spuren der durch P senkrecht zu diesen Achsen gelegten Ebenen und müssen also, da letztere mögliche Seitenflächen sind, der in § 9 erörterten Bedingung genügen. Z. B. sind

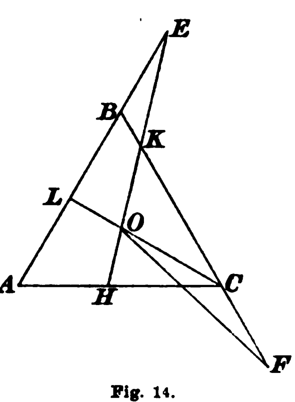


Fig. 14.

$$\frac{AE}{BE} \text{ und } \frac{CH}{AH}$$

kommensurabel, so daß

$$\frac{AE \times AH}{BE \times CH} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

eine rationale Zahl ist.

Wir ziehen die Gerade COL und fassen das Dreieck CAL mit der Transversale HE ins Auge. Es ist $CO = 2\,LO$ und also

$$\frac{AE \times CH}{LE \times AH} = 2.$$

Verbindet man dies mit (8), dann erhellt, daß

$$\frac{2\,LE \times BE}{AE^2} = \frac{BE}{AE} + \frac{BE^2}{AE^2}$$

eine rationale Zahl ist.

Dasselbe kann man von

$$\frac{AE}{BE} + \frac{AE^2}{BE^2}$$

beweisen. Setzt man also $\frac{BE}{AE} = k$, so müssen die Ausdrücke $k + k^2$ und $\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$ rationale Zahlen sein. Das Produkt dieser Größen ist

$2 + k + \frac{1}{k}$ und ihre Differenz $\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(1 + k + \frac{1}{k}\right)$. Folglich müssen sowohl $k + \frac{1}{k}$ als auch $k - \frac{1}{k}$ rational sein, was nur möglich ist, wenn k selbst eine rationale Zahl ist.

Hiermit ist dargetan, daß der Schnittpunkt E rational zu A und B liegt. Dasselbe gilt von K in bezug auf B, C sowie von H in bezug auf A, C.

Durch eine Parallelverschiebung der Ebene PEH bewirke man jetzt, daß sie von den drei Linien PA, PB, PC gewisse Stücke abschneidet. Eine Schlußfolgerung, die man als die Umkehrung der in § 9 erwähnten betrachten kann, führt zu dem Schluß, daß jene Stücke kommensurabel miteinander sind, und daß es also auch Grenzflächen geben kann, die von PA, PB, PC *gleiche* Stücke abschneiden. Folglich ist, ebenso wie in § 11, auch die senkreckt zur dreizähligen Symmetrieachse liegende Ebene ABC eine mögliche Kristallfläche, was sie in dem § 8 betrachteten Fall, bei Abwesenheit der zweizähligen Achsen, nicht notwendig zu sein brauchte.

Da auch POE und POF Grenzflächen sind, so können wir die Linien OP, OE, OF zu kristallographischen Achsen wählen, und zwar haben wir den beiden letzteren gleiche Parameter zuzuschreiben. Dieses folgt daraus, daß die betreffenden Koordinaten OK und OF der Fläche PBC kommensurable Werte haben. Man hat nämlich $OF = OE$ und die Punkte O, K, E liegen auf der Linie OE rational zueinander, da auf den beiden andern Seiten des Dreiecks OCK (mit der Transversale AE) die Punkte C, K, B, sowie C, O, L eine derartige Lage haben.

Wir kommen also, was die gegenseitige Lage der zulässigen kristallographischen Achsen und die Werte der Parameter betrifft, zu genau demselben Ergebnis wir in § 11, nur daß wir jetzt die Richtung der zwei sich unter einem Winkel von 120° schneidenden Achsen fixieren konnten. Wir hatten Anlaß, sie senkrecht zu zwei zweizähligen Achsen zu legen. Indes gibt es unter den unendlich vielen Lagen, welche man diesen Achsen geben kann, auch solche, in welchen sie mit den genannten zweizähligen Achsen zusammenfallen. Den Beweis für diese Behauptung entnehmen wir der Fig. 15, in welcher OE, OF, OG die zu den zweizähligen Achsen senkrechten Linien, von der gleichen Länge a sind, und EF, FG, GE die Spuren dreier durch den oft genannten Punkt P gelegter Grenzflächen. Eine durch O senkrecht zu OE gezogene Linie schneidet EF und EG so, daß $EM = \frac{2}{3} EF$ und $EN = \frac{2}{3} EG$ ist. In bezug auf die Linien EP, EF, EG, die man offenbar für die kristallographischen

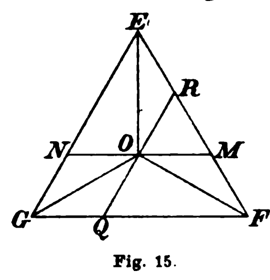


Fig. 15.

Achsen nehmen kann, genügen die Ebenen *PFG* und *PMN* dem Gesetz der rationalen Indizes, woraus man sieht, daß *PMN* eine mögliche Grenzfläche ist. *PQR* senkrecht zu *OF*, ist es gleichfalls; wir dürfen daher die Linien *OP*, *OM*, *OQ*, deren beide letztere mit zweizähligen Achsen zusammenfallen, zu kristallographischen Achsen wählen.

Zieht man noch in Betracht, daß *EF* die Spur einer durch *P* gehenden Grenzfläche ist, und daß diese von *OM* und *OQ* die Stücke *OM* und *OR*, beide von der Länge $\frac{a}{\sqrt{3}}$, abschneidet, so ergibt sich, daß man, bei dem Übergang von den kristallographischen Achsen *OE*, *OF* zu *OM*, *OQ*, die Parameter a durch $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (oder, wie man auch sagen kann, $a\sqrt{3}$) ersetzen muß. Vorausgesetzt ist hierbei, daß man den Parameter für die dritte kristallographische Achse, die Hauptsymmetrieachse, ungeändert läßt.

Es möge noch hinzugefügt werden, daß man auch *OP* und die beiden senkrecht aufeinander stehenden Linien *OE* und *OM* als kristallographische Achsen nehmen kann. Behält dabei der Parameter für *OP* seinen bisherigen Wert, dann werden die beiden andern Parameter etwa

$$OE = a \text{ und } OM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

§ 15. Von den Kristallen mit einer sechszähligen Hauptachse und sechs zu ihr senkrechten zweizähligen Nebenachsen ist jetzt kaum etwas mehr zu sagen, als daß für sie alles in § 11 und in § 14 Gefundene gilt. Die Nebenachsen zerfallen hier in zwei Gruppen, die je drei sich unter Winkeln von 120° schneidende Achsen enthalten. Als kristallographische Achsen können nun, in Verbindung mit der Hauptachse, entweder zwei Symmetrieachsen der ersten oder zwei Symmetrieachsen der zweiten Gruppe genommen werden, wobei, falls man von der einen Wahl zu der andern übergehen will, die Parameter in der im letzten Paragraphen angegebenen Weise zu ändern sind. Daß nun eine Seitenfläche, die zu einer Gruppe von unter sich rationalen und den Symmetrieverhältnissen entsprechenden Ebenen gehört, diese Gruppe nicht verläßt, wenn sie entweder eine Drehung von 60° um die Hauptachse oder eine solche von 180° um eine Nebenachse erleidet, brauchen wir nicht weiter zu erklären.

§ 16. Auch für diejenigen Kristalle, deren Symmetrieachsen wir uns im vorigen Artikel mit Hilfe eines Würfels veranschaulichten, werden wenig Worte genügen. Die drei durch den Mittelpunkt des Würfels parallel zu den Kanten gezogenen Linien sind zweizählige Symmetrieachsen und können daher (§ 12) zu kristallographischen

Achsen gewählt werden, während aus der Existenz der vier dreizähligen Symmetrieachsen folgt (vgl. § 8), daß die dritten Potenzen der Parameter a, b, c und das Produkt abc in rationalen Verhältnissen zueinander stehen müssen.

Das ist alles, was wir sagen können, wenn der Kristall nur vier dreizählige und drei zweizählige Symmetrieachsen besitzt. Sind die drei zueinander senkrechten Achsen vierzählig, was das Vorhandensein von sechs zweizähligen Symmetrieachsen involviert, so kann man noch hinzufügen, daß die obengenannten Parameter einander gleich werden (vgl. § 10). Damit sind wir zu dem einfachsten aller Fälle, charakterisiert durch drei zueinander senkrechte kristallographische Achsen mit gleichen Parametern, gekommen. Übrigens gilt für diesen, wie für den vorhergehenden Fall wieder die Bemerkung, von deren Richtigkeit man sich ohne Mühe überzeugen wird, daß es eine Gruppe von Ebenen geben kann, von solchen Richtungen, daß sie dem Gesetz der rationalen Indizes genügen, und daß jede derselben auch noch zu der Gruppe gehört, nachdem man ihr eine Drehung von der richtigen Größe um die eine oder die andere Symmetrieachse erteilt hat.

§ 17. Während uns die Untersuchung der Lagen, welche die kristallographischen Achsen gegeneinander haben können, und der relativen Werte der Parameter nur zu einer verhältnismäßig beschränkten Anzahl verschiedener Fälle geführt hat, ergibt sich eine viel größere Verschiedenheit, entsprechend den 32 Kristallklassen des vorigen Artikels, wenn wir uns die Frage stellen, wie viel und welche Seitenflächen auf Grund der in den einzelnen Klassen bestehenden Symmetrie zusammengehören. Hierbei haben wir die Achsen erster und zweiter Art voneinander zu unterscheiden und im Zusammenhang damit nicht nur auf die *Richtung*, sondern auch auf die *Lage* der Grenzflächen zu achten. Letzteres ist indes nicht so zu verstehen, als ob eine bestimmte Seitenfläche nicht ebensogut, wenn der Kristall unter andern Umständen gewachsen wäre, etwas nach innen oder nach außen verschoben sein könnte; es handelt sich vielmehr bloß um den Unterschied zwischen Flächen von derselben Richtung, die an *entgegengesetzten* Seiten des Kristalls, etwa die eine oben und die andere unten, liegen. Es gibt Fälle, in denen solche „gegenüberliegende“ Flächen, wie wir sie nennen wollen, zugleicherzeit vorkommen, aber auch andere, in welchen sich nur eine derselben vorfindet; man kann daher nicht sagen, daß im allgemeinen das Auftreten der einen Fläche notwendig mit dem Vorhandensein der andern verbunden sei.

Im allgemeinen sind nur dann zwei gegenüberliegende Flächen als gleich möglich zu betrachten, wenn der Körper zu sich selbst invers ist, mit andern Worten, wenn ein Symmetriezentrum besteht. Invertiert

man nämlich irgend ein Polyeder, (indem man es zunächst an einer Ebene spiegelt und dann um eine zu dieser Ebene senkrechte Achse über 180° dreht), dann entsteht ein neuer Körper, derart daß entsprechende Ebenen in diesem und dem Original gegenüberliegende Ebenen sind, und zwar liegen solche Ebenen gleichweit, aber auf entgegengesetzten Seiten von dem „Inversionszentrum", d. h. von dem gemeinsamen Schnittpunkte aller Verbindungslinien korrespondierender Punkte. Sind nun zwei Kristalle invers zueinander, so müssen wir annehmen, daß, wenn E eine mögliche Grenzfläche des einen ist, in der Begrenzung des andern die gegenüberliegende Ebene vorkommen kann. Demgemäß involviert die Aussage, ein Kristall sei zu sich selbst invers, daß, wenn die Eigenschaften seiner Substanz die Existenz einer gewissen Ebene zulassen, die gegenüberliegende Ebene ebensogut mit denselben verträglich ist.

§ 18. Bei den weiteren Betrachtungen kann man sich des Begriffs der sogenannten „einfachen Kristallform" bedienen. Um diese zu erhalten, nehmen wir zunächst im Innern des Kristalls einen bestimmten festen Punkt O an; durch diesen legen wir alle Symmetrieachsen, sowie die kristallographischen Achsen, und überdies betrachten wir ihn, sobald von einer Inversion die Rede ist, als das Inversionszentrum. Wir legen ferner irgend eine Grenzfläche E zugrunde und machen von dem Vorhandensein von Symmetrieachsen oder eines Symmetriezentrums Gebrauch, um aus dieser Fläche andere abzuleiten. Wenn ein Symmetriezentrum existiert, so ist die neue Ebene, wie wir bereits wissen, die gegenüberliegende von E. Besitzt aber der Kristall eine Symmetrieachse mit dem Drehungswinkel ϑ, dann drehen wir, indem wir den Kristall selbst festhalten, die Fläche E um die Achse in der einen oder andern Richtung über den Winkel ϑ. Die dadurch erhaltene Ebene möge E' heißen. Auch diese ist eine mögliche Grenzfläche des Kristalls, wenn die Achse von der ersten Art ist. Dagegen können wir das nicht behaupten, wenn wir es mit einer Achse zweiter Art zu tun haben, wenn also der Kristall nach einer Rotation ϑ invers zu sich selbst in der ursprünglichen Lage ist. Dann ist, wie man leicht sieht, nicht E', sondern die ihr gegenüberliegende Ebene E'' eine Fläche, von der man sagen kann, daß sie ebensogut wie die ursprüngliche in der Begrenzung des Kristalls vorkommen kann.

Je nach der Art der Achse ist also entweder E' oder E'' die neue Grenzfläche, die sich aus der angenommenen E ergibt. Zu *beiden* Flächen wird man nur dann geführt, wenn die Achse sowohl von der ersten als auch von der zweiten Art ist, wenn also der Kristall ein Symmetriezentrum besitzt.

Wenn es außer der betrachteten noch andere Achsen gibt, so kann

man auch diese benutzen, um aus E neue Flächen abzuleiten, und man kann auch von jeder Fläche, die man bereits aus einer andern abgeleitet hat, mit Hilfe der verschiedenen Achsen und eventuell des Symmetriezentrums wieder zu neuen Ebenen übergehen. Man setze nun dieses Verfahren fort, bis sich keine neuen Ebenen mehr ergeben. Die Fläche E, von der man ausgegangen ist, und die verschiedenen daraus abgeleiteten Flächen, als vollständige oder teilweise Begrenzung eines gewissen Raumes gedacht, machen dann die einfache Kristallform aus.

Allerdings ist diese, auch wenn die Symmetrieachsen gegeben sind, noch nicht völlig bestimmt, da man die ursprüngliche Ebene E durch eine andere ersetzen kann. Dabei bleibt jedoch, wenn man dieser Ebene nicht gewisse ganz spezielle Lagen gibt, der allgemeine Charakter der erhaltenen Figur ungeändert. In diesem Sinne kann man sagen, daß letztere für die betreffende Kristallklasse charakteristisch ist.

Was nun die einfachen Kristallformen in den einzelnen Klassen anbelangt, so werden wir uns auf einige Beispiele beschränken. Wir wählen diese so, daß sie einen bemerkenswerten Umstand hervortreten lassen. Es kommt nämlich vor, daß man aus der Kristallform einer Klasse A die einer Klasse B dadurch erhält, daß man die Hälfte der Seitenflächen fortläßt. In diesem Falle bezeichnet man die Form von A als *holoedrisch* und die von B als *hemiedrisch*. Gibt es nun noch eine dritte Klasse C, deren Kristallform aus der Hälfte der bei B vorkommenden Flächen besteht, so wird diese im Vergleich mit A *tetartoedrisch* genannt.

§ 19. Als erstes Beispiel sollen uns die Kristalle mit vier dreizähligen Achsen dienen. Wir legen die in § 16 angenommenen kristallographischen Achsen, die wir OX, OY, OZ nennen, zugrunde und bezeichnen mit dem Symbol (p, q, r) eine Grenzfläche, deren Koordinaten p, q, r sind, wobei wir jetzt positive und negative Koordinaten zu unterscheiden haben. Von *einer* Ebene ausgehend, erhalten wir nun durch wiederholte Rotation um die dreizähligen Achsen, die, wie wir sahen, jedenfalls erster Art sind, folgende Gruppe von 12 Flächen.

$$\left.\begin{array}{lll} (p, q, r), & (q, r, p), & (r, p, q), \\ (p, -q, -r), & (q, -r, -p), & (r, -p, -q), \\ (-p, q, -r), & (-q, r, -p), & (-r, p, -q), \\ (-p, -q, r), & (-q, -r, p), & (-r, -p, q). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

Wenn nun die dreizähligen Achsen nur von der ersten Art, und die Achsen OX, OY, OZ nur zweizählig (und nicht vierzählig) sind, in welchem Fall auch diese letzteren von der ersten Art sind, so führt weder die Rotation um eine dreizählige noch die um eine zweizählige

Achse zu neuen Flächen; dann ist also (9) die vollständige Darstellung der einfachen Kristallform.

Neue Flächen kommen aber hinzu, sobald OX, OY, OZ vierzählige Achsen sind, und also auch die im vorigen Artikel genannten sechs zweizähligen Achsen auftreten. Indem wir uns zunächst noch an die Voraussetzung halten, daß ein Symmetriezentrum nicht existiert, unterscheiden wir die Kristalle mit vierzähligen Achsen erster und mit solchen zweiter Art. Im ersten Fall gesellen sich zu den Flächen (9) noch die neuen Ebenen

$$\left.\begin{array}{lll} (\ p, -r, \ q), & (\ q, -p, \ r), & (\ r, -q, \ p), \\ (\ p, \ r, -q), & (\ q, \ p, -r), & (\ r, \ q, -p), \\ (-p, \ r, \ q), & (-q, \ p, \ r), & (-r, \ q, \ p), \\ (-p, -r, -q), & (-q, -p, -r), & (-r, -q, -p). \end{array}\right\} \quad (10)$$

Im zweiten Fall dagegen sind die neuen Ebenen, zu welchen die Existenz der vierzähligen Achsen uns führt, die gegenüberliegenden von (10).

Indem wir nun schließlich noch den Einfluß eines Symmetriezentrums beachten, gelangen wir zu folgender Übersicht.

Klasse $[3(4), 4(3), 6(2), C]$. Holoedrische Form, bestehend aus den Flächen (9), (10) und den gegenüberliegenden. (48 Flächen.)

" $[3^1(4), 4^1(3), 6^1(2)]$. Hemiedrische Form, bestehend aus den Flächen (9) und (10). (24 Flächen.)

" $[3^2(4), 4^1(3), 6^2(2)]$. Hemiedrische Form, bestehend aus den Flächen (9) und den gegenüberliegenden von (10). (24 Flächen.)

" $[4(3), 3(2), C]$. Hemiedrische Form, bestehend aus den Flächen (9) und ihren gegenüberliegenden. (24 Flächen.)

" $[4^1(3), 3^1(2)]$. Tetartoedrische Form mit den 12 Flächen (9).

§ 20. Ein zweites Beispiel liefern uns die Klasse $[3(2), C]$ und einige andere, die es nahe liegt mit ihr zu vergleichen. Von den drei zweizähligen Achsen wollen wir uns der Anschaulichkeit wegen die eine vertikal gestellt denken. Ist nun auch ein Symmetriezentrum vorhanden, so ist die einfache Kristallform ein Oktaeder, das sich aus zwei mit den rhombischen Grundflächen gegeneinandergestellten Pyramiden zusammensetzt. Wir wollen die vier oberen Flächen in der Reihenfolge, in der sie sich aneinander anschließen, mit α, β, γ, δ bezeichnen, die vier unteren aber mit α', β', γ', δ', und zwar soll α' an α stoßen, β' an β, usw., so daß α und γ', β und δ', usw. je ein Paar gegenüberliegender Flächen sind.

Der Form $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta')$ in der Klasse $[3(2), C]$, die wir holoedrisch nennen können, stellen sich drei Hemiedrien gegen-

über, nämlich die Formen (α, γ, β', δ') in der Klasse [3^1(2)], (α, β, γ, δ) in der Klasse [1^1(2), 2^2(2)] und (α, γ, α', γ') in der Klasse [1 (2), C], wobei wir angenommen haben, daß die einzige zweizählige Achse erster Art oder die einzige zweizählige Achse die vertikale Richtung hat. Ferner gibt es drei tetartoedrische Formen. Diese sind: (α, γ) in der Klasse [1^1(2)], (α, α') in der Klasse [1^2(2)] und (α, γ') in der Klasse [0, C]. Man könnte sogar noch einen Schritt weiter gehen und die aus der einzigen Fläche α bestehende Form, welche der Klasse [0] zukommt, als Hemiedrie einer der zuletzt genannten Formen auffassen.

Die angeführten Beispiele zeigen, daß eine Hemiedrie aus der holoedrischen Form durch das Fehlen entweder eines Symmetriezentrums oder gewisser Symmetrieachsen entstehen kann. Demzufolge gibt es Hemiedrien verschiedener Art, die man in der Kristallographie auch durch geeignete Benennungen voneinander zu unterscheiden pflegt.

XIV.

De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux.

(Archives néerlandaises, 21 [1887], p. 103.)

§ 1. L'aberration de la lumière, qui, selon la théorie de l'émission, résulte directement de la composition de deux mouvements rectilignes, est beaucoup moins facile à expliquer dans la théorie des ondulations. Tandis que le mouvement de particules lumineuses émises par un astre peut être considéré comme indépendant du mouvement de la terre, il n'en est pas de même de la propagation d'ondes lumineuses, si le milieu dans lequel elle s'opère est lui-même entraîné par notre planète. Dans la théorie ondulatoire on est donc conduit à considérer en premier lieu dans quelle mesure l'éther participe au mouvement des corps qui le traversent. L'examen de cette question n'intéresse pas seulement la théorie de la lumière, il a acquis une importance bien plus générale, depuis qu'il est devenu probable que l'éther joue un rôle dans les phénomènes de l'électricité et du magnétisme.

§ 2. Fresnel[1]), comme on sait, a admis que l'éther, près de la terre, ne participe pas au mouvement de celle-ci, de sorte que les vibrations lumineuses émanées d'une étoile se propagent jusqu'à la surface de notre globe, sans être en rien affectées par son mouvement. Soit SA (fig. 16) la direction dans laquelle nous arrive le mouvement lumineux de l'étoile S; perpendiculairement à cette direction plaçons un écran opaque V_1, percé d'une ouverture a_1 b_1. Nous supposerons que cet écran soit entraîné par la terre dans son mouvement, que nous nous réprésenterons dirigé, dans la figure, de gauche à droite; ce mouvement n'affecte point

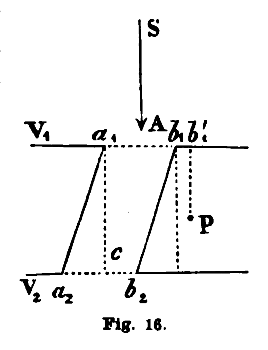


Fig. 16.

[1]) Lettre de Fresnel à Arago, Sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique, Ann. de chim. et de phys 9 (1818), p. 57, Œuvres complètes de Fresnel 2, p. 627.

l'éther environnant. Tous les points de l'ouverture sont atteints au même instant par une vibration provenant de S; ils deviennent alors, d'après le principe de Huygens, de nouveaux centres d'ébranlement pour l'éther situé derrière V_1, et en chaque point de ce milieu le mouvement lumineux est le résultat de l'interférence des mouvements émis par les différents points de l'ouverture.

Dans la théorie de la diffraction on fait voir que, lorsque l'écran est immobile, l'intensité lumineuse n'a une valeur appréciable qu'à l'intérieur du cylindre ayant $a_1\ b_1$ pour base, et dont les génératrices $a_1\ c$ sont parallèles à SA, du moins si, comme je le supposerai, la largeur de l'ouverture est très grande en comparaison de la longueur d'onde.

Lorsque l'écran se meut, les choses se passent un peu autrement. Un point P, en arrière de l'écran, reçoit à l'instant t un mouvement lumineux de tous les points du plan V_1 qui se trouvaient dans l'ouverture mobile au moment où ils devaient émettre une vibration pour qu'elle arrivât en P à l'instant indiqué. Les points de V_1 étant à des distances inégales de P, la partie de ce plan à laquelle P doit son mouvement occupe une étendue qui ne coïncide pas tout à fait avec la largeur de l'ouverture. Considérons le cas où P se trouve à droite du milieu du faisceau transmis par l'ouverture. Si l'écran avait la position représentée par la figure au moment où partait de a_1 le mouvement lumineux qui arrive en P à l'instant t, il est clair qu'au moment postérieur, où une vibration doit partir de l'élément de l'ouverture situé le plus à droite pour atteindre P à ce même instant, l'écran sera légèrement déplacé, de telle manière, par exemple, que le bord b_1 sera parvenu en b'_1. Le point P reçoit par conséquent, au moment t, le même mouvement lumineux que si l'écran était immobile, mais que l'ouverture eût la largeur $a_1\ b'_1$. De ce que je viens de rappeler concernant la diffraction par une ouverture immobile, il suit alors que l'intensité lumineuse en P sera appréciable ou non, suivant que l'angle $a_1\ b'_1\ P$ est aigu ou obtus. P est donc situé à la limite de la lumière et de l'obscurité, lorsque la perpendiculaire abaissée de P sur le plan V_1 passe par le point où le bord droit de l'ouverture se trouvait à un moment qui peut être représenté par $t - \frac{l}{A}$, l désignant la longueur de cette perpendiculaire et A la vitesse de propagation de la lumière. Une condition analogue existe pour l'autre bord du faisceau lumineux.

Soit maintenant V_2 un second écran, pourvu d'une ouverture $a_2\ b_2$ égale à $a_1\ b_1$, et cherchons à placer cet écran de façon que tout le mouvement lumineux transmis par $a_1\ b_1$ soit recueilli en $a_2\ b_2$. Désignons par L la distance des deux écrans. L'ouverture $a_2\ b_2$ doit alors, à l'instant t, occuper une position telle que les perpendiculaires abaissées

de ses bords sur V_1 rencontrent les bords de $a_1\,b_1$ dans la situation qu'ils avaient au moment $t-\frac{L}{A}$. Il suit de là qu'à un même instant les deux ouvertures doivent être placées l'une par rapport à l'autre de la manière indiquée par la fig. 16 et déterminée par l'équation $\operatorname{tg} a_2 a_1 c = \frac{g}{A}$, si g désigne la vitesse avec laquelle l'écran est transporté de gauche à droite.

On est conduit ainsi, dans l'hypothèse de l'éther immobile, à l'explication connue, qui réduit l'aberration à la composition de deux mouvements rectilignes.

Si nous nous représentons la figure entière emportée avec la terre, les ouvertures $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$ conservent toujours la position indiquée dans la fig. 17. Le mouvement lumineux transmis à un certain moment par $a_1\,b_1$ se retrouve alors successivement dans les sections ef, gh, etc. du cylindre oblique $a_1\,b_1\,a_2\,b_2$. Ce cylindre détermine donc le mouvement relatif de la lumière par rapport à la terre; nous pouvons lui appliquer la dénomination de faisceau lumineux relatif, et donner aux droites qui le limitent, telles que $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$, le nom de *rayons relatifs*.

Fig. 17.

§ 3. D'après ce qui vient d'être dit, l'hypothèse de Fresnel rendrait immédiatement compte de l'aberration observée, si l'on déterminait le lieu des corps célestes au moyen de deux écrans opaques à petites ouvertures qui, étant parallèles à la direction dans laquelle ils se déplacent, ne communiqueraient aucunement leur mouvement à l'éther. Mais nous faisons usage de lunettes, c'est-à-dire d'instruments qui sont fermés de tous côtés, et c'est là ce qui rend nécessaires de nouvelles considérations.

Il est facile de montrer, en effet, que si la lunette en son entier, avec toute la matière qu'elle contient, soit dans son tube soit dans le verre de ses lentilles, participe au mouvement de la terre, une aberration telle que nous l'observons ne saurait exister, même si l'hypothèse de Fresnel pouvait être admise pour l'éther extérieur à l'instrument. Pour le faire voir, je suppose (fig. 18) que l'objectif O de la lunette soit limité du côté antérieur par une face plane. Si à l'intérieur de la lunette tout est en repos relatif, le mouvement lumineux y sera entièrement déterminé dès qu'on connaîtra les ébranlements que cette face antérieure reçoit; si tous ses points sont constamment frappés par des vibrations de même phase, le mouvement lumineux sera concentré au foyer principal F de l'objectif.

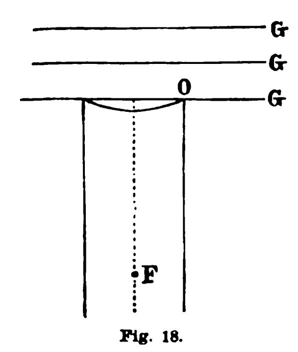


Fig. 18.

Supposons maintenant que l'axe de la lunette soit dirigé sur le lieu réel d'une étoile et que l'instrument se déplace avec la terre dans une direction perpendiculaire à cet axe. Les ondes lumineuses G de l'étoile sont alors parallèles à la face antérieure de O, de sorte que la phase sera effectivement la même pour tous les points de cette face; la circonstance que la face glisse le long des ondes ne change rien à cette égalité de phase. L'image de l'étoile devrait donc se former en F, tout comme si la lunette était immobile. Or, de fait, elle se forme à une certaine distance à côté de F.

On est donc bien forcé, même pour ce cas très simple, de renoncer à l'idée que *tout* ce qui est contenu dans la lunette participe au mouvement de la terre. L'hypothèse requise pour expliquer dans ce cas l'aberration observée a déjà été établie par Fresnel. Elle revient à admettre que l'éther libre, interposé entre les molécules d'un corps, par exemple du verre dont est formé l'objectif, ne partage pas le mouvement que la matière pondérable possède en commun avec la terre, et qu'en conséquence, lorsque des ondes lumineuses se propagent dans une matière pondérable, leur vitesse de propagation par rapport à cette dernière ne devra être composée qu'avec une partie de la vitesse dont sont animées les molécules pondérables. La fraction qui représente cette partie, le *coefficient d'entraînement* de Fresnel, est $1 - \frac{1}{n^2}$, n désignant l'indice de réfraction absolu du milieu quand il se trouve en repos.

En réalité, ce n'est que cette dernière supposition, concernant la mesure dans laquelle les ondes lumineuses prennent part au mouvement de la matière pondérable, qui est nécessaire pour expliquer l'aberration qu'on observe avec une lunette, et ce n'est que pour servir de fondement à cette supposition que l'hypothèse sur la manière dont se comporte l'éther libre interposé entre les molécules pondérables a été introduite par Fresnel. En tout cas, pour que les ondes lumineuses ne partagent pas en entier le mouvement de la matière pondérable, il est certain qu'il doit exister, dans un corps transparent, quelque chose qui ne possède pas ce mouvement, ou qui ne le possède qu'en partie. D'ailleurs, la parfaite perméabilité des corps pour l'éther est déjà implicitement comprise dans l'hypothèse fondamentale de toute la théorie de Fresnel; ce n'est qu'en admettant cette perméabilité pour la terre entière, qu'on peut se représenter l'éther en repos jusqu'au voisinage immédiat de la terre.

Fresnel ne laissa pas d'indiquer quelques conséquences de sa théorie. En premier lieu, il donna l'explication de l'expérience par laquelle Arago avait montré que, lorsque la lumière d'une étoile traverse un prisme, les rayons relatifs (§ 2) sont déviés suivant les lois ordinaires

de la réfraction, de sorte que tout se passe comme si la terre était immobile et comme si ces rayons relatifs étaient des rayons absolus. En second lieu, Fresnel remarqua que, si le coefficient d'entraînement a la valeur $1 - \frac{1}{n^2}$, l'aberration observée n'éprouve pas de modification lorsque le tube de la lunette est rempli d'un liquide (expérience de Boscovich).

Après Fresnel, divers savants ont examiné les conséquences auxquelles conduisent ses hypothèses et les ont comparées avec les résultats de quelques expériences. Je ne citerai que Stokes[1]), Hoek[2]), Veltmann[3]) et Ketteler[4]).

§ 4. Bien que Stokes ait contribué à développer la théorie de Fresnel, l'hypothèse fondamentale de ce dernier lui parut si peu admissible, qu'il rechercha si l'aberration ne pourrait pas être expliquée tout aussi bien en supposant que l'éther, au voisinage de la terre, est entraîné par celle-ci. Dans son premier mémoire[5]) sur le phénomène, il conclut qu'on peut, en effet, donner une pareille explication, à la seule condition d'admettre que le mouvement de l'éther est tel qu'il y ait un potentiel de vitesse.

Stokes fait d'abord remarquer que le mouvement de l'éther doit influer sur la direction des ondes lumineuses émises par un corps céleste. Soit, en effet, PQ (fig. 19) une de ces ondes, à un moment t où le mouvement lumineux a déjà pénétré dans l'espace où l'éther est entraîné par la terre. Le principe de Huygens fait connaître la position de cette onde après l'élément de temps dt. Si les vibrations lumineuses constituaient le seul mouvement qui existe dans l'éther, il se serait formé durant le temps dt, autour d'un des points P de PQ, une onde élémentaire sphérique, ayant P pour centre et $A\,dt$ pour

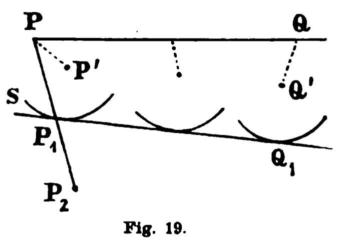


Fig. 19.

[1]) G. G. Stokes, On the aberration of light, Phil. Mag. (3) 28 (1846), p. 76; Mathematical and physical papers, Cambridge (1883) 1, p. 141.

[2]) M. Hoek, De l'influence des mouvements de la terre sur les phénomènes fondamentaux de l'optique dont se sert l'astronomie, Recherches astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht 1 (1861), p. 1; Astr. Nachr. 54 (1860), p. 145.

[3]) W. Veltmann, Über die Fortpflanzung des Lichts in bewegten Medien, Ann. d. Phys. u. Chem. 150 (1873), p. 497.

[4]) E. Ketteler, Über den Einfluß der astronomischen Bewegungen auf die optischen Erscheinungen, Ann. d. Phys. u. Chem. 144 (1872), pp. 109, 287, 363, 550; 146 (1872), p. 406; 147 (1872), p. 404; Astronomische Undulationstheorie, Bonn, 1873.

[5]) Stokes, On the aberration of light, Phil. Mag. (3) 27 (1845), p. 9; Mathematical and physical papers 1, p. 134.

rayon, A étant de nouveau la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans l'éther immobile. Mais nous venons de supposer que l'éther se meut avec la terre. De quelque manière que ce mouvement varie d'un point à un autre, la vitesse pourra être regardée comme ayant partout la même valeur et la même direction dans l'espace infiniment petit dans lequel se propagent durant le temps dt les vibrations parties de P. Nous devons nous figurer que, en même temps que l'ébranlement s'étend autour de P suivant une sphère, cette sphère entière se déplace avec l'éther dans lequel elle se développe. L'onde élémentaire devient donc (si nous supposons la figure elle-même immobile dans l'espace) la sphère S, décrite avec le rayon $A\,dt$ autour de P' comme centre, PP' étant le chemin parcouru, dans le temps dt, par l'éther qui d'abord se trouvait en P.

Construisons de la même manière les ondes élémentaires correspondant aux autres points Q, etc. de l'onde PQ; la surface enveloppe $P_1\,Q_1$ de toutes ces sphères nous donnera la position de l'onde après le temps dt.

Cette surface sera généralement courbe, même si l'onde PQ était encore plane; mais pour les parties des ondes qui peuvent entrer dans nos instruments nous pourrons négliger cette courbure. Quant à la direction de $P_1\,Q_1$, elle serait la même que celle de PQ, si sur toute l'étendue de l'onde la vitesse de l'éther avait la même grandeur et la même direction, et si par conséquent PP' et QQ' étaient égaux et parallèles. Dès que cela n'est pas le cas, l'onde a changé de direction et, en se propageant plus loin, elle subira, pendant chaque élément de temps, une nouvelle rotation semblable. Elle atteint donc la surface de la terre avec une autre direction qu'elle ne possédait lorsqu'elle se mouvait encore dans l'éther immobile, en dehors de l'influence de la terre. Si maintenant, près de la surface terrestre, l'éther a le même mouvement que celle-ci, et si par conséquent tout est en repos relatif dans l'espace où sont installés nos instruments d'observation, nous attribuerons à la lumière la direction perpendiculaire aux ondes telles qu'elles arrivent dans cet espace, et cette direction différera de celle où l'étoile se trouve en réalité.

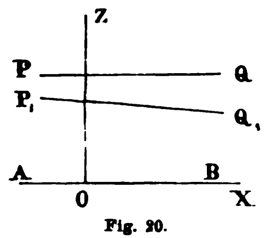


Fig. 20.

§ 5. Pour que cette déviation soit précisément l'aberration qu'on observe, il est nécessaire de supposer que dans le mouvement de l'éther les composantes de la vitesse, u, v, w, puissent être regardées comme les dérivées partielles, par rapport aux coordonnées x, y, z, d'une même fonction. Pour le faire voir, considérons une partie AB (fig. 20) de la surface terrestre, assez petite pour qu'elle puisse être regardée comme

plane; supposons que la vitesse de ta terre soit dirigée parallèlement à cette surface, et prenons l'axe des x dans cette direction. Nous devrons alors admettre, d'après les idées de **Stokes**, que l'éther possède, près de AB, une vitesse égale en grandeur et en direction. L'aberration observée dépend de cette vitesse, ou, ce qui revient au même, de la différence entre les valeurs de u à la surface terrestre et à quelque distance de cette surface, différence qui est déterminée par les valeurs du coefficient différentiel $\frac{\partial u}{\partial z}$, si l'axe des z est choisi comme le montre la figure. La rotation que l'onde PQ subit d'après les raisonnements de **Stokes**, et par laquelle elle prend par exemple la position $P_1 Q_1$, est due, au contraire, à l'inégalité des vitesses normales à l'onde qui existent dans les différents points de cette dernière. Lorsque les ondes sont d'abord exactement perpendiculaires à l'axe des z, et qu'ensuite, après avoir subi une légère rotation, elles le sont encore à peu près, cette rotation dépend des valeurs de $\frac{\partial w}{\partial x}$, et le raisonnement de **Stokes** ne conduira à l'aberration observée que s'il y a quelque relation entre les dérivées $\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial w}{\partial x}$. Or, tel est le cas quand il existe un potentiel de vitesse: les deux expressions sont alors égales l'une à l'autre.

Par un calcul simple, **Stokes** démontre que, si $u dx + v dy + w dz$ est une différentielle exacte, la rotation des ondes considérée au § 4 donne lieu dans tous les cas à une aberration telle qu'on l'observe.

§ 6. Cela exige toutefois que, près de la surface terrestre, l'éther ait exactement la même vitesse que la terre. Et voilà que s'élève une difficulté, car cette condition est incompatible avec l'existence d'un potentiel de vitesse.

L'hydrodynamique nous apprend, en effet, que le mouvement d'un fluide incompressible qui s'étend, autour d'une surface fermée, jusqu'à l'infini, est entièrement déterminé, dès qu'on sait qu'il y a un potentiel de vitesse et lorsqu'en outre en chaque point de cette surface la vitesse dans la direction de la normale est donnée, la vitesse devant d'ailleurs être nulle à une distance infinie. Nous pouvons appliquer cette proposition au mouvement de l'éther qui environne la terre, même sans lui attribuer aucune des propriétés des fluides ordinaires, car la proposition est indépendante de ces dernières; nous admettons seulement l'incompressibilité de l'éther, mais c'est ce qu'on fait dans toutes les théories optiques.

En posant donc la condition qu'il existe un potentiel de vitesse et qu'en chaque point de la surface terrestre la composante normale de la vitesse soit la même pour l'éther et pour la terre, nous avons déjà complètement défini le mouvement du premier. Mais alors, en direction tangentielle, sa vitesse différera de celle de la terre.

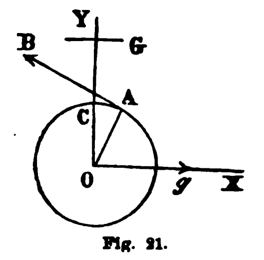


Fig. 21.

Considérons cette dernière comme une sphère de rayon R (fig. 21), supposons qu'elle se meuve avec la vitesse g suivant l'axe des x, prenons le centre pour origine des coordonnées, et désignons par r la distance au centre d'un point extérieur; les vitesses en ce point seront alors, d'après les conditions précédentes,

$$u = \frac{1}{2} R^3 g \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}, \; v = \frac{1}{2} R^3 g \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial y}, \; w = \frac{1}{2} R^3 g \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \, \partial z}.$$

Cet état de mouvement est évidemment symétrique autour de l'axe des x; en se bornant à considérer ce qui a lieu dans le plan xy, on a $w = 0$, et, si θ est l'angle que r fait avec OX,

$$u = \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} g (3 \cos^2 \theta - 1), \; v = \frac{3}{2} \frac{R^3}{r^3} g \sin\theta \cos\theta,$$

par conséquent, à la surface de la terre,

$$u = \frac{1}{2} g (3 \cos^2 \theta - 1), \; v = \frac{3}{2} g \sin\theta \cos\theta.$$

De là on déduit facilement qu'en un point A l'éther aurait, par rapport à la terre, une vitesse relative

$$\frac{3}{2} g \sin\theta$$

dans la direction AB.

Je laisserai de côté la question de savoir si le mouvement dont il s'agit sera stable[1]); ce qui est sûr, c'est que, si l'éther se meut de façon qu'il existe un potentiel de vitesse, il devra s'y produire des courants parallèles à la surface terrestre, les courants les plus forts se trouvant aux points du grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la vitesse de la terre. Il est vrai que si dans toutes les observations l'objectif de la lunette était protégé contre ces courants par des parois imperméables, l'explication de Stokes pourrait encore être admise. Mais ce n'est pas dans de telles conditions que les observations astronomiques sont faites.

Sans doute on peut imaginer des états de mouvement de l'éther dans lesquels l'accord voulu des vitesses à la surface terrestre est complètement réalisé. Tel est, par exemple, le mouvement représenté par les équations

---

[1]) Voir Stokes, On the aberration of light, Phil. Mag. (3) 29 (1846), p. 6 (Papers 1, p. 153); On the constitution of the luminiferous aether, Phil. Mag. (3) 32 (1848), p. 343 (Papers 2, p. 8).

$$u = \frac{3}{4} Rg \frac{x^2 + r^2}{r^3} - \frac{1}{4} R^3 g \frac{3x^2 - r^2}{r^5},$$

$$v = \frac{3}{4} Rgxy \frac{r^2 - R^2}{r^5}, \quad w = \frac{3}{4} Rgxz \frac{r^2 - R^2}{r^5}.$$

Les vitesses prendraient ces valeurs si l'éther était un fluide à frottement intérieur (quelque petit que fût d'ailleurs le coefficient de frottement), et qu'il ne pût glisser sur la surface de la terre.

Pour faire voir qu'avec ce mouvement de l'éther la non-existence d'un potentiel de vitesse ferait complètement échouer l'explication de de l'aberration, nous n'avons qu'à considérer une onde plane G (fig. 21), d'abord perpendiculaire à l'axe des y et se propageant vers la terre le long de cet axe. D'après la théorie de Stokes, l'aberration serait alors proportionnelle à l'intégrale

$$\int_R^\infty \frac{\partial v}{\partial x} dy,$$

prise le long de l'axe des y; l'aberration observée est, au contraire, proportionnelle à

$$\int_R^\infty \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Or, pour la première intégrale on trouve $+ \frac{1}{2} g$, tandis que la seconde a la valeur $- g$.

Stokes a encore cherché à concilier l'existence d'un potentiel de vitesse avec le repos relatif de la terre et de l'éther ambiant, en attribuant à l'atmosphère une influence sur le mouvement de l'éther.

Après avoir exposé les raisons qui pourraient faire admettre que dans le mouvement de l'éther il existe un potentiel de vitesse, il continue comme il suit[1]):

„Il ressort donc de ces vues sur la constitution de l'éther, que

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

doit être une différentielle exacte, à moins que cela ne soit empêché par l'action de l'air sur l'éther. L'action mutuelle de l'éther et de particules matérielles nous est trop inconnue, pour que nous puissions tirer, en cette matière, quelque conclusion bien probable; je me bornerai à risquer la conjecture suivante. Concevons qu'une portion de l'éther soit remplie d'un grand nombre de corps solides, placés à intervalles, et supposons que ces corps se meuvent avec une vitesse très petite en comparaison de celle de la lumière; le mouvement de l'éther entre ces corps sera encore tel que (a) soit une différentielle exacte. Mais si

[1]) Phil. Mag. (3) 29 (1846), p. 8 (Papers I, p. 155).

ces corps sont suffisamment nombreux et rapprochés, ils devront imprimer à l'éther interposé entre eux soit leur propre vitesse tout entière, soit une partie considérable de cette vitesse. Or les molécules de l'air peuvent jouer le rôle de ces corps solides. Il peut donc arriver que (*a*) soit une différentielle exacte et que néanmoins l'éther, près de la surface terrestre, soit en repos relativement à la terre. La seconde de ces conditions n'est toutefois pas nécessaire pour l'explication de l'aberration."

Pour le moment cette dernière assertion peut être laissée de côté, car dans la théorie de Stokes, sous la forme que nous avons examinée jusqu'ici, la condition dont il s'agit est bien dûment nécessaire. Et, quant à la difficulté qui nous occupe, je ne crois pas qu'elle puisse être levée par les considérations qu'on vient de lire. Assurément, si une partie d'une onde, assez petite pour pouvoir passer entre les molécules d'air sans en rencontrer une seule, pouvait se propager sans que la diffraction lui fît perdre entièrement son caractère, la direction de cette partie subirait, lorsque l'onde pénètre de l'espace céleste dans l'atmosphère, la rotation nécessaire pour expliquer l'aberration. Mais des ondes lumineuses, capables de se propager comme telles, doivent avoir une largeur bien des fois supérieure à la distance mutuelle des molécules de l'air. Or, si l'on veut appliquer à de pareilles ondes les raisonnements de Stokes, il faut entendre par u, v, w les valeurs moyennes que les composantes de la vitesse présentent dans un élément de volume qui contient un grand nombre de molécules. Ces vitesses moyennes sont de nouveau, en général, des fonctions de x, y, z, mais pour ces fonctions il n'est pas nécessaire qu'il y ait un potentiel de vitesse, même lorsque tel est le cas pour les vitesses réelles de l'éther. Quand même la relation $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ existe pour ces dernières vitesses, alors que dans ces coefficients différentiels dx et dy sont infiniment petits par rapport à la distance des molécules, cette relation peut ne pas se vérifier lorsque u et v sont des vitesses moyennes et que par dx et dy on entend simplement des distances très petites, mais égales à des multiples élevés de la distance moléculaire.

Si, pour prendre un cas simple, nous remplaçons la terre par une surface plane, au-dessus de laquelle s'étend une atmosphère, si nous admettons que cette surface plane se meut avec l'atmosphère suivant une direction située dans le plan et parallèle à laquelle nous choisissons l'axe des x, et si enfin nous prenons l'axe des z perpendiculaire au plan, les vitesses moyennes en question seront $u = f(z)$, $v = w = 0$, de sorte qu'il n'y aura pas pour elles un potentiel de vitesse. Avec ces vitesses moyennes on ne peut pas expliquer l'aberration, et effectivement, lorsqu'une large onde normale à l'axe des z se propage le long de cet axe, les

points du plan $x\,y$ recevront des vibrations de même phase, tous les éléments de l'onde pouvant se transmettre de la même manière à travers l'atmosphère.

§ 7. Après avoir exposé la théorie que nous venons de résumer, Stokes nous fait connaître une autre manière de voir.[1] Lorsque (fig. 19) l'onde $P\,Q$ s'est propagée, comme il a été dit, jusqu'en $P_1\,Q_1$, on peut appeler $P\,P_1$ un élément du *rayon lumineux*, et un nouvel élément $P_1\,P_2$ de ce rayon sera trouvé de la même façon, en considérant comment, pendant un second élément de temps, le mouvement vibratoire se propage à partir de $P_1\,Q_1$. Or, Stokes démontre que, dès qu'il existe un potentiel de vitesse, l'enchaînement des éléments PP_1, $P_1\,P_2$, etc. forme une ligne droite. „Et“, dit-il ensuite, „la propagation rectiligne d'un rayon de lumière, qui à priori semblerait très susceptible d'être altérée par le mouvement communiqué à l'éther par la terre et les corps célestes qui le traversent, est tacitement supposée dans l'explication de l'aberration telle que la donnent les traités d'astronomie; une fois cette supposition justifiée, tout le reste suit comme d'ordinaire.“ Stokes est évidemment d'avis que l'aberration se trouve expliquée de cette manière, même si l'éther, près de ta terre, est en mouvement par rapport à celle-ci. C'est là, paraît-il, ce qu'il a en vue, dans la dernière des phrases citées au paragraphe précédent.

Je pense toutefois que la théorie modifiée de Stokes, c'est à dire la théorie qui n'exclut pas un mouvement relatif de la terre et de l'éther ambiant, ne parvient pas à expliquer l'aberration avec la seule donnée que les rayons lumineux se propagent en ligne droite. En effet, après l'avoir obtenue, on se trouve au même point où la théorie de Fresnel nous place dès le début. Si le lieu des astres était déterminé au moyen de deux écrans à petites ouvertures qui se déplacent par rapport à l'éther dans une direction parallèle à leurs plans (§ 2), la théorie ne laisserait plus rien à désirer. Mais elle est insuffisante dès que nous faisons usage d'une lunette fermée de toutes parts. Si l'on admet qu'à l'intérieur de cet instrument tout est en repos relatif, la théorie de Stokes, tout aussi bien que celle de Fresnel, est incapable de rendre compte du phénomène.

Soit, en un point de la surface terrestre, $a\,b$ (fig. 22) la direction du mouvement relatif de l'éther par rapport à la terre. Nous pouvons alors nous figurer une étoile située dans une direction telle, que les ondes lumineuses qu'elle nous envoie, après avoir subi la rotation mentionnée au § 4, atteignent

Fig. 22.

[1]) Phil. Mag. (3) 29 (1846), p. 8 (Papers 1, p. 188).

la terre avec une direction G parallèle à ab. Prenons maintenant la lunette dont il fut question dans le § 3, et plaçons-la de manière que son axe soit perpendiculaire à G. Les divers points de la face antérieure de l'objectif seront alors constamment frappés par des vibrations de même phase, et, si dans la lunette tout est en repos relatif, le mouvement lumineux devra se concentrer au foyer principal F, quelle que soit la direction du *rayon lumineux* en dehors de l'instrument. Par la lunette on verra donc l'étoile dans une direction perpendiculaire à G, et l'aberration qu'on observe dépendra de la rotation par laquelle les ondes ont acquis la direction G. Par conséquent, elle ne serait identique à l'aberration réellement existante que si, près de la terre, l'éther ne se mouvait pas par rapport à celle-ci.

Une hypothèse accessoire doit donc de nouveau être faite, et comme le cas offre beaucoup d'analogie avec celui dont il a été parlé plus haut (§ 3), à l'ocasion de la théorie de Fresnel, il était tout naturel d'essayer si l'on ne pourrait résoudre la difficulté en introduisant dans la théorie modifiée de Stokes l'hypothèse de Fresnel sur l'entraînement des ondes lumineuses par la matière pondérable.

§ 8. Je reconnus que cela est effectivement possible, et c'est ainsi que je fus conduit à établir une théorie qui peut être regardée comme issue de la théorie modifiée de Stokes, et qui comprend en même temps celle de Fresnel comme un cas particulier. Il peut y avoir quelque utilité, me semble-t-il, à faire connaître cette théorie plus générale.

Je suppose donc que l'éther qui entoure la terre est animé d'un mouvement, dont je ne rechercherai pas les particularités, mais auquel j'attribuerai un potentiel de vitesse. A la surface de la terre, ce mouvement peut être différent de celui de la matière pondérable. J'admettrai de plus que l'éther contenu dans un corps transparent participe au mouvement de l'éther extérieur, de sorte qu'au dehors et au dedans d'un tel corps les composantes de la vitesse de l'éther peuvent être représentées par des fonctions continues et qu'il en est de même du potentiel de vitesse. Quant aux corps opaques, nous n'introduirons aucune hypothèse; nous pouvons admettre que l'éther s'y comporte comme dans les matières transparentes, mais nous pouvons aussi le supposer en repos par rapport aux molécules du corps opaque. La chose se laisse encore exprimer de la manière suivante. Concevons, d'abord, que tous les corps transparents aient été enlevés de nos appareils d'observation et de l'espace dans lequel ils sont placés. Quel que soit le rôle qu'on veuille attribuer aux corps opaques, qu'ils soient perméables ou non pour l'éther, on pourra alors se représenter dans ce dernier un mouvement, où il y a un potentiel de vitesse dans tout l'espace en dehors des corps opaques. Si, par exemple, la paroi d'un tube de lunette est imperméable, nous

admettrons qu'à l'extérieur du tube, et à l'intérieur près de l'orifice, l'éther possède le même mouvement que prendrait un fluide incompressible, sans frottement, dans lequel le tube se déplacerait. Lorsque ensuite les corps transparents sont remis à leur place, nous supposerons qu'il n'en résulte aucun changement dans le mouvement de l'éther, c'est-à-dire que l'éther intermoléculaire se meut dans ces corps de la même manière que le faisait d'abord l'éther libre qui occupait la même place.

Enfin, je ferai une hypothèse sur la propagation de la lumière dans un corps transparent à travers lequel l'éther se déplace. La vitesse relative que possède par rapport à ce dernier la matière pondérable, variera en général d'un point à un autre, mais peut être regardée comme constante dans un espace infiniment petit. Je supposerai que la fig. 23 soit renfermée dans un tel espace et j'admettrai qu'elle est en repos par rapport à l'éther, de sorte que la matière pondérable se déplace à travers la figure. Soient ab la direction de ce déplacement, r sa vitesse, A la vitesse avec laquelle la lumière se propagerait si la matière pondérable et l'éther étaient en repos relatif. Dans ce dernier cas, le mouvement lumineux partant d'un centre de vibration s'étendrait, durant le temps dt, dans toutes les directions jusqu'à la distance Adt. Je suppose maintenant que, dans le cas actuellement considéré, l'onde élémentaire sphérique de rayon Adt, qui se forme autour de P, soit entraînée avec une vitesse kr, égale à une fraction déterminée de la vitesse r de la matière pondérable, de sorte que, si la droite PP' est menée parallèlement à ab et prise égale à $krdt$, c'est autour de P' comme centre qu'on devra construire une sphère avec le rayon Adt. Il convient de remarquer que l'éther et la matière pondérable pourront prendre part, l'un et l'autre, au mouvement lumineux; l'hypothèse revient à ceci que, si à l'instant t un ébranlement existe dans l'éther et la matière pondérable qui sont alors au point P de la figure, ce même ébranlement se trouve, au moment $t+dt$, dans l'éther et la matière pondérable qui occupent alors les points de la surface sphérique.

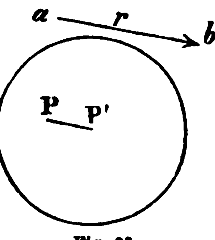


Fig. 23.

Cette hypothèse, d'ailleurs, n'est autre que celle de Fresnel; celui-ci, il est vrai, admettait que l'éther est immobile et que la matière pondérable seule se déplace, mais on peut communiquer au système entier une vitesse quelconque sans rien changer au mouvement relatif des ondes lumineuses par rapport à l'éther.

Pour le coefficient d'entraînement k je prendrai la valeur admise par Fresnel, savoir

$$k = 1 - \frac{1}{n^2},$$

n étant l'indice de réfraction absolu du milieu considéré, dans l'état de repos.

Je démontrerai maintenant que les hypothèses introduites permettent d'expliquer l'aberration et quelques autres phénomènes qui s'y rattachent. La théorie de Fresnel rentrera dans celle que je vais exposer, car le repos est un cas particulier d'un mouvement avec un potentiel de vitesse; on n'a qu'à prendre ce dernier $= 0$, ou constant. Les raisonnements suivants s'appliquent également au cas où, en un point de la surface terrestre, l'éther possède la même vitesse que la terre. Dès que cette circonstance se présente, ce qui peut arriver dans une partie restreinte de la surface du globe, on peut accepter la théorie primitive de Stokes, mais elle sera encore comprise dans celle que je ferai connaître. Seulement, dans le cas du repos relatif de l'éther et de la matière pondérable, on pourrait se passer de l'hypothèse sur l'entraînement des ondes lumineuses.

§ 9. Dans l'application des hypothèses que je viens d'indiquer, les vitesses de l'éther et de la matière pondérable seront regardées, au moins dans les premiers paragraphes, comme assez petites par rapport à la vitesse A de la lumière pour que nous n'ayons à en conserver que les premières puissances. Ces vitesses, en effet, se présenteront toujours divisées par A, ou bien les termes qui les contiennent se trouveront à côté d'autres grandeurs où entre le facteur A. Or, la vitesse de la matière pondérable sera celle de la terre, et la vitesse de l'éther sera du même ordre de grandeur; la vitesse avec laquelle la terre accomplit sa révolution autour du soleil étant environ 10000 fois plus petite que la vitesse de la lumière, les termes que nous négligerons ne pourront avoir aucune influence appréciable sur la plupart des phénomènes. Au § 26, toutefois, nous devrons conserver les termes du second ordre.

Pendant que la lumière traverse l'espace où l'éther est entraîné par notre planète, le mouvement de cette dernière autour du soleil ne change pas sensiblement de direction ni de vitesse; c'est pourquoi nous remplacerons toujours ce mouvement par une translation uniforme, dirigée suivant la tangente à l'orbite.

Quant à la rotation de la terre autour de son axe, j'en ferai complètement abstraction; un point de l'équateur possède, en vertu de ce mouvement, une vitesse 650.000 fois plus petite que celle avec laquelle se propage la lumière.

On peut simplifier de beaucoup les raisonnements, si l'on considère toujours les mouvements relatifs par rapport à la terre.[1]) Toute la matière pondérable est alors, dans les cas que nous traiterons, en repos relatif;

---

[1]) C'est surtout Veltmann (l. c.) qui le fit remarquer.

l'éther, au contraire, se déplace: suivant l'hypothèse de Fresnel, avec une vitesse égale et opposée à celle de la terre, suivant la nôtre, d'une manière plus compliquée. Ayant admis l'existence d'un potentiel de vitesse pour le mouvement absolu, nous devons admettre la même chose pour le mouvement relatif, car ce dernier s'obtient par la composition du mouvement absolu avec une translation qui possède elle-même un potentiel de vitesse.

Conformément à ce qui a été dit, nous supposerons que les figures prennent part au mouvement de la terre, et nous emploierons des axes de coordonnées qui y participent également. Nous désignerons par φ le potentiel de vitesse pour le mouvement relatif de l'éther, par u, v, w les composantes de sa vitesse, de sorte qu'on a

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

La vitesse elle-même sera représentée par ϱ; elle a la même grandeur que r dans la fig. 23, mais une direction opposée.

Il est clair que le mouvement de l'éther sera constamment le même en un point déterminé de nos figures. Par conséquent, φ, u, v, w, ϱ sont des fonctions de x, y, z, mais non de t.

Quand on adopte l'hypothèse de Fresnel, φ devient une fonction linéaire de x, y, z.

§ 10. La fig. 23, qui se trouvait en repos relativement à un élément de volume de l'éther, doit subir une modification, maintenant que la figure se déplace avec la terre. Si nous conservons la même position pour le point P, qui a rapport à l'instant t, la partie de la figure qui correspond au moment $t + dt$ doit être déplacée de la quantité $\varrho\, dt$ dans la direction de la vitesse ϱ. On obtient ainsi la fig. 24. Tandis que dans la fig. 23 le centre de la sphère s'est avancé, à partir de P, dans la direction de r, sur une distance $k r dt$, il s'est déplacé, dans la fig. 24, dans la direction de ϱ, sur la distance $(1 - k)\varrho\, dt = \varkappa \varrho\, dt$, où l'on a

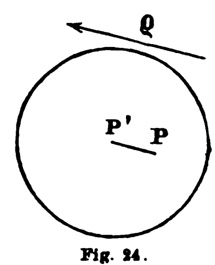


Fig. 24.

$$\varkappa = \frac{1}{n^2}.$$

A cette grandeur, aussi bien qu'à celle que nous avons désignée par k, il convient de donner le nom de „coefficient d'entraînement". En considérant les mouvements relatifs par rapport à l'éther, on peut parler de l'entraînement des ondes lumineuses par la matière pondérable, mais si l'on envisage les mouvements relatifs par rapport à cette matière, il est également permis de dire que les ondes sont entraînées par l'éther.

En l'absence de matière pondérable, dans l'espace céleste, les ondes lumineuses partagent complètement les mouvements de l'éther; c'est ce qui sera exprimé par les valeurs $k = 0$, $\varkappa = 1$.

§ 11. Le mouvement lumineux, émané d'un astre que nous supposerons en repos, pourra être décrit le plus simplement à l'aide d'un système de coordonnées à axes également immobiles; veut-on ensuite rechercher ce que devient ce mouvement dans le voisinage de la terre, et employer à cet effet la méthode du § 9, il est nécessaire de passer à des axes de coordonnées qui sont liés à la terre d'une manière invariable.

Soient x', y', z' les coordonnées relatives aux axes fixes, x, y, z celles qui ont rapport aux axes mobiles, et supposons ces axes choisis de telle sorte que, la terre se déplaçant avec la vitesse g, on ait

$$x' = x + gt,\ y' = y,\ z' = z.$$

Dans le voisinage de la terre, mais à une distance encore assez grande pour que l'éther y soit en repos, le mouvement lumineux émis par une étoile sera représenté par l'équation

$$\omega = a \cos 2\pi N \left[t - \frac{x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma}{A} + \delta\right], \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

où ω est une grandeur qui mesure le dérangement d'équilibre, N le nombre des vibrations par unité de temps, tandis que α, β, γ sont les angles que la direction de propagation fait avec les axes positifs. Ce mouvement lumineux pourra être représenté aussi par l'équation

$$\omega = a \cos 2\pi N' \left[t - \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{A'} + \delta\right], \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

si l'on pose

$$N\left(1 - \frac{g\cos\alpha}{A}\right) = N' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

et

$$A - g\cos\alpha = A' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

En un point dont les coordonnées x, y, z ont des valeurs déterminées, et qui par conséquent se déplace avec la terre, l'ébranlement parcourra toutes les phases, non N fois par seconde, mais N' fois. C'est précisément cette modification du nombre des vibrations qui peut être déduite du principe de Doppler.

La grandeur A' est la vitesse relative des ondes lumineuses par rapport à la terre.

A partir d'ici nous appliquerons la méthode indiquée au § 9. Dans l'étude de la propagation des ondes, l'équation (2) pourrait servir de point de départ; nous pourrions en déduire les expressions qui représentent les vibrations dans le voisinage de la terre, là où l'éther est en mouvement. Ces expressions contiendraient toujours x, y, z et elles

seraient des fonctions périodiques de t, avec la période $\frac{1}{N'}$. Mais c'est surtout de la direction des ondes dans le mouvement donné par l'équation (2) que nous ferons usage dans les paragraphes suivants; la normale des ondes coïncide avec la direction déterminée par α, β, γ, opposée à celle dans laquelle l'étoile se trouve réellement par rapport à la terre.

§ 12. Le principe de **Huygens** peut nous servir, de la même manière qu'au § 4, à rechercher comment, à partir d'une pareille onde plane, ou en tout autre cas, les vibrations se propagent dans un espace pour lequel on admet les hypothèses du § 8. Nous supposerons cet espace occupé par une matière pondérable homogène, de sorte que le coefficient d'entraînement $\varkappa$ aura partout la même valeur; s'agit-il du mouvement dans l'espace céleste ou dans l'air, si l'on veut négliger la réfraction atmosphérique, il suffira de poser $\varkappa = 1$.

Considérons, en premier lieu, l'extension d'un mouvement lumineux à partir d'un centre A (fig. 25), soit que la matière pondérable qui se trouve en A émette elle-même la lumière, soit qu'en ce point l'éther et, s'il y en a, la matière pondérable reçoivent les vibrations d'une source quelconque. Un ébranlement parti de A se sera étendu, après un temps infiniment petit, jusqu'à la surface d'une onde élémentaire s_1, telle que celle dont nous avons parlé au § 10. Des points p, q, etc. de cette onde procèdent, durant l'élément de temps suivant, de nouvelles ondes élémentaires, et l'enveloppe s_2 de celles-ci est la nouvelle position de l'onde. En continuant ainsi, on trouve toutes les positions successives d'une onde qui s'étend autour de A; soient S et S' deux quelconques de ces positions, situées à une distance infiniment petite l'une de l'autre.

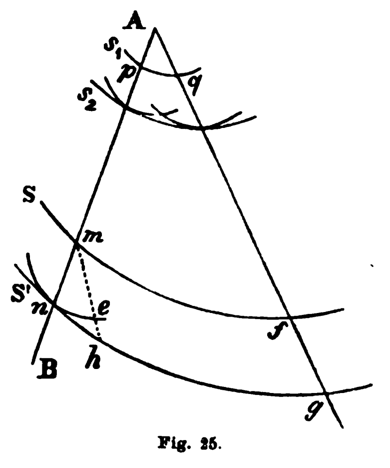


Fig. 25.

Pour déterminer le temps dans lequel le mouvement atteint un point B, arbitrairement choisi, je considérerai encore une fois (fig. 26), l'onde élémentaire déjà représentée dans la fig. 24 et qui se forme autour de P durant le temps dt. En un point quelconque Q de cette onde, l'ébranlement arrive comme s'il s'était propagé suivant la ligne droite PQ avec la vitesse

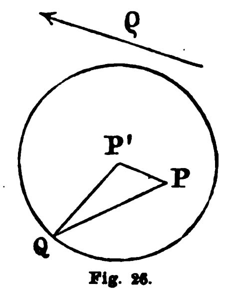


Fig. 26.

$$B = \frac{PQ}{dt}.$$

En désignant par θ l'angle que PQ fait avec la direction de la vitesse ϱ, c'est-à-dire avec PP', nous avons

$$P'Q^2 = PQ^2 - 2\,PQ \times PP' \cos\theta + PP'^2,$$

ou, après division par dt^2

$$A^2 = B^2 - 2\,B\varkappa\varrho\cos\theta + \varkappa^2\varrho^2,$$

par conséquent, si nous nous bornons à la première puissance de ϱ,

$$B = A + \varkappa\varrho\cos\theta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

et, si nous voulons conserver les termes qui contiennent ϱ^2,

$$B = A + \varkappa\varrho\cos\theta - \frac{\varkappa^2\varrho^2}{2A}\sin^2\theta \ldots\ldots\ldots (6)$$

Dans les premiers paragraphes suivants il ne sera fait usage que de l'expression (5). La vitesse qu'elle représente dépend de la direction de PQ; d'ailleurs sa valeur est différente pour des éléments de même direction, mais qui sont tracés à partir de points différents de l'espace, du moins si en ces points ϱ n'a pas la même direction et la même grandeur.

Revenons à la fig. 25. On remarquera que les points de deux ondes successives S et S' sont, deux à deux, liés de telle sorte que l'un de ces points, m, situé sur S, peut être regardé comme le centre de vibration de l'onde élémentaire qui, au second point n, est tangente à S'. Nous donnerons à de pareils points, tels que m et n, ou f et g, le nom de points *conjugués*. Pour toutes les droites qui joignent des points conjugués de S et S', le temps nécessaire au mouvement lumineux pour les parcourir avec la vitesse B est le même, et ce temps est celui dans lequel l'onde se transporte de S en S'. Pour toute droite mh, au contraire, qui, menée entre S en S', ne joint pas deux points conjugués, le temps que le mouvement lumineux mettrait à la parcourir avec la vitesse B, sera plus long que celui dont il vient d'être parlé. En effet, mh coupera la surface de l'onde élémentaire émanée de m en quelque point e, à l'intérieur de S', et le temps en question sera déjà pour me le même que pour mn.

Supposons maintenant que de A en B soient menées un grand nombre de lignes. Parmi celles-ci il y en aura une qui coupera en des points conjugués toutes les ondes situées entre A et B; c'est cette ligne qu'on appelle le *rayon lumineux*. Or, il ressort de ce qui précède que le parcours de cette ligne demandera moins de temps que le parcours de toute autre ligne, qui ne passe pas dans toute son étendue par des points conjugués des ondes successives. Du reste, le temps

exigé pour le parcours d'un pareil rayon lumineux est celui dans lequel les ondes s'étendent de A à B.

La forme du rayon lumineux se laisse aisément déduire de ce qui vient d'être dit. Soit ds un élément d'une des lignes menées de A en B, et θ l'angle que cet élément fait avec la vitesse ϱ de l'éther dans son voisinage; le temps nécessaire au parcours de cet élément sera

$$\frac{ds}{B} = \frac{ds}{A + \varkappa\varrho\cos\theta} = \frac{ds}{A} - \frac{\varkappa\varrho\cos\theta\, ds}{A^2},$$

et le temps exigé pour le parcours de la ligne entière, dont nous désignerons la longueur par l,

$$\int\frac{ds}{B} = \frac{l}{A} - \frac{\varkappa}{A^2}\int\varrho\cos\theta\, ds.$$

Le facteur $\varrho\cos\theta$, étant la vitesse de l'éther dans la direction de ds, peut être représenté par $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Il en résulte que l'intégrale du second membre a pour valeur $\varphi_B - \varphi_A$, si nous distinguons par les indices A et B les valeurs du potentiel de vitesse aux points A et B.

Dans l'expression ainsi obtenue

$$\frac{l}{A} - \frac{\varkappa}{A^2}(\varphi_B - \varphi_A),$$

le dernier terme est le même pour toutes les lignes menées de A en B. Pour le rayon lumineux, il faut donc que le premier terme, et par conséquent l, devienne un minimum; le rayon est par conséquent une ligne droite.

Par une autre voie et pour le cas de $\varkappa = 1$, Stokes a déjà obtenu ce résultat. On y arrive encore si, au lieu de supposer un centre unique A, on commence par une onde S_1 de forme quelconque. Si S_2 est une des positions postérieures de cette onde, et AB une ligne par laquelle S_1, S_2 et toutes les positions intermédiaires sont coupées en des points conjugués, cette ligne sera parcourue par la lumière dans un temps minimum, d'où il suit de nouveau qu'elle est une ligne droite.

§ 13. Des considérations analogues à celles du paragraphe précédent peuvent servir à la recherche du changement de direction qu'un rayon lumineux éprouve lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre. Soit V la surface de séparation, de forme quelconque, de deux matières pondérables, toutes les deux homogènes, de sorte que la vitesse de propagation A et le coefficient d'entraînement $\varkappa$ ont dans le premier milieu partout les mêmes valeurs A_1 et $\varkappa_1$, et pareillement dans le second

milieu partout les mêmes valeurs A_2 et $\varkappa_2$. Dans ce cas général est compris celui où d'un côté de V se trouve l'éther libre.

Supposons qu'à partir d'une onde quelconque, dont la partie que nous avons à considérer se trouve encore tout entière dans le premier milieu, le mouvement lumineux se propage vers la surface limite. Le principe de Huygens nous permettra de nouveau de suivre à pas infiniment petits le progrès des ondes, et cela même après qu'elles ont déjà partiellement pénétré dans le second milieu. Dans ce dernier cas, l'onde est composée de deux parties, qui rencontrent la surface de séparation suivant la même ligne, mais qui, en chaque point de cette ligne, font entre elles un certain angle, et qui seront généralement de forme différente. L'ensemble de ces deux parties sera toutefois désigné, dans ce qui suit, comme une onde unique. Dans l'étendue qu'on en considère, cette onde peut être coupée par la surface de séparation suivant une ligne unique qui se termine aux bords de l'onde, ou bien suivant une ligne qui rentre en elle-même, ou enfin suivant deux ou plusieurs lignes, de l'une ou l'autre nature. Le premier cas se présente, par exemple, lorsqu'une onde plane et limitée tombe obliquement sur une surface plane; le second cas, lorsqu'une pareille surface est rencontrée par une onde sphérique; enfin, une surface cylindrique peut être coupée, par une onde plane, suivant deux lignes droites.

Dans tous les cas, pour déduire de l'une des positions S de l'onde brisée, la position S' qu'elle occupe au bout du temps dt, on doit construire deux ou, à strictement parler, trois espèces d'ondes élémentaires. En premier lieu, autour des points de S qui se trouvent déjà dans le second milieu, des ondes élémentaires semblables à celles dont il a été question au § 10, et pour lesquelles on emploiera les valeurs de A_2 et de $\varkappa_2$ propres au second milieu. La surface enveloppe de ces ondes fournit presque toute la partie de S' qui est située dans le second milieu; il n'y manque qu'une zone étroite, au voisinage immédiat de la surface limite. En second lieu, nous avons à construire des ondes élémentaires, analogues aux précédentes, mais avec les valeurs que A et $\varkappa$ possèdent dans le premier milieu, autour de tous les points de S qui, dans ce milieu, sont assez éloignés de la surface limite pour que les ondes élémentaires correspondantes restent en deçà de la surface limite. L'enveloppe de ces ondes-là est, jusqu'à une très petite distance de V, la partie de S' qui se trouve dans le premier milieu.

Restent encore les points de S qui sont si rapprochés de la surface limite, que l'ébranlement qui en émane la franchit avant la fin du temps dt. Autour de ces points nous pourrions construire un troisième groupe d'ondes élémentaires, mais nous n'en avons pas besoin pour apprendre à connaître la surface S'. La considération, en effet, des ondes élémentaires qui sont situées en entier dans le premier ou dans

le second milieu, ne laisse indéterminée qu'une bande infiniment étroite de S', près de la surface limite, et nous pouvons combler cette lacune en prolongeant chacune des parties déjà trouvées de S' par des parties infiniment petites, qui se raccordent à la direction de la surface déjà obtenue.

Au reste, quand même une onde élémentaire tombe en partie dans le second milieu, la partie de cette onde qui est encore située dans le premier milieu n'en aura pas moins la forme indiquée au § 10. Donc, dans la construction précédente, on pourra encore employer de telles ondes, à la seule condition que leur point de contact avec la surface enveloppe tombe en dedans du premier milieu ou sur la surface limite même. En opérant ainsi, on obtient dans toute son étendue la partie de S' située dans le premier milieu.

Les points de deux ondes successives sont de nouveau conjugués deux à deux, et en nous bornant à ceux de ces points qui se trouvent, soit tous les deux dans le premier milieu, soit tous les deux dans le second, nous pouvons dire que toutes les lignes droites qui joignent deux points conjugués, qu'elles soient situées dans le premier ou dans le second milieu, sont parcourues, avec la vitesse B indiquée au § 12, dans le même temps.

Mais, si une ligne droite est menée entre deux points non conjugués de S et S', de façon toutefois qu'elle soit encore contenue tout entière dans le même milieu, le parcours de cette ligne demandera plus de temps que le parcours d'une droite joignant deux points conjugués.

Imaginons, à partir d'un point A du premier milieu, une ligne qui, même après son passage dans le second milieu, joigne constamment des points conjugués. Soit B le point où ce „rayon lumineux" rencontre la surface limite, et C l'un des points qu'il atteint au-delà de cette surface. Si nous menons alors entre A et C quelque autre ligne, qui coupera la surface limite par exemple en B' où, de même que la ligne ABC au point B, elle pourra subir un changement de direction, le parcours de ABC exigera moins de temps que le parcours de $AB'C$. Pour le reconnaître, on n'a qu'à interposer entre A et C une infinité d'ondes, en ayant soin qu'il en passe une par B et une par B', et à remarquer que les éléments de $AB'C$ ne joignent pas tous des points conjugués d'ondes successives.

Le rayon lumineux est donc, de tous les chemins allant de A à C, celui qui est parcouru dans le temps le plus court. Il suit de là, d'après le résultat du paragraphe précédent, que ce rayon doit être composé de deux lignes droites, et B sera celle des positions du point variable B' pour laquelle le temps, nécessaire au parcours de la ligne brisée $AB'C$, devient un minimum.

D'après les formules du paragraphe précédent, il faut, pour parcourir AB', le temps

$$\frac{AB'}{A_1} - \frac{\varkappa_1}{A_1^2}(\varphi_{B'} - \varphi_A), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

et pour parcourir $B'C$, le temps

$$\frac{B'C}{A_2} - \frac{\varkappa_2}{A_2^2}(\varphi_C - \varphi_{B'}), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

$\varphi_{B'}$ ayant dans ces deux expressions la même valeur, puisque, suivant notre hypothèse, le potentiel de vitesse est une fonction continue.

La somme de (7) et (8) peut être représentée très simplement, eu égard à la valeur que nous avons admise, au § 10, pour le coefficient d'entraînement. Désignant, en effet, par n_1 et n_2 les indices de réfraction absolus des deux milieux, on a

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = n_2^2 : n_1^2,$$

et l'on sait, de plus, que

$$A_1 : A_2 = n_2 : n_1.$$

On en conclut que

$$\frac{\varkappa_1}{A_1^2} = \frac{\varkappa_2}{A_2^2}.$$

J'ajouterai que la fraction $\frac{\varkappa}{A^2}$ a pour *tous* les milieux isotropes la même valeur. Celle-ci étant désignée par μ, la somme de (7) et (8) sera

$$\frac{AB'}{A_1} + \frac{B'C}{A_2} - \mu(\varphi_C - \varphi_A).$$

Comme le dernier terme de cette expression est indépendant de la situation de B', il faut simplement que

$$\frac{AB'}{A_1} + \frac{B'C}{A_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

devienne un minimum lorsque B' occupe la position B. Mais il résulte de là que les droites AB et BC sont situées, avec la normale à la surface limite en B, dans un même plan, et que les sinus des angles qu'elles font avec cette normale sont entre eux dans le rapport de A_1 à A_2. Je puis me dispenser de donner ici la démonstration de cette conséquence. Bornons-nous à remarquer que tout ce qui est relatif au mouvement de l'éther par rapport à la matière pondérable a disparu de l'expression (9). Alors même que tout est en repos, la manière dont le rayon passe d'un milieu dans l'autre est déterminée par la condition que (9) devienne un minimum; or, dans ce cas la réfraction obéit aux lois que je viens d'énoncer.

Que ces lois subsistent encore, *pour les rayons relatifs*, lorsque l'éther est en mouvement par rapport à la matière pondérable, c'est ce

qui a été démontré d'une manière générale, d'abord par **Stokes** dans son mémoire sur la théorie de l'aberration de **Fresnel**, puis par **Veltmann**. Ces savants prirent toutefois pour point de départ de leur démonstration l'hypothèse de **Fresnel** et leur méthode est différente de celle que j'ai employée.

Il importe de remarquer que le résultat obtenu dépend entièrement de la valeur qu'on attribue au coefficient d'entraînement. En effet, la démonstration donnée est en défaut dès que $\varphi_{B'}$ ne disparaît pas de la somme des expressions (7) et (8). Or, cela n'a lieu que si $\frac{\varkappa_1}{A_1^2} = \frac{\varkappa_2}{A_2^2}$, c'est-a-dire, si pour des milieux différents $\varkappa$ est inversement proportionnel à n^2, et si par conséquent cette quantité, qui dans l'éther libre doit être 1, a dans tout autre milieu la valeur $\frac{1}{n^2}$.

La réflexion de la lumière peut être traitée de la même manière que la réfraction. Il y a cette différence que les ondes réfléchies se croisent avec les ondes incidentes, mais cette circonstance ne change rien au raisonnement. On reconnaîtra aisément que les lois ordinaires de la réflexion ne cessent de s'appliquer aux rayons relatifs, et que pour arriver à cette conclusion on n'a besoin d'aucune hypothèse sur le coefficient d'entraînement. Il suffira d'admettre que dans le même milieu ce coefficient présente toujours la même valeur.

§ 14. De ce qui précède, il résulte que le chemin des rayons relatifs est déterminé par les lois ordinaires de la réfraction, même quand la lumière parcourt successivement une série de milieux différents. Il en est encore ainsi dans le cas où les propriétés du milieu varient par degrés insensibles. On le démontre directement de la manière suivante.

Considérons un milieu, l'atmosphère par exemple, qui est isotrope, mais non homogène. En étudiant la propagation des ondes dans ce milieu, on peut de nouveau appliquer le principe de **Huygens**; seulement, en construisant les ondes élémentaires de la manière indiquée au § 10, on fera attention à ce que les quantités A et $\varkappa$ présentent, dans les différents éléments de volume, des valeurs différentes. Comme dans les cas précédemment traités, le rayon lumineux, qui unit constamment des points conjugués, sera, de tous les chemins qui relient deux points A et B, celui qui est parcouru dans le temps le plus court.

Or, pour un élément ds d'une ligne quelconque, le temps nécessaire est, comme au § 12,

$$\frac{ds}{B} = \frac{ds}{A} - \frac{\varkappa}{A^2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds,$$

de sorte que la ligne totale, menée de A en B, sera parcourue dans le temps

$$\int\frac{ds}{A} - \int\frac{\varkappa}{A^2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

D'après l'hypothèse que nous avons faite sur le coefficient d'entraînement, $\frac{\varkappa}{A^2}$ a partout la même valeur μ, quelle que soit la manière dont les propriétés du milieu varient d'un point à un autre. Pour le second terme de (10) on peut donc écrire

$$\mu\,(\varphi_B - \varphi_A),$$

et puisque cette grandeur est la même pour tous les chemins allant de A à B, le rayon lumineux sera la ligne pour laquelle le premier terme de l'expression (10), savoir

$$\int \frac{ds}{A}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

est un minimum.

Or, cette intégrale étant entièrement indépendante du mouvement de l'éther, il en sera de même de la marche du rayon lumineux relatif.

§ 15. Lorsque, à l'aide des lois simples que nous avons appris à connaître, on a déterminé le cours des rayons relatifs, on peut en déduire la forme d'une onde lumineuse dans ses positions successives; on se servira dans ce but du rapport qui existe entre la direction des ondes et celle des rayons.

Soit Q (fig. 26) le point où la surface enveloppe d'un système d'ondes élémentaires infiniment petites est touchée par une de ces dernières dont le centre de vibration se trouve en P. Alors PQ est un élément du rayon lumineux et $P'Q$ est normale à l'onde enveloppe. En se rappelant les valeurs de PQ, $P'Q$ et PP', on est conduit aux résultats suivants.

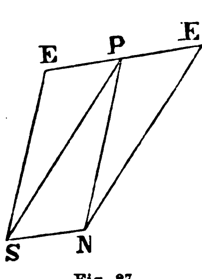


Fig. 27.

Si, en quelque point P (fig. 27), une vitesse $PN = A$, dirigée suivant la normale d'une onde, est composée avec une vitesse $PE = \varkappa\varrho$ parallèle à la direction dans laquelle l'éther se meut par rapport à la matière pondérable, la résultante PS aura la direction du rayon lumineux et représentera précisément la vitesse que, plus haut, nous avons nommée B.

Ou bien: si cette dernière vitesse $PS = B$ est composée avec une vitesse $PE' = \varkappa\varrho$, opposée à la direction dans laquelle l'éther se déplace, la résultante indiquera la direction de la normale de l'onde.

De ces propositions on peut déduire les conséquences suivantes.

a) Si θ désigne de nouveau l'angle que PS forme avec PE, l'angle ε compris entre le rayon lumineux et la normale à l'onde est déterminé par

$$\sin\varepsilon = \frac{\varkappa\varrho\sin\theta}{A},$$

ou, si l'on se borne à la première puissance de $\frac{\varrho}{A}$, par

$$\varepsilon = \frac{\varkappa \varrho \sin \theta}{A}.$$

b) Pour obtenir ce qu'on peut appeler la vitesse des ondes, il faudra diviser par dt la distance, mesurée dans la direction de la normale, des positions qu'une onde occupe aux instants t et $t + dt$. En comparant cette distance avec la longueur d'un élément du rayon lumineux on trouvera pour la vitesse cherchée la valeur $B \cos \varepsilon$. Si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport à $\frac{\varrho}{A}$, il est permis de remplacer $B \cos \varepsilon$ par B et d'entendre par θ, dans l'équation précédemment trouvée $B = A + \varkappa \varrho \cos \theta$, l'angle que la normale aux ondes fait avec la direction du mouvement de l'éther. Cet angle, en effet, ne diffère de θ que de la petite quantité ε.

On peut comparer le résultat que je viens d'énoncer avec celui qui a été obtenu au § 11.

c) Nous pouvons (fig. 28) construire un parallélogramme $psne'$ semblable à $PSNE'$ de la fig. 27, mais dans lequel le côté ps n'est pas égal à B, mais à A. Le côté pe' devient alors $\varkappa \varrho \frac{A}{B}$, ou de nouveau $\varkappa \varrho$, quand on s'en tient aux quantités du premier ordre. Donc, si l'on se représente dans la direction du rayon lumineux une vitesse A et qu'on la compose avec une vitesse $\varkappa \varrho$ opposée à celle du mouvement de l'éther, la résultante donnera encore la *direction* de la normale à l'onde, quoique sa *valeur* devienne différente de A.

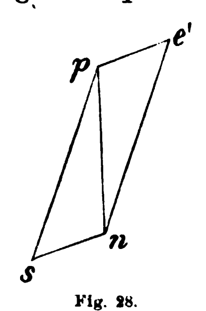


Fig. 28.

d) Étant donné un faisceau de rayons lumineux dans un espace où le mouvement de l'éther est connu, on peut déterminer les positions successives d'une onde.

Supposons, par exemple, que, dans un milieu homogène, des rayons rectilignes partent d'un même point A. Prenons ce point pour origine des coordonnées et soit l la distance d'un point quelconque (x, y, z) à A. Les composantes d'une vitesse A, prise dans la direction du rayon lumineux, sont alors

$$\frac{x}{l} A, \quad \frac{y}{l} A, \quad \frac{z}{l} A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

et celles de la vitesse $\varkappa \varrho$, opposée à la direction du mouvement de l'éther,

$$-\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

La résultante de A et $\varkappa\varrho$ a donc pour composantes

$$\frac{x}{l}A - \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{y}{l}A - \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{z}{l}A - \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}(Al - \varkappa\varphi),\ \frac{\partial}{\partial y}(Al - \varkappa\varphi),\ \frac{\partial}{\partial z}(Al - \varkappa\varphi),$$

ce qui montre qu'elle est normale à la surface représentée par l'équation

$$Al - \varkappa\varphi = \text{const.} \qquad (13)$$

L'onde lumineuse étant de même normale à la résultante de A et $\varkappa\varrho$, on obtiendra les positions qu'elle occupe successivement si, dans l'équation (13), on attribue différentes valeurs à la constante.

Lorsque des rayons lumineux convergent vers A, on doit remplacer les expressions (12) par

$$-\frac{x}{l}A,\ -\frac{y}{l}A,\ -\frac{z}{l}A,$$

de sorte que l'équation de la surface d'une onde devient

$$Al + \varkappa\varphi = \text{const.} \qquad (14)$$

Le premier de ces deux résultats s'obtient encore de la manière suivante. Si φ représente le potentiel de vitesse au point (x, y, z) et φ_A celui au point A, le temps nécessaire pour que le mouvement vibratoire s'étende du second point au premier est, d'après le § 12,

$$\frac{l}{A} - \frac{\varkappa}{A^2}(\varphi - \varphi_A).$$

Or, ce temps étant le même pour tous les points de la surface d'une onde, on n'a qu'à l'égaler à une constante pour obtenir l'équation de cette surface. On retombe ainsi sur l'équation (13).

Pareillement, l'équation (14) équivaut à la condition que, à partir de tous les points d'une onde, la lumière emploie le même temps pour atteindre le point A.

Lorsque, dans l'espace considéré, la vitesse de l'éther a partout la même grandeur et la même direction, on obtient, en prenant l'axe des x dans cette direction,

$$\varphi = \varphi_A + \varrho x \qquad (15)$$

et, si θ est de nouveau l'angle que l fait avec l'axe des x, l'équation (13) se transforme en

$$l = \frac{C}{A - \varkappa\varrho\cos\theta} = \frac{C}{A} + \frac{C}{A^2}\varkappa\varrho\cos\theta,$$

où C est une constante. C'est l'équation d'une sphère, dont le rayon a la valeur $\frac{C}{A}$, et dont le centre se trouve à la distance $\frac{C}{A^2}\varkappa\varrho$ du

point A, dans la direction vers laquelle l'éther se déplace. Les formes successives d'une onde sont donc semblables entre elles et semblables aux ondes élémentaires dont il a été question au § 10; leur centre de similitude coïncide avec le centre de vibration. Tout cela était à prévoir, car lorsqu'un milieu se trouve dans toute son étendue dans le même état, de sorte que les ondes élémentaires y ont partout la même forme, les ondes de grandeur finie, qui s'étendent autour d'un point, présentent toujours la même forme que les ondes élémentaires.

L'équation (14) se transforme, dans l'hypothèse exprimée par la formule (15), en

$$l = \frac{C}{A} - \frac{C}{A^2}\,\varkappa\varrho\cos\theta;$$

donc, pour des rayons lumineux qui convergent vers un point A, les ondes auront encore une forme sphérique, mais, $\frac{C}{A}$ étant le rayon, le centre se trouvera maintenant, à la distance $\frac{C}{A^2}\varkappa\varrho$ de A, dans la direction opposée à celle du mouvement de l'éther. Les positions successives d'une onde sont de nouveau semblables entre elles; leur centre de similitude est le point de convergence des rayons, et c'est en ce point que se concentrent les ondes sphériques.

Dans le cas général où la vitesse de l'éther est une fonction des coordonnées, on pourra lui attribuer encore la même direction et la même grandeur en tous les points d'un espace infiniment petit; on en conclut que, si les rayons lumineux convergent vers un point, les ondes auront toujours, dans le voisinage immédiat de ce dernier, la forme que nous venons d'examiner. La convergence des rayons relatifs vers un même point implique donc dans tous les cas une concentration réelle du mouvement lumineux en ce point.

§ 16. Reprenons maintenant l'examen de la propagation de la lumière qu'un astre nous envoie, et considérons le mouvement vibratoire, à partir d'un instant où il se trouve en un point assez éloigné de la terre pour que l'éther y soit encore en repos. Cherchons la direction que possèdent en ce point les rayons relatifs, direction qui se déduit, à l'aide de ce qui a été dit au paragraphe précédent, de la position de l'onde lumineuse. Cette dernière est (§ 11) perpendiculaire à la direction dans laquelle l'étoile est réellement située. Pour construire la fig. 27, nous devons donc mener la ligne PN dans la direction suivant laquelle les vibrations nous arrivent en réalité et la faire égale à la vitesse de la lumière dans l'espace céleste; quant à la ligne PE, elle doit être de même grandeur que la vitesse de la terre, mais de direction opposée. Car, l'éther étant en repos au point considéré, sa vitesse relative

est égale et opposée à la vitesse de la terre; d'ailleurs, nous avons à prendre, en dehors de l'atmosphère, $x = 1$.

La figure ainsi construite coïncide entièrement avec celle qu'on rencontre dans la théorie élémentaire de l'aberration, et la direction PS, que nous trouvons pour le rayon lumineux relatif, est identique à celle dans laquelle, suivant cette théorie, la lumière semble nous parvenir. Donc, pour expliquer l'aberration, il suffira de démontrer que, après avoir apporté à nos observations la correction ordinaire pour la réfraction atmosphérique, c'est dans la direction SP que nous croyons voir le corps céleste.

Or, ceci est une conséquence immédiate de la théorie que je viens d'exposer. En traversant la région où l'éther est entraîné par la terre, en passant par l'atmosphère, et par l'objectif d'une lunette, ou en frappant le miroir d'un télescope, les rayons relatifs suivent les lois ordinaires de l'optique et, lorsqu'ils convergent vers un point, il y a réellement, en ce point, concentration du mouvement lumineux. Bref, tout se passe comme si la terre était immobile et que les rayons relatifs fussent des rayons absolus. Si de nos observations nous déduisons, sans avoir égard au mouvement de la terre, et d'après les règles ordinaires prescrites par la théorie de la lumière, la direction que les rayons émanés d'une étoile possèdent à quelque distance de la terre, nous trouverons la direction des rayons relatifs, c'est-à-dire la direction qui, dans ce qui précède, a été indiquée par PS.

§ 17. Il est à peine besoin de remarquer que, suivant notre théorie, nous observerons encore l'aberration ordinaire si le tube de la lunette est rempli d'un liquide; à parler plus exactement, ce sera toujours selon les lois ordinaires de l'optique que la position de l'image dépendra de la direction du rayon relatif qui atteint la terre. Nous avons déjà fait remarquer que ce résultat de l'expérience proposée par Boscovich avait été déduit par Fresnel lui-même de son hypothèse sur le coefficient d'entraînement.

Par des considérations qui s'écartent, à plusieurs égards, de la théorie de Fresnel, Klinkerfues[1]) était amené à penser que, avec une lunette qui contient un liquide, l'aberration observée serait beaucoup plus grande qu'avec une lunette remplie d'air. Une expérience préliminaire[2]) semblait plaider en faveur de cette opinion, mais des recherches postérieures ne paraissent pas avoir fait ressortir une influence

[1]) W. Klinkerfues, Untersuchungen aus der analytischen Optik, insbesondere über den Einfluß der Bewegung der Lichtquelle auf die Brechung, Astr. Nachrichten 66 (1866), p. 337. Voir aussi: Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie, Leipzig, 1867.

[2]) Die Aberration der Fixsterne, p. 53.

de la colonne liquide sur la constante de l'aberration. Parlant de ces dernières recherches, Klinkerfues dit[1]): „Le résultat de ces observations et de quelques autres, également faites sur des étoiles, montre avec assez de certitude que la constante de l'aberration d'une lunette remplie de liquide est beaucoup plus petite que je ne l'avais d'abord présumé; il ne donne cependant pas le droit d'affirmer que l'aberration est complètement indépendante de l'instrument".

Les mesures d'Airy[2]), toutefois, ont mis hors de doute que, dans les limites des erreurs d'observation, l'aberration qu'on observe est indépendante de la matière que contient la lunette. L'astronome anglais communique, au sujet de ces observations, les détails suivants:

„Je me décidai à faire usage d'une lunette verticale, le sujet de l'observation étant la distance zénithale que présente dans sa culmination supérieure γ du Dragon, la même étoile sur laquelle l'existence et les lois de l'aberration furent découvertes. De nos jours la position de cette étoile est un peu plus favorable qu'elle ne l'était à l'époque de Bradley, la distance qu'elle atteint au nord du zénith, à l'Observatoire royal, étant d'environ 100″ et diminuant encore lentement . . . Je fis le projet d'un instrument dont la particularité essentielle consiste en ce que le tube entier, depuis la face inférieure de l'objectif jusqu'à une glace fermant l'extrémité inférieure du tube, est rempli d'eau, la colonne liquide ayant une longueur de 35,3 pouces. Les courbures qu'il fallait donner aux surfaces des deux lentilles qui composent l'objectif pour corriger exactement, dans le système optique qu'elles forment avec l'eau, l'aberration de sphéricité et de réfrangibilité, furent déterminées par moi-même et vérifiées par mon ami Stone. Le micromètre a reçu une disposition imaginée par moi-même et qui rend très facile la double observation, dans des positions renversées de l'instrument. Deux niveaux dont la lecture doit avoir lieu à chaque observation particulière permettent de rapporter les mesures à la direction verticale".

De chacune des observations, Airy déduisit la latitude géographique de l'instrument, en retranchant de la déclinaison de l'étoile, telle qu'elle est donnée dans le *Nautical Almanac*, la distance zénithale nord observée au moment du passage au méridien. Comme la distance zénithale observée est affectée de l'aberration qui existe réellement dans les observations, et que la déclinaison donnée par les tables est affectée de l'aberration, telle qu'elle a été admise pour le calcul du *Nautical Almanac*, la valeur trouvée pour la latitude géographique sera affectée de la

---

[1]) Astr. Nachrichten 76 (1870), p. 34.

[2]) G. B. Airy, On a supposed alteration in the amount of astronomical aberration of light, produced by the passage of light through a considerable thickness of refracting medium, Proc. Roy. Soc. 20 (1871), p. 35; Phil. Mag. (4) 43 (1872), p. 310.

différence entre l'aberration qui se présente dans l'instrument et l'aberration admise.

Onze observations, faites en mars 1871, donnèrent pour la latitude géographique la valeur moyenne 51° 28′ 34″, 4 et quatorze observations, exécutées au mois de septembre de la même année, conduisirent à la moyenne 51° 28′ 33″, 6, le nombre des secondes variant dans la première série de 33,4 à 36,6 et dans la seconde de 30,5 à 35,4.

L'instrument était installé dans un petit bâtiment spécial, à 340 pieds au sud de la lunette méridienne de l'observatoire. La latitude de ce dernier instrument est 51° 28′ 38″, 4, et, 340 pieds faisant un arc de 3″, 35, la latitude du point où furent exécutées les observations décrites est 51° 28′ 35″,05.

Entre ce nombre et les deux résultats ci-dessus communiqués, l'accord est meilleur qu' Airy ne l'avait présumé. Il lui semblait probable qu'à l'emplacement de la lunette méridienne, au bord septentrional d'une colline, la direction zénithale est déviée vers le nord, et qu'on a ainsi trouvé pour cet instrument une trop grande latitude.

L'aberration elle-même s'élevait, dans ces observations, à 19″; d'après l'hypothèse de Klinkerfues, l'écart entre la latitude géographique trouvée et la latitude réelle aurait dû être de 30″.

L'année suivante, Airy a répété ces observations, avec le même résultat.[1])

§ 18. Une expérience qui prouve la même chose que ces mesures d'Airy a été faite par Hoek[2]) au moyen d'une source lumineuse terrestre. Fresnel avait déjà remarqué que l'expérience de Boscovich peut être exécutée avec une pareille source tout aussi bien qu'avec la lumière d'une étoile. Nous avons vu, en effet, que tout revient à savoir si les rayons relatifs suivent, indépendamment du mouvement de la terre et de l'éther, les lois ordinaires de l'optique, question qu'on pourra trancher en recherchant si, dans la réflexion et la réfraction, la marche de rayons d'origine terrestre est la même lorsque le mouvement de la terre a tantôt l'une et tantôt l'autre direction par rapport aux appareils employés. D'après notre théorie, les rayons relatifs ne seront en rien influencés par le mouvement de la terre.

Comme Airy, Hoek a opéré avec une lunette remplie d'eau. Voici comment il décrit ses expériences:

„En A (fig. 29) j'ai placé la fente d'un collimateur détaché d'un appareil spectral; elle était éclairée par la lampe monochromatique donnant de la lumière de la raie D. La distance AB était de 1,405

---

[1]) Proc. Roy. Soc. 21 (1872), p. 121.

[2]) M. Hoek, Sur la différence entre les constantes de l'aberration d'après Delambre et Struve, Astr. Nachrichten 73 (1869), p. 193.

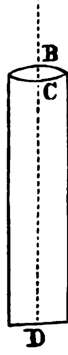


Fig. 29.

mètres. La colonne d'eau était contenue dans un tube de 2,067 mètres de longueur, qu'on avait fermé d'un côté par une glace *D*, de l'autre par une lentille *BC*, de 0,507 mètres de distance focale, d'un indice de réfraction de 1,509, et ayant deux rayons de courbure égaux, chacun de 0,516 mètres.

L'image du point *A* était formée à 73 mm. de distance derrière la glace, et là se trouvait un micromètre à fils.

Toutes ces parties constituantes étaient solidement fixées sur une poutre, de 3,55 mètres de longueur, sur 0,095 mètres d'épaisseur et 0,095 mètres de largeur. La poutre reposait par trois points sur une caisse qu'on pouvait faire tourner avec facilité; de sorte que l'appareil entier se laissait amener dans une position voulue sans subir le moindre dérangement.

Je l'ai toujours employé dans le méridien vers midi et minuit.

Voici les résultats de la première expérience, prise le 23 avril 1868, avant minuit:

Série.	Position du micromètre.	Temps moyen d'Utrecht.	Position de l'image en révol. du micr.	Nombre de mesures.
1	Nord	$11^h 30^m$	25^r,686	6
2	Sud	11 35	25 ,702	6
3	Nord	11 40	25 ,695	6
4	Sud	11 46	25 ,718	6
5	Nord	11 52	25 ,741	6
6	Sud	11 58	25 ,743	6

La moyenne des positions est donc

Micromètre Nord . . . 25^r,707 par 3 séries.
„ Sud . . . . 25 ,721 „ 3 „
Différence N — S = — 0 ,014."

Le 7 mai, **Hoek** trouva pour cette même différence la valeur + 0^r,031, et les mesures faites à huit autres jours donnèrent des différences analogues. La valeur d'une révolution du micromètre était de 0,32 mm.

D'après la théorie de **Klinkerfues**, on aurait dû trouver pour N — S plus de 0,675 révolutions.

Mentionnons encore que **Ketteler**[1]) et **Respighi**[2]), ce dernier antérieurement à **Hoek**, ont exécuté l'expérience sous la même forme et avec le même résultat.

---

[1]) Astronomische Undulationstheorie, p. 66; Ann. d. Phys. u. Chem. 144 (1871), p. 363.

[2]) Memorie dell' Istituto di Bologna (2) 2 (1862), p. 279.

§ 19. La théorie de Klinkerfues, selon laquelle la présence d'une colonne liquide dans une lunette ferait accroître la constante de l'aberration, conduit aussi à admettre que l'objectif exerce, quoique à un moindre degré, une influence analogue, dont la valeur serait proportionnelle à l'épaisseur des lentilles. En calculant cette valeur pour des objectifs tels qu'on les emploie fréquemment, Klinkerfues[1]) obtint un résultat qui suffirait précisément pour expliquer la différence entre les valeurs que Delambre et Struve ont assignées à la constante de l'aberration.

Le premier de ces astronomes soumit au calcul, en 1809, un grand nombre d'observations d'éclipses des satellites de Jupiter, faites dans le cours des 150 années précédentes; il trouva ainsi, pour le temps que la lumière met à parcourir la distance moyenne du soleil à la terre, 493,2 secondes. De ce nombre on déduit pour la constante de l'aberration la valeur 20″,25. Struve, au contraire, a obtenu par des déterminations de positions d'étoiles, en 1845, le nombre 20″,45. C'est la différence de ces résultats que Klinkerfues voulait expliquer par l'influence de l'objectif.

Selon notre théorie, une telle influence n'existe pas si le coefficient d'entraînement a la valeur $1 - \frac{1}{n^2}$. C'est à quoi conduit aussi, comme l'a fait voir entre autres Veltmann, la théorie de Fresnel, et Hoek était également d'avis que l'influence de l'objectif, si tant est qu'elle existe, serait beaucoup plus petite que ne l'admettait Klinkerfues. Aussi, à l'explication que celui-ci donnait de la différence en question, il en opposa une autre[2]), revenant à dire que, pour le moment de l'entrée d'un satellite de Jupiter dans l'ombre de la planète, on prendra l'instant où il nous envoie encore une certaine petite quantité de lumiere, que par suite chaque éclipse sera observée trop tôt, et cela d'autant plus qu'on est plus éloigné de la planète. De là résulteraient, en effet, une valeur trop grande pour la vitesse de la lumière et une valeur trop faible pour la constante de l'aberration. Selon les raisonnements de Hoek une erreur de un centième pourrait bien se produire de cette manière.

Il fait observer, toutefois, que cette explication est rendue incertaine par la circonstance qu'on ignore si Delambre s'est servi seulement des entrées des satellites, ou s'il a aussi tenu compte de leurs sorties.

En vérité, on sait si peu de chose de ces calculs de Delambre qui n'ont pas été imprimés et dont le manuscrit n'existe probablement plus, qu'on ne saurait décider si les observations des éclipses dont il

---

[1]) Die Aberration der Fixsterne, p. 41.

[2]) Hoek, Sur la différence entre les valeurs de la constante de l'aberration d'après Delambre et Struve, Astr. Nachrichten 70 (1868), p. 193.

a fait usage conduisent ou non à une constante de l'aberration différente de la valeur qu'on doit à Struve.

En 1875, Glasenapp[1]) a fait voir, dans une discussion de toutes les observations connues des éclipses du premier satellite, de 1848 à 1870, que, en employant différents groupes de ces observations et en appliquant des hypothèses différentes, on peut obtenir, pour le temps déterminé par Delambre, des résultats compris entre 496 et 501 secondes.

Le résultat obtenu par Struve, au contraire, peut être maintenu presque sans modification. Nyrén[2]), qui a soumis au calcul une série très étendue d'observations, contenant des mesures faites au moyen d'instruments différents, a dernièrement trouvé, comme valeur définitive de la constante de l'aberration, 20″,492 ± 0″,006.

§ 20. Aucune des expériences concernant les phénomènes qui nous occupent n'est devenue aussi célèbre que celle par laquelle Arago montra que les rayons relatifs, en traversant un prisme, suivent toujours, quelle que soit la direction du mouvement de la terre, les lois ordinaires de la réfraction. Malheureusement, cette expérience n'a jamais été décrite avec les détails qu'elle méritait par son importance.

Ce qui donna lieu à cette recherche, Arago nous l'apprend dans sa *Notice biographique* sur Fresnel[3]). Pour la théorie de l'émission, l'égalité de la vitesse de propagation de la lumière émise par des sources différentes, égalité expérimentalement reconnue, constituait une grave difficulté; voulût-on même supposer que toutes les étoiles émettent les particules lumineuses avec la même vitesse, il n'en arriverait pas moins, si, comme Arago le croyait probable, ces particules sont soumises à l'attraction universelle, que leur vitesse diminuerait de plus en plus à mesure qu'elles s'éloigneraient de la source lumineuse. „N'est-ce donc pas," dit Arago[4]), „contre le système de l'émission une objection formidable que cette parfaite égalité de vitesse, dont toutes les observations font foi?" Puis il continue:

„Il existe un moyen très simple d'altérer notablement, sinon la vitesse absolue d'un rayon, au moins sa vitesse relative; c'est de l'observer pendant sa course annuelle, quand la terre se dirige soit vers l'astre d'où ce rayon émane, soit vers la région diamétralement opposée. Dans

---

[1]) J'emprunte ceci à S. Newcomb, Measures of the velocity of light (Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, 2 [1885]), p. 114. Le mémoire de Glasenapp, publié en langue russe, ne m'est pas connu.

[2]) M. Nyrén, L'aberration des étoiles fixes, Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg (7) 31 (1883), No. 9.

[3]) Arago, Œuvres complètes, Paris (1854) 1, p. 107.

[4]) l. c. p. 156.

le premier cas, c'est comme si la vitesse du rayon se trouvait accrue de toute celle de notre globe; dans le second, le changement a numériquement la même valeur, mais la vitesse primitive est diminuée. Or, personne n'ignore que la vitesse de translation de la terre est comparable à celle de la lumière, qu'elle en est la dix-millième partie. Observer) d'abord une étoile vers laquelle la terre marche et ensuite une étoile que la terre fuit, c'est avoir opéré sur des rayons dont les vitesses diffèrent entre elles de un cinq-millième. De tels rayons doivent être inégalement réfractés. La théorie de l'émission fournit les moyens de dire en nombres à combien l'inégalité s'élèvera, et l'on peut voir ainsi qu'elle est fort supérieure aux petites erreurs des observations. Eh bien, des mesures précises ont complètement démenti le calcul: les rayons émanés de toutes les étoiles, dans quelque région qu'elles soient situées, éprouvent précisément la même réfraction."

Les observations elles-mêmes sont décrites par Biot[1]) de la manière suivante:

„Le prisme dont Arago s'est servi dans ses expériences, était placé devant l'objectif d'un cercle répétiteur, de manière à n'en couvrir qu'une partie; de sorte que l'on pouvait observer successivement le rayon lumineux direct à travers la lunette seule, et le même rayon dévié par le prisme. En tenant compte des temps où les deux observations étaient faites, on ramenait l'astre, par le calcul, à une même hauteur sur l'horizon. La différence des angles observés directement et à travers le prisme donnait la déviation éprouvée par le rayon lumineux. En observant ainsi les étoiles de l'écliptique qui passaient au méridien à 6 heures du soir, la terre, qui tourne sur elle-même, comme autour du soleil, d'occident en orient, marchait, sur son orbite, dans le même sens que leur lumière; et par conséquent celle-ci n'avait, en arrivant sur le prisme, que la différence des deux vitesses. Le contraire avait lieu pour les étoiles qui passaient au méridien à 6 heures du matin, et la terre allait en sens contraire de leur lumière. Mais cette opposition, qui aurait dû donner une différence de 50 secondes sexagésimales dans les déviations observées, n'y a produit aucun changement appréciable."

On sait comment Arago concilia le résultat des expériences avec la théorie de l'émission, en ajoutant à celle-ci l'hypothèse que les astres émettent des particules lumineuses ayant des vitesses très différentes, mais que l'impression de lumière ne peut être excitée que par les particules qui atteignent l'œil avec une vitesse déterminée. Fresnel montra ensuite que son hypothèse sur l'entraînement des ondes lumineuses par la matière pondérable peut rendre compte du résultat de l'expérience.

---

[1]) J. B. Biot, Traité élémentaire d'astronomie physique, 3e éd. Paris (1857) 5, p. 364, note.

Après les développements des paragraphes précédents, il est clair qu'elle peut également être expliquée par la théorie que j'ai exposée. En effet, selon ma manière de voir, on observe toujours, par une lunette, la direction des rayons relatifs qui atteignent l'objectif, et ces rayons suivent, dans leur marche à travers un prisme, les lois ordinaires de la réfraction. La lunette étant dirigée d'abord directement sur l'étoile, et ensuite sur l'image qu'en forme un prisme, l'angle entre les deux positions pourra être déterminé selon les règles ordinaires.

Il y a une circonstance, cependant, qu'on ne doit pas perdre de vue. Quand l'étoile nous envoie une lumière homogène dont le nombre des vibrations par unité de temps est N, dans un point du prisme, comme en tout autre point qui est lié à la terre, le dérangement de l'équilibre parcourra, suivant le § 11, toutes les phases, non pas N, mais N' fois par unité de temps. La réfraction du rayon relatif ne cessera pas d'obéir aux lois ordinaires, mais, par suite de la différence entre N et N', l'indice de réfraction pourra avoir une autre valeur que si la terre était immobile, et c'est *à cause de cela* que la déviation du rayon relatif, dans un prisme unique ou dans un système de prismes non achromatique pourra être modifiée par le mouvement de la terre. Dans l'expérience d'Arago, toutefois, cette circonstance n'a pu intervenir, car il a dû employer un prisme achromatique. C'est dans le spectroscope que paraîtra la modification de l'indice de réfraction qui est produite par la différence de N et N'. Elle y déterminera un déplacement des raies du spectre de l'étoile. Mais c'est là un point auquel je ne m'arrrêterai pas, car la dispersion, dans un prisme en mouvement, ne pourra être étudiée théoriquement que lorsqu'on se sera formé une idée du mécanisme du mouvement lumineux, dans une matière pondérable qui se déplace par rapport à l'éther. La première question sera alors de savoir si la dispersion dépend, en première ligne, d'une différence de la longueur d'onde, ou d'une différence de la durée d'une vibration.

Remarquons encore, à propos de l'expérience d'Arago, qu'en général tout changement de la direction suivant laquelle un rayon lumineux tombe sur un prisme a pour effet d'augmenter ou de diminuer la déviation. La lumière de deux étoiles, situées dans des directions différentes par rapport à la terre, ne subira donc la même déviation que si les rayons relatifs de l'une et de l'autre frappent le prisme sous le même angle. Mais lorsqu'on compare entr'eux, pour une même étoile, le cas où la terre est immobile et celui où elle se déplace, en admettant que l'angle d'incidence des rayons *vrais* soit le même dans les deux cas, ou bien lorsqu'on compare, dans cette même hypothèse, la réfraction des rayons de deux étoiles, on trouve des déviations différentes pour les rayons relatifs, parce que ceux-ci ont tantôt l'un et tantôt l'autre angle d'incidence.

Ce sont ces différences que Hoek[1]) déduisit de la théorie et qu'il se proposa de vérifier par une répétition de l'expérience d'Arago. On calcule leur valeur au moyen des formules différentielles qui indiquent comment, dans un prisme, la direction du rayon émergent est modifiée par un petit changement dans la direction de la lumière incidente. Ainsi que le fait remarquer Hoek, les différences en question s'évanouissent lorsqu'on n'observe que des étoiles situées dans la direction du mouvement de la terre, ou dans la direction opposée, et pareillement lorsqu'on observe au minimum de déviation; dans le premier cas, en effet, le rayon vrai et le rayon relatif ont la même direction, et dans le second cas un petit changement de l'angle d'incidence est sans effet sensible sur la déviation.

Aussi, c'est à cette dernière circonstance que Hoek attribue le résultat négatif de l'expérience d'Arago; selon lui, on arriverait à une conclusion différente si l'on n'observait pas au minimum de déviation. Cette opinion est contraire à ma théorie comme à celle de Fresnel. Je ne doute pas qu'Arago ait préféré la déviation minima, parce qu'elle présente l'avantage que l'erreur qui peut résulter d'une légère rotation accidentelle du prisme est aussi faible que possible. Mais, se fût-il placé dans d'autres conditions, il aurait toujours obtenu le même résultat. Si, un prisme étant invariablement lié dans une position quelconque à une lunette, on dirige celle-ci d'abord de façon que l'image directe d'une étoile se forme en un point déterminé du plan focal de l'objectif, puis de façon que les rayons qui ont traversé le prisme convergent vers ce même point, on trouvera entre les deux positions de la lunette le même angle, quelle que soit l'étoile observée; car les rayons relatifs frapperont toujours le prisme sous le même angle.[2])

---

[1]) Hoek, Recherches astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht 1 (1861), p. 36.

[2]) On trouve dans le mémoire de Hoek quelques autres remarques qui se rattachent à sa discussion de l'expérience d'Arago. Premièrement, en parlant de l'action de l'objectif d'une lunette, il compare celui-ci à un système de prismes (*Recherches astron.* 1, p. 51), et dit que le mouvement de la terre doit influer sur la déviation subie par les rayons qui frappent les parties périphériques de la lentille. Si l'on se figure la lunette toujours dirigée sur la position vraie d'une étoile, la direction des rayons relatifs incidents dépendra du côté vers lequel la terre se déplace, et il en est de même de l'angle sous lequel ces rayons rencontrent une partie déterminée de l'objectif; l'influence qu'un petit changement de cet angle pourrait avoir sur la déviation des rayons périphériques est examinée par Hoek.

Quand on s'en tient à la proposition que les rayons relatifs suivent les lois ordinaires de la réfraction, la chose devient très simple. Car la question de savoir si tous les rayons qui tombent sur l'objectif de la lunette convergeront vers son foyer principal, lorsque primitivement ils sont parallèles à l'axe de l'instrument, et si, lorsqu'ils font d'abord un petit angle avec cet axe, une image nette se formera sur un axe secondaire, rentre dans la théorie ordinaire des lentilles.

§ 21. Nous avons montré, au § 15, que lorsque les rayons relatifs convergent vers un point, l'onde lumineuse se contracte en ce point, et nous en avons conclu qu'il s'opère une concentration réelle du mouvement lumineux. Cela serait parfaitement exact si nous avions affaire à des ondes fermées entourant de toutes parts le point de convergence. Mais, nos instruments n'admettant que des ondes qui sont limitées latéralement, il faut, en toute rigueur, avoir recours à la théorie de la diffraction pour décider jusqu'à quel degré la lumière est concentrée en un point unique. Il importe donc d'examiner s'il existe une influence du mouvement de la terre sur les phénomènes de diffraction.

a) Soit (fig. 30) V la surface de séparation entre deux milieux homogènes, et A un point invariablement lié à la terre, et par conséquent immobile dans la figure. Supposons que de A à V la lumière se propage sans que des obstacles latéraux lui fassent subir une diffraction, mais que la surface de séparation V, ou la partie transparente de cette surface, soit limitée. Dans le second milieu il y a alors un phénomène de diffraction, et le mouvement, en un point quelconque B, est composé des mouvements que laissent passer les différents éléments de V. Pour évaluer les différences de phase avec lesquelles l'interférence a lieu, prenons un point quelconque P de V, et considérons le temps qu'il faut au mouvement lumineux pour se propager de A en P et de là en B. Il est (§ 12) exprimé par

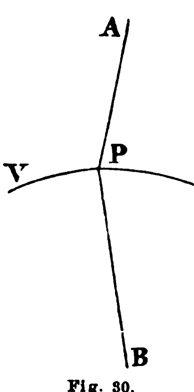


Fig. 30.

$$\frac{AP}{A_1} + \frac{PB}{A_2} - \mu\,(\varphi_B - \varphi_A), \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

où μ a la signification indiquée au § 13, et où A_1 et A_2 se rapportent au premier et au second milieu.

Quand on calcule la valeur de (16) pour différentes situations du point P, le dernier terme reste toujours le même; les différences de

---

L'autre remarque de Hoek, dont je veux dire un mot, consiste en ceci, que la constante de l'aberration doit, à cause de la réfraction atmosphérique, présenter une valeur légèrement variable avec la hauteur de l'astre. Lorsque, en effet, la direction que suit près de la surface de la terre le rayon relatif provenant d'une étoile est comparée avec la direction que le rayon vrai aurait au même point, si la terre était immobile, on reconnaît que par suite de la réfraction atmosphérique, l'angle de ces deux directions diffère un peu de l'aberration, telle qu'elle existerait en l'absence de l'air. La différence est très faible, mais, fût-elle plus grande, on peut éviter la complication qui en résulterait dans la réduction des observations astronomiques; il suffit de faire *d'abord* la correction due à la réfraction, et d'appliquer *ensuite*, à la direction ainsi trouvée pour le rayon relatif en dehors de l'atmosphère, les formules ordinaires de l'aberration.

phase des mouvements partiels, au moment où ils se rencontrent en B, sont donc déterminées par les durées

$$\frac{AP}{A_1} + \frac{PB}{A_2},$$

d'où l'on voit qu'elles ont la même valeur que si la terre était immobile.

Il s'ensuit que, dans l'espace situé derrière V, la distribution de l'intensité lumineuse n'est pas modifiée par le mouvement de la terre.

Il n'en est pas de même de la phase des vibrations résultantes. D'après l'expression (16), le temps qu'il faut à chaque vibration partielle pour atteindre le point B se trouve diminué de la quantité

$$\mu\,(\varphi_B - \varphi_A)$$

par le mouvement de la terre; la vibration résultante sera donc avancée, elle aussi, de cette même quantité. Or, ce temps dépendant de la situation de B, les différences de phase que présentent entre elles les vibrations résultantes, aux divers points du second milieu, seront modifiées par le mouvement de la terre.

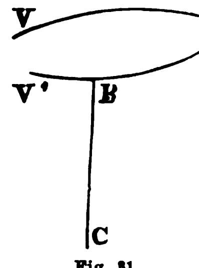


Fig. 31.

On doit avoir égard à cette modification lorsque au second milieu succède un troisième qui en est séparé par la surface limite V' (fig. 31). Soit B un point de V', C un point quelconque en arrière de V'. Si la terre était immobile, il existerait en B une vibration, qui, elle-même le résultat de la diffraction précédente, se transmettrait jusqu'à C dans le temps

$$\frac{BC}{A_3},$$

A_3 étant la valeur de la vitesse A dans le troisième milieu. Quand la terre se meut, ce temps devient

$$\frac{BC}{A_3} - \mu\,(\varphi_C - \varphi_B),$$

mais, puisque alors la vibration se trouve déjà avancée en B de $\mu\,(\varphi_B - \varphi_A)$, elle arrive finalement en C avec une avance de temps égale à

$$\mu\,(\varphi_C - \varphi_A).$$

Ce temps étant indépendant de la position de B, les vibrations partielles se rencontreront de nouveau en C avec les mêmes différences de phase, que la terre se meuve ou non, et la distribution de l'intensité lumineuse dans l'espace derrière V' sera également la même dans les deux cas.

On peut facilement étendre ce résultat au cas d'un nombre quelconque de milieux successifs, et rien n'y est changé si en avant et en

arrière d'une surface limite se trouve le même milieu, de sorte qu'on a affaire à la diffraction ordinaire par une ouverture, ou par un système d'ouvertures. Une diffraction dans la lumière réfléchie peut être traitée de la même manière.

Si, en supposant la terre immobile, on peut considérer le phénomène de diffraction comme revenant à peu près à la concentration de la lumière en un point unique, on peut le faire dans la même mesure, lorsque la terre se déplace.

b) Supposons qu'une partie seulement de la surface limite V (fig. 32) de deux milieux reçoive un faisceau de rayons relatifs parallèles LA, provenant d'une étoile. Si l'air est le premier milieu et qu'on néglige la réfraction atmosphérique, ces rayons peuvent avoir la direction dans laquelle ils étaient émis par l'étoile, mais on peut aussi supposer qu'ils aient déjà changé de direction par une réflexion ou une réfraction par des surfaces planes. On comprendra immédiatement que les phénomènes se passeront comme si dans la direction AL, à une grande distance de V, se trouvait un point lumineux lié à la terre; seulement, pour chaque espèce de lumière que l'étoile nous envoie, ce point devrait exécuter par seconde un nombre de vibrations différant du vrai nombre de vibrations de cette espèce de lumière. Le dernier nombre étant désigné par N, le premier sera donné, d'après ce qu'on a vu au § 11, par l'équation

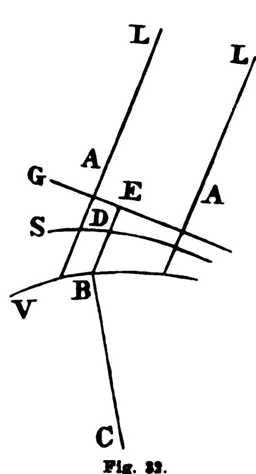


Fig. 32.

$$N' = N\left(1 - \frac{g \cos \alpha}{A}\right),$$

dans laquelle α est l'angle que fait la direction *primitive* des rayons lumineux avec celle de la vitesse de la terre. En effet, une fois ce nombre calculé pour les rayons relatifs, il ne changera plus, de quelque manière que ces rayons soient réfléchis ou réfractés.

Si l'introduction d'un point lumineux imaginaire, placé dans la direction AL et invariablement lié à la terre, donnait lieu à quelque doute, voici comment on pourrait présenter les choses.

De la manière indiquée au § 15, c) on peut déterminer la forme d'une onde située, dans le premier milieu, près de la surface limite. Si nous prenons pour plan des xy un plan G perpendiculaire aux rayons LA, et que nous dirigions l'axe des z positif du côté vers lequel ces rayons se propagent, une vitesse ayant pour composantes

$$-\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial z} + A$$

doit être normale à l'onde; la forme de cette dernière sera donc déterminée par l'équation

$$-\varkappa\varphi + Az = \text{const.},$$

ou

$$-\mu\varphi + \frac{z}{A} = C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

C étant une constante.

Pour trouver maintenant la phase de la vibration qu'un point quelconque C du second milieu reçoit de l'élément B de la surface limite, menons par B une droite parallèle à AL. Soit D le point où l'onde S est rencontrée par cette droite. Le trajet DBC sera parcouru par la lumière dans le temps

$$\frac{DB}{A_1} + \frac{BC}{A_2} - \mu(\varphi_C - \varphi_D), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

et comme il y a égalité de phase sur toute l'étendue de l'onde S, c'est des valeurs que prend cette grandeur (18) que dépendront les différences de phase avec lesquelles les vibrations se rencontreront en C. Mais, si E est le point de rencontre de la droite BD avec le plan G, on a, d'après la formule (17),

$$-\mu\varphi_D + \frac{ED}{A_1} = C$$

et l'expression (18) devient

$$\frac{EB}{A_1} + \frac{BC}{A_2} - \mu\varphi_C - C.$$

Les deux derniers termes ne changeant pas lorsqu'on prend pour B l'un ou l'autre point de la surface limite, les différences de phase sont déterminées par les termes

$$\frac{EB}{A_1} + \frac{BC}{A_2}.$$

Or, cette expression représente le temps qu'il faudrait à la lumière, si la terre était immobile et que les lignes LA fussent des rayons vrais, pour se propager du plan G à B et de là au point C. Dans ce cas, une onde lumineuse serait dirigée suivant le plan G. Il en résulte que les différences de phase exprimées en unités de temps seraient les mêmes que lorsque la terre se meut et que les lignes LA représentent des rayons relatifs. Si donc la périodicité que présente l'ébranlement en un point fixe de la figure est également la même dans les deux cas, il y aura aussi égalité entre les différences de phase exprimées en durées de vibration. La distribution de l'intensité lumineuse dans l'espace derrière V sera donc, lorsqu'une étoile émet de la lumière dont N est le nombre de vibrations, la même que si la terre était en repos, que l'étoile se trouvât dans la direction des rayons relatifs et que le nombre des vibrations fût N' (§ 11). Ce résultat peut encore être étendu au cas d'une série de milieux différents.

Les considérations précédentes peuvent être appliquées à la diffraction par les réseaux. Les spectres qu'on obtient par ces derniers ne seront en rien affectés par le mouvement de la terre si l'on fait usage d'une source lumineuse terrestre, mais dans les spectres que nous donne la lumière d'une étoile les raies éprouveront un déplacement conformément au principe de Doppler. Ce déplacement n'existe pas dans le spectre solaire, la distance de la terre au soleil pouvant être regardée comme invariable.

Babinet[1]) et Ångström[2]) furent conduits par leurs considérations théoriques à une conclusion différente, conclusion que le second de ces physiciens crut trouver confirmée, quoique d'une manière peu certaine, par ses mesures de longueurs d'onde de la lumière solaire. Cependant Mascart[3]), en soumettant la question à une nouvelle étude expérimentale, n'a pu constater aucune influence du mouvement de la terre sur les spectres de réseau de la lumière solaire. Il a reconnu, par la comparaison directe de la lumière solaire et de celle d'une source terrestre, que les raies correspondantes des spectres présentent la même déviation.

§ 22. L'interférence de la lumière donne lieu à des remarques analogues à celles que nous avons faites au sujet de la diffraction. Les phénomènes ne seront pas modifiés par le mouvement de la terre si l'on fait usage d'une source lumineuse terrestre; et quand on opère sur les rayons d'une étoile, il ne se produira d'autre changement que celui qui résulte de la modification, suivant le principe de Doppler, de la durée de vibration. Soit, pour justifier la première assertion, A (fig. 33) un point lumineux lié à la terre, et supposons que les vibrations atteignent le point B par deux chemins différents. Pour simplifier, nous admettrons que ni sur l'un ni sur l'autre de ces chemins la propagation de A vers B ne soit troublée par la diffraction; nous supposerons donc que, en appliquant de la manière exposée aux §§ 12 et 13 le principe de Huygens, on trouve pour chacun des deux chemins des ondes suffisamment larges, dont les bords soient à quelque distance de B. Nous pouvons alors mener de A à B deux rayons relatifs, que nous désignerons par L_1 et L_2. Ces rayons peuvent

A

L_2 L_1

B

Fig. 33.

[1]) J. Babinet, Sur un nouveau mode de propagation de la lumière, Comptes rendus 56 (1863), p. 411.

[2]) A. J. Ångström, Neue Bestimmung der Länge der Lichtwellen, nebst einer Methode, auf optischem Wege die fortschreitende Bewegung des Sonnensystems zu bestimmen, Ann. d. Phys. u. Chem. 123 (1864), p. 489 (voir p. 500).

[3]) E. Mascart, Sur les modifications qu'éprouve la lumière par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur, Ann. de l'École Normale (2) 1 (1872), p. 166.

changer une ou plusieurs fois de direction par une réflection ou une réfraction, en obéissant toujours aux lois ordinaires de l'optique. Si l'on voulait considérer aussi des milieux non homogènes, les rayons pourraient être composés de lignes courbes. Quoi qu'il en soit, si ds_1 représente un élément de L_1, le temps nécessaire pour le parcours de cet élément avec la vitesse B (§ 12) est

$$\frac{ds_1}{A} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} ds_1,$$

et par conséquent le temps nécessaire pour le rayon entier

$$\int \frac{ds_1}{A} - \mu (\varphi_B - \varphi_A).$$

Comme, pour L_2, on obtient de la même manière l'expression

$$\int \frac{ds_2}{A} - \mu (\varphi_B - \varphi_A),$$

on voit que la différence des deux temps est indépendante des potentiels de vitesse, et par conséquent du mouvement de la terre.

Babinet[1]) le premier a démontré par une expérience cette indépendance d'un phénomène d'interférence du mouvement de la terre; après lui Hoek[2]) et Ketteler[3]) ont exécuté des expériences analogues. Plusieurs physiciens, entre autres Stokes et Veltmann, ont démontré que le résultat de ces recherches était à prévoir d'après la théorie de Fresnel.

§ 23. L'explication que viennent de recevoir, dans ce qui précède, un certain nombre de phénomènes repose, pour la plupart d'entre eux, sur la supposition faite relativement au coefficient d'entraînement. Cette supposition fut justifiée dans une certaine mesure par l'expérience connue de Fizeau[4]), dans laquelle interféraient des rayons qui avaient traversé des tubes par lesquels passait un courant d'eau. Le résultat de cette expérience prouvait, en effet, que les ondes lumineuses ne participent que partiellement au mouvement du milieu et les valeurs numériques obtenues par Fizeau sont telles qu'on pouvait le prévoir d'après la valeur admise pour le coefficient d'entraînement. Cependant, avec les moyens dont Fizeau disposait, il était impossible d'arriver à une détermination précise du coefficient.

---

[1]) Babinet, Sur l'aberration de la lumière, Comptes rendus 9 (1839), p. 774.

[2]) Hoek, Détermination de la vitesse avec laquelle est entraînée une onde lumineuse traversant un milieu en mouvement, Arch. néerl. 3 (1868), p. 180.

[3]) Astronomische Undulationstheorie, p. 67.

[4]) H. Fizeau, Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur, Comptes rendus 33 (1851), p. 349; Ann. d. Phys. u. Chem., Erg. 3 (1853), p. 457.

Deux physiciens américains, Michelson et Morley[1]), ont récemment répété l'expérience sur une plus grande échelle. D'après leurs mesures le coefficient d'entraînement possède, dans le cas de l'eau, la valeur 0,434, avec une erreur possible de $\pm$ 0,02. La quantité $1 - \frac{1}{n^2}$ s'élevant pour l'eau à 0,437, l'accord avec l'hypothèse de Fresnel est très satisfaisant.

Pour faire intervenir dans la détermination du coefficient des vitesses plus considérables, on choisira des phénomènes dans lesquels la vitesse de la terre pourrait jouer un rôle. En vérité, toute expérience telle que celles d'Arago et de Boscovich, ou l'observation de tout phénomène d'interférence dans lequel une certaine étendue d'une matière transparente est parcourue dans une direction faisant tantôt tel angle tantôt tel autre avec la vitesse de la terre, peut servir à la détermination des coefficients k et $\varkappa$. Or, toutes ces expériences ont conduit à la valeur $k = 1 - \frac{1}{n^2}$, qui peut cependant être affectée d'une erreur qu'on évaluera par une discussion détaillée de chaque expérience.

Il importe d'ailleurs, évidemment, de savoir jusqu'à quel point l'équation $k = 1 - \frac{1}{n^2}$ s'applique à chaque couleur séparément[2]); de savoir aussi ce que devient cette relation pour les corps biréfringents. Au sujet de cette dernière question, Mascart[3]) a fourni des données importantes par ses expériences sur les phénomènes d'interférence qui se produisent quand des plaques épaisses de spath d'Islande, taillées parallèlement à l'axe, sont traversées par la lumière polarisée. Ces phénomènes ont de nouveau été trouvés indépendants du mouvement de la terre.

Dans tous les cas que nous venons de passer en revue, le degré d'exactitude avec lequel on peut déterminer le coefficient d'entraînement, dépend de la grandeur de la vitesse que l'éther possède par rapport à la matière pondérable. La signification, par exemple, des expériences d'Arago et de Boscovich n'est pas la même dans une théorie qui suppose l'éther en repos absolu, et dans une autre qui le fait participer plus ou moins au mouvement de la terre. Dans la théorie primitive de Stokes, aucune de ces expériences ne peut conduire à quelque conclusion au sujet du coefficient d'entraînement.

Ce sera la tâche de la théorie de la lumière de rendre compte de la valeur que les observations fournissent pour le coefficient d'entraînement. Pour y réussir, elle devra montrer d'abord qu'il peut être question

[1]) A. A. Michelson and E. W. Morley, Influence of motion of the medium on the velocity of light, Amer. Journ. of Science (3) 31 (1886), p. 377.

[2]) Veltmann, Ann. d. Phys. u. Chem. 150, p. 529.

[3]) l. c. p. 191.

d'un tel coefficient. On devra indiquer le mécanisme par lequel la perturbation d'équilibre, qui d'abord existe en un point P (fig. 24), que ce soit dans l'éther ou dans la matière pondérable, ne se trouve plus, au bout du temps dt, que dans l'éther et la matière pondérable qui occupent alors la surface d'une sphère ayant pour centre P'.

§ 24. La question de savoir si l'éther prend part ou non au mouvement de la terre ne saurait être tranchée par les phénomènes dont nous avons parlé jusqu'ici. En effet, ils se laissent expliquer tout aussi bien par les hypothèses du § 8, qui permettent un mouvement de l'éther, que par la théorie de Fresnel, avec laquelle ce mouvement est incompatible. Si l'on ne voulait avoir égard qu'aux considérations qui précèdent, rien n'empêcherait d'admettre que les corps opaques sont imperméables à l'éther, de sorte que, dans un tube de lunette par exemple, l'éther partagerait presque complètement le mouvement de la terre.

Mais d'autres considérations peuvent être invoquées. Lorsqu'on incline un tube barométrique, de manière que le mercure vienne le remplir en entier, l'éther qui se trouvait au dessus du mercure doit s'être échappé à travers le métal, ou à travers le verre, à moins qu'il ne se soit frayé un passage entre le mercure et la paroi. La même expérience pourrait être faite avec un tube barométrique opaque, en métal, par exemple. Ou, pour citer un autre cas, lorsqu'un accroissement de la pression atmosphérique comprime la boîte élastique d'un baromètre métallique, une partie de l'éther inclus doit sortir de la boîte, à travers la paroi. En effet, pour des raisons qu'il est superflu de mentionner ici, nulle théorie n'admettra la compressibilité de l'éther.[1])

En face de phénomènes de ce genre, tous les physiciens accorderont, je crois, la perméabilité pour l'éther même aux corps opaques, du moins lorsque ceux-ci ont une épaisseur telle qu'ils la présentent dans nos expériences. Et alors on n'a plus à choisir qu'entre deux possibilités. Ou bien la terre entière est, elle aussi, complètement perméable, ou bien les corps opaques, perméables sous les dimensions dont il vient d'être parlé, ne le sont plus sous une épaisseur des milliers de fois plus grande.

[1]) Il me semble maintenant que je suis allé trop loin dans cette assertion. Pour les théories anciennes dans lesquelles on considérait l'éther comme un milieu élastique, l'hypothèse d'un éther compressible entraînerait la possibilité de vibrations longitudinales, se propageant avec une vitesse finie et dont l'influence pourrait se faire sentir dans certains phénomènes optiques. D'après les théories modernes, de telles vibrations seraient d'une nature entièrement différente de celle des vibrations lumineuses, qu'on considère comme des dérangements de l'équilibre électromagnétique et qu'on pourrait bien supposer être indépendantes des changements dans la densité de l'éther.

A quelques-uns, la seconde de ces deux hypothèses semblera peut-être la plus acceptable. Si, en effet, on attribue aux atomes de la matière ordinaire une certaine étendue, et qu'on admette que là où se trouve un pareil atome il ne saurait y avoir d'éther, il ne pourra plus être question d'une perméabilité complète des corps pondérables, dès qu'ils possèdent une épaisseur suffisamment grande.

Il me semble, toutefois, que l'autre manière de voir est au moins aussi simple, sinon plus simple. Il est possible que ce que nous appelons un atome puisse bien dûment occuper la même place qu'une partie de l'éther, que par exemple un atome ne soit autre chose qu'une modification locale dans l'état de ce milieu, et alors on pourrait comprendre qu'un atome pût se mouvoir sans que l'éther environnant fût entraîné. En adoptant cette manière de voir, on revient à la théorie de Fresnel; les considérations précédentes n'ont alors, à part la simplification des raisonnements, d'autre utilité que de faire ressortir que ce ne sont pas les phénomènes de l'aberration qui nous imposent cette théorie.

Quoi qu'il en soit, on fera bien, à mon avis, de ne pas se laisser guider, dans une question aussi importante, par des considérations sur le degré de probabilité ou de simplicité de l'une ou de l'autre hypothèse, mais de s'adresser à l'expérience pour apprendre à connaître l'état, de repos ou de mouvement, dans lequel se trouve l'éther à la surface terrestre.

§ 25. Je n'ai connaissance que de deux recherches expérimentales qui se rapportent à cette question.

En premier lieu, Fizeau[1]) a trouvé que le mouvement de la terre a une influence sur la rotation imprimée au plan de polarisation par des piles de glaces. Aucune objection ne saurait être faite, me semble-t-il, à la conclusion de ce savant[2]), savoir, que près de la surface de la terre l'éther n'est pas en repos par rapport à celle-ci, mais, à mon avis, il n'a pas été démontré par ces expériences que la vitesse relative de l'éther soit précisément égale à la vitesse de la terre. Je n'entrerai pas ici dans la discussion de ces observations, cette discussion devant être basée sur une étude de la modification que subissent, par suite

---

[1]) H. Fizeau, Sur une méthode propre à rechercher si l'azimut de polarisation du rayon réfracté est influencé par le mouvement du corps réfringent. Essai de cette méthode, Ann. de chim. et de phys. (3) 58 (1860), p. 12; Ann. d. Phys. u. Chem. 109 (1860), p. 160; 114 (1861), p. 554.

[2]) Après avoir écrit ceci, j'ai douté de plus en plus du résultat des expériences de Fizeau. Il n'a pas été confirmé par celles de D. B. Brace [Phil. Mag. (6) 10 (1905), p. 591], dans lesquelles on n'a pu observer aucune trace d'une influence du mouvement de la terre sur le plan de polarisation d'un rayon réfracté.

du mouvement de la matière pondérable, les conditions qui, à la surface des corps, déterminent la réflexion et la réfraction.

En second lieu, une ingénieuse expérience d'interférence a été exécutée par Michelson[1]), et a conduit ce savant à une conclusion diamétralement opposée à celle de Fizeau.

Michelson fait observer que, si l'éther n'est pas entraîné par la terre, le temps employé par la lumière pour aller d'un point A à un point B, tous les deux liés à la terre, et pour revenir ensuite de B en A, doit dépendre de l'angle que la ligne AB fait avec la direction du mouvement de notre globe.[2]) Si D est la distance AB, A la vitesse de la lumière, g celle de la terre, on a, dans le cas où cette dernière est dirigée de A vers B, pour le temps exigé pour l'aller $\frac{D}{A-g}$, et pour celui nécessaire au retour $\frac{D}{A+g}$, de sorte que la somme des deux temps devient $\frac{2AD}{A^2-g^2}$, ou, à très peu près, $\frac{2D}{A} + 2D\frac{g^2}{A^3}$. Dans le cas, au contraire, où g est perpendiculaire à AB, l'aller et le retour auraient lieu, d'après Michelson, dans le temps $\frac{2D}{A}$. La différence,

$$\tau = 2D\frac{g^2}{A^3},$$

sera, lorsque D est de 1 mètre, une fraction non négligeable de la durée de vibration; une expérience dans laquelle interfèrent deux rayons qui ont parcouru, dans les deux sens, la distance D, l'un dans la direction de g, l'autre perpendiculairement à g, devra déceler cette différence.

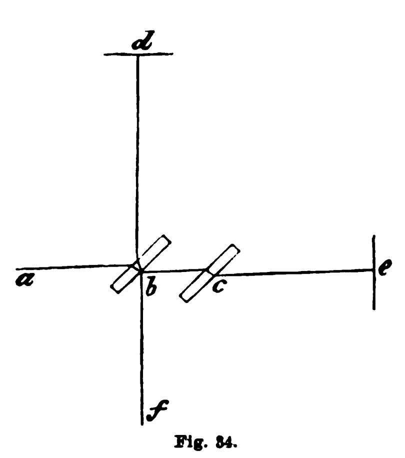


Fig. 34.

Michelson a réalisé l'interférence en question au moyen d'un appareil qui présente quelque analogie avec le réfracteur interférentiel de Jamin. Deux glaces de même épaisseur, b et c (fig. 34), étaient placées, parallèlement l'une à l'autre, dans une position verticale. Sur la première tombaient des rayons horizontaux ab, dont une partie était réfléchie à la face postérieure de la glace suivant bd, une autre partie étant transmise suivant bce. Le rayon réfléchi et le rayon transmis tombaient perpendiculairement sur

[1]) A. A. Michelson, The relative motion of the earth and the luminiferous ether, Amer. Journ. of Science (3) 22 (1881), p. 20.

[2]) Il paraît que Maxwell avait déja remarqué cette influence du mouvement de la terre. Dans une lettre „On a possible mode of detecting a motion of the

les miroirs d'argent *d* et *e*, et revenaient donc par les mêmes chemins en *b*, où maintenant le rayon *db* était transmis, tandis que *ecb* était réfléchi sur le même côté de la glace où avait eu lieu la première réflexion. Les rayons *bf* étaient reçus dans une lunette, dans laquelle on observait une image semblable à celle que donne le réfracteur interférentiel.

L'appareil entier, y compris la source lumineuse et la lunette, pouvait tourner autour d'un axe vertical, ce qui permettait, lorsque les expériences étaient faites à un temps convenable, d'amener alternativement le bras *bd* et le bras *be* dans la direction du mouvement de la terre. Suivant Michelson, par le passage d'une de ces positions à l'autre, le temps employé à l'aller et au retour de la lumière serait, pour l'un des bras, augmenté de

$$2D\frac{g^2}{A^3},$$

tandis que pour l'autre il serait diminué de la même quantité, D représentant la longueur des bras ($1^m,2$). Par la rotation de l'appareil, la différence de phase des rayons interférents subirait donc un changement qui, exprimé en temps de vibration, peut être représenté par

$$4\frac{D}{\lambda}\cdot\frac{g^2}{A^2},$$

λ étant la longueur d'onde. Si on prend $D = 1^m,2$, la valeur de cette expression pour la lumière jaune est environ 0,08. Les franges d'interférence dévraient donc se déplacer, par la rotation, de la fraction 0,08 de leur distance mutuelle.

En réalité, la chose est un peu moins simple. Michelson exécutait ses expériences au commencement du mois d'avril. Si alors, vers l'heure de midi, les deux bras de l'appareil sont alternativement amenés dans la direction est-ouest, le changement des différences de phase sera plus petit qu'il n'a été trouvé ci-dessus, parce que la direction du mouvement de la terre n'est pas contenue dans le plan des deux bras, mais fait un certain angle avec ce plan. Michelson calcule qu'à raison de cette circonstance le déplacement des franges, que nous exprimerons toujours en prenant pour unité leur distance mutuelle, doit être réduite à 0,048.

D'un autre côté, quand on adopte la théorie de Fresnel, il est

---

solar system through the luminiferous ether", publiée après sa mort [Proc. Roy. Soc. 30 (1879—80), p. 108], il dit: „In the terrestrial methods of determining the velocity of light, the light comes back along the same path again, so that the velocity of the earth with respect to the ether would alter the time of the double passage by a quantity depending on the square of the ratio of the earth's velocity to that of light, and this is quite too small to be observed."

naturel d'admettre que l'éther, qui n'est pas affecté par le mouvement annuel de la terre, n'est pas non plus entraîné par le système solaire dans son mouvement par rapport aux étoiles, et que, par conséquent, la vraie vitesse relative de la terre par rapport à l'éther s'obtiendra en composant la vitesse de la terre sur son orbite avec celle que possède le système solaire. Or, les résultats trouvés au sujet de ce dernier mouvement indiquent que, à l'époque où opérait Michelson, la résultante avait une direction et une grandeur très favorables à l'effet cherché, de sorte qu'on aurait même pu s'attendre à un déplacement de 0,16. Il est vrai que le mouvement du système solaire relativement à l'éther de l'espace céleste ne nous est pas connu avec certitude, mais, eu égard aux nombres 0,048 et 0,16, Michelson croyait pouvoir compter en tout cas sur un déplacement des franges d'interférence ne différant pas beaucoup de 0,1.

La position des franges fut déterminée au moyen d'un micromètre oculaire, consistant en une lame de verre divisée. La distance mutuelle des bandes était de 3 divisions de l'échelle, et comme la position de la frange obscure centrale se déterminait à $\frac{1}{4}$ d'une division près, chaque lecture, exprimée dans l'unité que nous avons choisie, était exacte à $\frac{1}{12}$ près. On pouvait estimer la moitié de cette dernière fraction.

Quatre séries d'expériences furent faites, dans chacune desquelles on faisait exécuter à l'appareil 5 tours complets, en procédant par angles de 45°, de sorte que 5 lectures de la position de la frange centrale étaient effectuées pendant que le bras *bd* avait la direction nord, autant lorsqu'il avait la direction nord-est, et ainsi de suite.

Si l'on prend dans la première série la moyenne de toutes les lectures obtenues pendant que *bd* avait la direction nord ou sud, et pareillement la moyenne de toutes les lectures correspondant à une direction ouest ou est de *bd*, la différence de ces moyennes, c'est-à-dire le déplacement de la frange centrale qui devrait être attribué à ce que *bd* passait de la direction sud ou nord à la direction ouest ou est, est trouvée égale à + 0,017. De la même manière, les autres séries donnent: — 0,025, + 0,030, + 0,067. La moyenne de ces résultats est + 0,022.

En comparant, au contraire, les positions que prend la frange centrale lorsque le bras *bd* était amené dans la direction nord-est ou dans la direction sud-ouest, on obtient pour les quatre séries les différences: + 0,050, — 0,033, + 0,030, + 0,087; en moyenne: + 0,034.

Des deux différences + 0,022 et + 0,034, la première est trop faible pour qu'on puisse y voir le déplacement cherché, et la seconde aurait dû être 0. Les différences doivent être regardées comme des erreurs d'observation, ce qui s'accorde d'ailleurs avec ce qui a été dit sur le degré d'exactitude des lectures. En outre, les déplacements observés

montraient une marche régulière, mais dont la loi était différente de celle que suivrait le phénomène supposé.

Michelson conclut donc que la rotation de l'appareil ne détermine aucun déplacement des franges d'interférence, que la théorie de Fresnel doit être abandonnée, mais que la théorie primitive de Stokes est confirmée par l'observation.

§ 26. A l'encontre de ces conclusions, je crois pouvoir remarquer que, suivant la théorie de Fresnel, le déplacement des franges n'aurait pas la valeur calculée par Michelson, mais seulement une valeur moitié moindre.

Pour le montrer, nous reprendrons l'examen de l'influence que le mouvement de la terre exerce sur la différence de phase dans un phénomène d'interférence, mais nous le reprendrons en ayant égard, cette fois, aux quantités qui, par rapport à $\frac{g}{A}$, sont du second ordre; de cet ordre est en effet, d'après le paragraphe précédent, l'action cherchée par Michelson. Dans cet examen nous partirons des hypothèses du § 8; il sera facile ensuite de revenir à la théorie de Fresnel.

Il convient d'observer, en premier lieu, que lorsqu'on tient compte de la seconde puissance de la vitesse de la terre et de celle de l'éther, la démonstration, donnée au § 12, de la propagation rectiligne d'un rayon lumineux cesse d'être applicable, et que les rayons relatifs n'obéiront plus aux lois ordinaires de la réflexion et de la réfraction. Si donc, pour la terre supposée immobile, L_1 (fig. 33) est un rayon qui se propage de A à B en subissant un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, pour la terre en mouvement le rayon de A à B s'écartera de ce chemin; soit L_1' ce nouveau rayon. Sa forme est déterminée par la condition que, de tous les chemins qui mènent de A à B et qui ont un point commun avec chacune des surfaces réfléchissantes ou réfringentes, le chemin L_1' soit celui pour lequel le temps

$$\tau = \int \frac{ds}{B}$$

devient minimum. Par B il faudra entendre ici la valeur donnée dans la formule (6) du § 12. Pour L_1' il faut donc que

$$\tau = \int \frac{ds}{A + \varkappa \varrho \cos\theta - \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{2A} \sin^2\theta}$$

devienne minimum.

A la place de cette expression nous pouvons écrire

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3,$$

en posant

$$\tau_1 = \int \frac{ds}{A}, \quad \tau_2 = -\int \frac{\varkappa \varrho \cos\theta}{A^2} ds = -\mu\,(\varphi_B - \varphi_A),$$
$$\tau_3 = \tfrac{1}{2} \int \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{A^3} (1 + \cos^2\theta)\, ds \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Comme τ_2 a la même valeur pour tous les chemins allant de A à B, c'est la quantité

$$\tau_1 + \tau_3$$

qui doit devenir minimum pour L_1'.

Il semble difficile de déduire de cette condition quelque chose de général concernant le cours de L_1'; mais pour l'objet que nous avons en vue, le raisonnement suivant peut suffire.

Lorsque les milieux, les surfaces réfléchissantes et réfringentes et les points A et B sont donnés, L_1 est entièrement déterminé; L_1' le sera également, dès qu'on connaît le mouvement de l'éther. Supposons L_1 et L_1' connus. Nous comparerons alors ces chemins, non pas avec *tous* les autres qui conduisent de A à B, mais seulement avec *quelques-uns* d'entre eux. Je choisirai ces derniers de la manière suivante.

Sur la ligne L_1 je prends entre A et B une infinité d'autres points, et sur L_1' des points en nombre égal; les points qui, comptés à partir de A, ont sur les deux chemins le même numéro d'ordre, seront désignés comme des points homologues. La seule restriction que je ferai, c'est que les points où L_1 et L_1' rencontrent une même surface réfléchissante ou réfringente doivent être des points homologues.

Par chaque couple de points homologues P et P' je fais passer une ligne quelconque, mais telle que sa forme varie d'une manière continue à mesure que P et P' s'éloignent de A, et que, lorsque P et P' sont situés sur une même surface réfléchissante ou réfringente, la ligne PP' tombe tout entière dans cette surface. Si l'on prend maintenant sur chaque ligne PP' un point p, de telle sorte qu'entre les distances mesurées le long de cette ligne on ait la relation $Pp = \varepsilon \times PP'$, ε ayant pour toutes les lignes PP' la même valeur, la ligne l, sur laquelle se trouvent tous les points p, est un des chemins que je comparerai avec L_1 et L_1'.

Tous ces chemins s'obtiennent si l'on attribue successivement à ε différentes valeurs. Dans le cas où $0 < \varepsilon < 1$, la ligne l est située entre L_1 et L_1'. Si, au contraire, la valeur de ε surpasse l'unité, le point p se trouve sur le prolongement de PP' du côté de P', et le chemin l s'écarte de L_1 plus que ne le fait L_1'. Une valeur négative de ε indiquera que le point p se trouve sur le prolongement de PP' du côté de P.

Dans le faisceau des chemins ainsi définis, chacun d'eux peut être déterminé par une seule variable. Comme telle on pourrait choisir le nombre ε; je prend raitoutefois une autre quantité, qui dépend de ε.

A cet effet, parmi tous les points P de L_1 j'en choisis un, par exemple le point où le rayon rencontre la première surface réfléchissante ou réfringente. Je désignerai par ξ la longueur de la ligne menée de ce point au point homologue P' et je déterminerai un chemin l par le segment $Pp = x$ qu'il intercepte sur PP'. Pour L_1 on a alors $x = 0$, pour L_1', $x = \xi$, et en général $x = \varepsilon \xi$. Supposons la quantité ξ positive; x peut être positif ou négatif.

Toute grandeur qui a rapport à l'un des chemins l sera maintenant une fonction de x; il en sera ainsi, par exemple, de τ_1 et de τ_3. Comme d'ailleurs ξ et toutes les autres valeurs de x que nous avons à considérer sont des quantités très petites, τ_1 et τ_3 peuvent être développés d'après le théorème de Mac-Laurin. En mettant entre parenthèses les valeurs pour $x = 0$, c'est-à-dire celles qui se rapportent au chemin L_1, on trouve

$$\tau_1 = (\tau_1) + x\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x^2}\right) + \cdots,$$

$$\tau_3 = (\tau_3) + x\left(\frac{\partial \tau_3}{\partial x}\right) + \cdots$$

Mais, τ_1 devenant un minimum pour le rayon L_1, la quantité $\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x}\right)$ s'annule. Par conséquent, pour $x = \xi$, l'expression

$$\tfrac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x^2}\right) + \cdots + x\left(\frac{\partial \tau_3}{\partial x}\right) + \cdots$$

doit devenir minimum. On en déduit la relation

$$\xi \left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x^2}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial \tau_3}{\partial x}\right) + \cdots = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

où les termes omis contiennent des puissances de ξ supérieures à celles que contient le terme qui les précède.

Or, d'après la formule (19), τ_3 et $\left(\frac{\partial \tau_3}{\partial x}\right)$ sont de l'ordre $\frac{\varrho^2}{A^2}$, tandis que τ_1 et $\left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x^2}\right)$ ne contiennent pas le facteur $\frac{\varrho}{A}$. Il suit donc de l'équation (20) que ξ est de l'ordre $\frac{\varrho^2}{A^2}$, ce qui rend très simple l'expression $\tau_1 + \tau_3$ pour le rayon L_1', c'est-à-dire pour $x = \xi$. Car alors, dans le développement de τ_1, le terme $\tfrac{1}{2} \xi^2 \left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x^2}\right)$ est déjà du quatrième ordre par rapport à $\frac{\varrho}{A}$ ou $\frac{g}{A}$, et il en est de même du terme $\xi \left(\frac{\partial \tau_3}{\partial x}\right)$ dans le développement de τ_3. En se bornant aux termes du second ordre, on peut donc écrire pour L_1'

$$\tau_1 + \tau_3 = (\tau_1) + (\tau_3),$$

c'est-à-dire que, pour calculer le temps que la lumière emploie pour

aller de A à B, on peut, au lieu du chemin réel L_1', continuer à prendre le chemin L_1 qu'elle suivrait si la terre était immobile.

Nous avons supposé, ci-dessus, que $\left(\frac{\partial \tau_2}{\partial x}\right)$ n'est pas nul. S'il en était autrement, $\xi = 0$ satisferait à l'équation (20), de sorte qu'on trouverait immédiatement le résultat auquel nous venons de parvenir.

Revenons aux phénomènes d'interférence. Si, dans la fig. 33, un élément de L_1 est désigné par ds_1, le temps nécessaire à la lumière pour aller par ce chemin de A à B sera représenté par

$$\int \frac{ds_1}{A} - \mu\,(\varphi_B - \varphi_A) + \tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{A^3}\,(1 + \cos^2\theta)\,ds_1 .$$

Pour le second chemin, L_2, le temps analogue est

$$\int \frac{ds_2}{A} - \mu\,(\varphi_B - \varphi_A) + \tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{A^3}\,(1 + \cos^2\theta)\,ds_2 ,$$

et la différence de phase avec laquelle les rayons interfèrent en B devient, exprimée en unités de temps,

$$\int \frac{ds_1}{A} - \int \frac{ds_2}{A} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{A^3}\,(1 + \cos^2\theta)\,ds_1 - \tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{A^3}\,(1 + \cos^2\theta)\,ds_2 .$$

Comme les deux premiers termes représentent la différence de phase qui existerait si la terre était immobile, l'expression

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{A^3}\,(1 + \cos^2\theta)\,ds_1 - \tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{A^3}\,(1 + \cos^2\theta)\,ds_2$$

détermine le changement produit dans cette différence par le mouvement de la terre.

Lorsque les rayons interférents se propagent dans l'air, on peut, du moins avec une erreur très petite, poser $\varkappa = 1$. Si, de plus, on admet la théorie de Fresnel, la vitesse relative ϱ de l'éther par rapport à la terre est partout égale et opposée à la vitesse g de la terre elle-même. L'expression trouvée devient alors

$$\frac{g^2}{2A^3}\left(\int (1 + \cos^2\theta)\,ds_1 - \int (1 + \cos^2\theta)\,ds_2\right), \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

où A est la vitesse de la lumière dans l'air, tandis que par θ on doit entendre l'angle qu'un élément du rayon lumineux forme avec la direction du mouvement de la terre. Quand l'appareil de Michelson est placé de manière qu'un des bras se trouve dans cette direction, les deux chemins suivis par la lumière ne diffèrent qu'en ce que dans l'un il y a une partie $2D$ pour laquelle $\cos^2\theta = 0$, dans l'autre une partie de même longueur, pour laquelle $\cos^2\theta = 1$. Si le premier de ces deux chemins est pris pour L_1, l'expression (21) devient donc

$$-D\,\frac{g^2}{A^3} .$$

L'appareil étant ensuite tourné d'un angle de 90°, on aura pour le premier chemin $\cos^2\theta = 1$, pour le second $\cos^2\theta = 0$, et la quantité (21) deviendra

$$+ D \frac{g^2}{A^3},$$

de sorte que la rotation produit dans la différence de phase un changement représenté par $2D\frac{g^2}{A^3}$ ou, en durées de vibration, par

$$2\frac{D}{\lambda}\frac{g^2}{A^2},$$

un changement, par conséquent, qui n'est que la moitié de celui auquel Michelson s'était attendu.

Si l'on cherche en quoi les raisonnements de ce physicien s'éloignent de ceux que nous venons d'exposer, on reconnaît que les deux argumentations concordent en ce qui regarde le double parcours de la distance D dans la direction du mouvement de la terre, mais qu'elles diffèrent l'une de l'autre pour ce qui concerne le bras placé perpendiculairement à cette direction. D'après les formules du présent paragraphe, la lumière, pour faire dans les deux sens un trajet D perpendiculaire à la direction du mouvement de la terre, emploie le temps

$$\frac{2D}{A} + D\frac{g^2}{A^3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

tandis que Michelson évalue ce temps à $\frac{2D}{A}$.

L'inexactitude de cette évaluation ressort encore des considérations suivantes. Lorsque (fig. 34) be a la direction dans laquelle la terre se déplace, c'est un rayon lumineux *relatif* qui va vers le miroir d suivant la ligne bd et revient par le même chemin en b. Le rayon lumineux vrai — et c'est celui-ci qui, dans la théorie de Fresnel, marche avec la vitesse A — suit un autre chemin; il fait avec bd un angle égal à la constante de l'aberration, se trouvant, avant la réflexion sur le miroir, d'un côté de bd, et après cette réflexion, de l'autre côté. C'est ainsi qu'il atteint de nouveau le point b qui s'avance avec la terre.

Si t et t' indiquent les instants où une vibration subit les réflexions en b et en d, et si t'' se rapporte au moment où elle atteint de nouveau la glace b, on doit, dans une figure qui reste immobile dans l'espace, distinguer les lieux b, b' et b'' du point b aux instants t, t' et t'', et le lieu d' de d au moment t'. Les points b, d' et b'' sont alors les sommets d'un triangle isocèle, dont les deux côtés égaux sont parcourus avec la vitesse A. La hauteur du triangle étant D, on trouve pour la somme des côtés égaux

$$2\sqrt{D^2 + bb'^2},$$

ou, approximativement,

$$2D + \frac{bb'^2}{D}.$$

En négligeant des quantités d'ordre supérieur, on peut dire que bb' est le chemin parcouru par la glace b pendant que la lumière se propage sur la distance D. On a donc $bb' = g\,\frac{D}{A}$; la somme des côtés égaux du triangle devient

$$2D + D\,\frac{g^2}{A^2},$$

et le temps nécessaire pour parcourir ce chemin,

$$\frac{2D}{A} + D\,\frac{g^2}{A^3},$$

résultat conforme à celui qui est exprimé par la formule (22).

On voit, par ce qui précède, que, dans l'expérience de Michelson, même en faisant les hypothèses les plus favorables à l'effet cherché, on ne pouvait s'attendre à un déplacement des franges d'interférence égal à 0,16, mais seulement à un déplacement de 0,08. Ce déplacement serait donc tout au plus égal à la quantité de laquelle on peut encore être sûr dans la détermination de la position de la frange centrale. Si le mouvement du système solaire ne contribuait pas à l'effet, ou n'y contribuait pas dans la mesure supposée, le déplacement des franges tomberait au-dessous de cette quantité.

Il reste donc douteux, à mon avis, que l'hypothèse de Fresnel soit réfutée par l'expérience de Michelson. En tout cas, on ne peut pas conclure de cette expérience que l'éther suit entièrement le mouvement de la terre, comme le veut la théorie primitive de Stokes. Car ce n'est pas seulement entre cette théorie et celle de Fresnel qu'il s'agit de décider. La vitesse relative de l'éther par rapport à la terre peut avoir, non-seulement les valeurs 0 et g, mais beaucoup d'autres valeurs. Or, si cette vitesse était par exemple $\frac{1}{2}g$, ce qui ne saurait être jugé impossible, le déplacement proportionnel au carré de la vitesse, que les franges subiraient par une rotation de l'appareil de Michelson, serait, à coup sûr, complètement insensible.[1])

---

[1]) L'expérience de Michelson sera encore discutée dans plusieurs des articles suivants.

XV.

Über die Fortpflanzung des Lichtes in einem sich in beliebiger Weise bewegenden Medium.[1])

---

§ 1. Der Inhalt der Abhandlung von Christian Doppler „Über eine bei jeder Rotation des Fortpflanzungsmittels sich einstellende Ablenkung der Licht- und Schallstrahlen"[2]), an die E. R. v. Oppolzer in einer interessanten Arbeit[3]) erinnert hat, sowie die von diesem Astronomen an dieselbe geknüpften Bemerkungen haben mich dazu veranlaßt, die Ausbreitung der Wellen in einem bewegten Mittel in etwas allgemeinerer Weise, als ich es früher getan habe[4]), zu untersuchen. Ich erlaube mir, die Ergebnisse, zu welchen mich meine Betrachtungen und die Anwendung derselben auf die tägliche Aberration der Gestirne geführt hat, im Folgenden mitzuteilen. Es soll dabei zunächst ein beliebiges isotropes und homogenes Medium vorausgesetzt werden, das aus Äther und ponderabler Materie besteht und in welchem sich diese beiden unabhängig voneinander bewegen. Nachher wird es leicht sein, zu den für den freien Äther geltenden Formeln überzugehen.

Um die Fortpflanzung der Wellen und den Lauf der Strahlen zu verfolgen, lege ich das Huygens'sche Prinzip in seiner bekannten einfachen Fassung, unter Vernachlässigung aller Diffraktionserscheinungen zu Grunde.

§ 2. Es empfiehlt sich, die Richtungsänderungen, welche die Wellennormale und der Lichtstrahl beim Fortschreiten in dem bewegten Medium erleiden, jedesmal durch Angabe von Größe und Richtung eines gewissen Vektors darzustellen. Man kann nämlich, wenn p und q irgend zwei Richtungen sind, immer dadurch von der ersten zur zweiten übergehen, daß man einen Vektor, der die Richtung p und die

---

[1]) Nicht vorher publiziert.

[2]) Abh. d. böhm. Ges. d. Wiss. (5) 3 (1845), p. 419.

[3]) E. R. v. Oppolzer, Erdbewegung und Äther, Ann. d. Phys. 8 (1902), p. 898.

[4]) Siehe den vorhergehenden Artikel in dieser Sammlung.

Größe Eins hat, mit einem zweiten passend gewählten Vektor zusammensetzt, den wir abkürzungshalber *den ablenkenden Vektor* nennen wollen.

Hat man es, wie in den hier in Betracht kommenden Fällen, nur mit Ablenkungen zu tun, die als unendlich klein betrachtet werden dürfen, so gelten folgende Sätze:

a) Wenn eine Richtung nacheinander die den ablenkenden Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ usw. entsprechenden Änderungen erleidet, so gelangt man sofort zu der am Ende erreichten Richtung durch Anwendung eines ablenkenden Vektors $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 +$ usw., der sich aus der Zusammensetzung der einzelnen Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ usw. ergibt.

b) Erhält man die Richtung q aus der Richtung p mittels des ablenkenden Vektors $\mathfrak{a}$, so führt der gleiche und entgegengesetzt gerichtete Vektor $-\mathfrak{a}$ von q auf p zurück.

c) Man zerlege den ablenkenden Vektor $\mathfrak{a}$ in zwei Komponenten, deren erstere mit der Richtung p, von deren Änderung die Rede ist, zusammenfällt, während die andere senkrecht zu p steht. Die Ablenkung hängt nur von der zweiten Komponente ab, und wir können diese also füglich die *wirksame* Komponente des ablenkenden Vektors nennen. Diese Komponente ist, sobald die Richtungen p und q gegeben sind, eindeutig bestimmt, während die nach p gerichtete Komponente beliebig gewählt werden darf.

Handelt es sich um die bei einer krummen Linie längs des Elementes ds stattfindende Richtungsänderung, so läßt sich für die wirksame Komponente des ablenkenden Vektors schreiben $ds \cdot \mathfrak{k}$, wo $\mathfrak{k}$ ein bestimmter, von der Länge ds unabhängiger, senkrecht zu der Linie stehender Vektor ist (Krümmungsvektor). Die Größe desselben ist das gewöhnliche Maß der Krümmung.

§ 3. Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und fassen stets die Bewegung des Mittels und die Fortpflanzung des Lichtes relativ zu diesem Koordinatensystem ins Auge. In irgend einem Punkte möge der Äther die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}'$ mit den Komponenten u', v', w', die ponderable Materie aber die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}''$ mit den Komponenten u'', v'', w'' haben. Von diesen Größen nehmen wir an, daß sie nur von x, y, z, nicht aber von der Zeit t abhängen, so daß wir es mit einem stationären Zustande zu tun haben. Zur weiteren Vereinfachung betrachten wir die Geschwindigkeiten als unendlich klein gegen die Geschwindigkeit des Lichtes im ruhenden Medium, die ich A nenne; Größen, die in bezug auf $\frac{u'}{A}$, $\frac{v'}{A}$, $\frac{w'}{A}$, $\frac{u''}{A}$, $\frac{v''}{A}$, $\frac{w''}{A}$ von der zweiten oder höheren Ordnung sind, sollen vernachlässigt werden. Die Größen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ sind in unseren Formeln als Vektoren aufzufassen.

Wir richten nun die Aufmerksamkeit auf eine einzelne Welle. Zur

Zeit t falle dieselbe mit der Fläche σ' zusammen, und es soll aus dieser die neue zur Zeit $t + dt$ erreichte Lage σ'' abgeleitet werden. Es ist dies die einhüllende Fläche aller während der Zeit dt um die verschiedenen Punkte von σ' als Ausgangsstellen gebildeten Elementarwellen, und die gerade Linie, welche den Ausgangspunkt P' einer solchen Elementarwelle mit dem Punkte P'', in dem sie von σ'' berührt wird, verbindet, ist ein Element eines Lichtstrahls. Da wir von der Diffraktion absehen wollen, so stellen wir uns vor, daß der Teil, der an irgend einer Stelle beim Passieren einer Öffnung aus einer Welle geschnitten wird, seine scharfe Begrenzung in allen weiteren Lagen behält, und zwar wird die geometrische Gestalt der seitlichen Begrenzung eines Lichtbündels eben durch den Lauf der Lichtstrahlen bestimmt.

Hätte nun alles, was an der Lichtbewegung beteiligt ist, die ponderable Materie sowohl wie der Äther, die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}'$, so wäre die um P' gebildete Elementarwelle offenbar eine Kugel vom Radius $A dt$, deren Mittelpunkt M aber nicht in P' liegen würde, sondern von diesem Punkte aus um die Strecke $dt \cdot \mathfrak{p}'$ verschoben wäre. Nach unserer Voraussetzung hat nun aber die ponderable Materie relativ zum Äther noch die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}'$. Wir wollen annehmen, daß infolgedessen die Wellen mit der Geschwindigkeit $k(\mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}')$ mitgeführt werden, wo k der bekannte Fresnel'sche Koeffizient ist. Der Mittelpunkt Q der Elementarwelle liegt also nicht im obengenannten Punkt M, sondern ist von hier aus noch um die Strecke $MQ = k dt \cdot (\mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}')$ verschoben. Man kann seinen Ort auch dadurch angeben, daß man sagt, die Verschiebung von P' nach Q sei durch den Vektor $dt \cdot [\mathfrak{p}' + k(\mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}')]$ bestimmt. Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{p}' + k(\mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}') = \mathfrak{p} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und bezeichnen wir die Komponenten dieses Vektors mit u, v, w, so sind die Komponenten von $P'Q$: $u dt$, $v dt$, $w dt$.

§ 4. Es seien x', y', z' die Koordinaten eines Punktes P' in der Wellenfront σ', α, β, γ die Winkel, welche die in der Fortpflanzungsrichtung gezogene Normale dieser Fläche mit den Achsen bildet, x'', y'', z'' die Koordinaten des oben mit P'' bezeichneten Punktes. Da dieser auf der Elementarwelle liegt, so genügen seine Koordinaten der Gleichung dieser letzteren

$$(x'' - x' - u dt)^2 + (y'' - y' - v dt)^2 + (z'' - z' - w dt)^2 = A^2 dt^2; \quad (2)$$

daß P'' aber gerade der Berührungspunkt mit der Enveloppe σ'' ist, erfordert, daß x'', y'', z'' auch die Gleichung erfüllen, die aus (2) durch Differentiation nach x', y', z' erhalten wird, vorausgesetzt, daß bei

dieser Differentiation der Punkt P' die Fläche σ' nicht verläßt. Für alle der Gleichung

$$\cos\alpha dx' + \cos\beta dy' + \cos\gamma dz' = 0 \tag{3}$$

genügenden Werte von dx', dy', dz' muß also gelten

$$(x'' - x' - udt)dx' + (y'' - y' - vdt)dy' + (z'' - z' - wdt)dz' = 0.$$

Die Glieder $(x'' - x' - udt)dudt$ usw., in welchen du, dv, dw die Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten bei der Verrückung (dx', dy', dz') des Punktes P' bedeuten, sind hier fortgelassen; es sind diese Glieder von der Ordnung dt^2, weil $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ von der Ordnung dt sind.

Aus den angeführten Bedingungen folgt

$$\left.\begin{aligned} x'' - x' - udt &= A\cos\alpha dt \\ y'' - y' - vdt &= A\cos\beta dt \\ z'' - z' - wdt &= A\cos\gamma dt \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

welche Gleichungen die Lösung des Problems enthalten, da sie für jeden Punkt P' von σ' den zugehörigen Punkt P'' von σ'' zu bestimmen gestatten.

§ 5. Da die Richtungskonstanten des Lichtstrahls den Größen $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ proportional sind, so zeigen diese Formeln, daß der Übergang von der Wellennormale zu dem Lichtstrahl sich mittels des ablenkenden Vektors

$$\frac{\mathfrak{p}}{A},$$

der umgekehrte Übergang also mittels des Vektors

$$-\frac{\mathfrak{p}}{A}$$

vollziehen läßt.

Es ergeben sich auch einfache Ausdrücke für die Entfernung ds der Punkte P' und P'' und für die Größe $\frac{ds}{dt}$, welche man die Geschwindigkeit des Lichtstrahls nennt, und die wir mit B bezeichnen wollen. Es ist nämlich

$$B = A + (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) = A + \mathfrak{p}_n,$$

wenn $\mathfrak{p}_n$ die Komponente des Vektors $\mathfrak{p}$ nach der Richtung der Wellennormale bedeutet. Man darf hier übrigens, da der Winkel zwischen dieser Normale und dem Strahl von derselben Ordnung ist wie $\frac{u}{A}$, $\frac{v}{A}$, $\frac{w}{A}$, $\mathfrak{p}_n$ mit der nach der Strahlrichtung genommenen Komponente $\mathfrak{p}_s$ vertauschen.

§ 6. Differentiation der Gleichungen (4) führt nun weiter zu einer Beziehung zwischen den gleichzeitigen Verrückungen von P' und P'', bei welchen der eine Punkt in σ' und der andere in σ'' bleibt. Versteht man in (4) unter u, v, w die Werte in P'', was offenbar erlaubt ist, da diese nur um Größen von der Ordnung dt von den Werten in P' differieren, und bezeichnet man die Differentialquotienten nach x'', y'', z'' einfach mit $\frac{\partial u}{\partial x}$ usw. — weil in den weiteren Formeln die Werte derselben in P' und P'' nicht voneinander unterschieden zu werden brauchen — so erhält man

$$\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)dx''-\frac{\partial u}{\partial y}dtdy''-\frac{\partial u}{\partial z}dtdz''=dx'+Ad(\cos\alpha)dt,$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}dtdx''+\left(1-\frac{\partial v}{\partial y}dt\right)dy''-\frac{\partial v}{\partial z}dtdz''=dy'+Ad(\cos\beta)dt,$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}dtdx''-\frac{\partial w}{\partial y}dtdy''+\left(1-\frac{\partial w}{\partial z}dt\right)dz''=dz'+Ad(\cos\gamma)dt.$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addieren sie dann. Auf der rechten Seite kommt Null, wegen der Gleichung (3) und der Beziehung zwischen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; es wird daher, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial v}{\partial x}+\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial x}&=p_1\\ \cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\beta\frac{\partial v}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial y}&=p_2\\ \cos\alpha\frac{\partial u}{\partial z}+\cos\beta\frac{\partial v}{\partial z}+\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial z}&=p_3\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(5)$$

setzt,

$$(\cos\alpha-p_1dt)dx''+(\cos\beta-p_2dt)dy''+(\cos\gamma-p_3dt)dz''=0.$$

Diese Formel, in der wir jetzt noch dt durch $\frac{ds}{B}$, oder auch, da u, v, w unendlich klein sind, durch $\frac{ds}{A}$ ersetzen dürfen, hat eine einfache Bedeutung. Da dx'', dy'', dz'' sich auf eine beliebige Verrückung in der neuen Wellenfläche beziehen, so zeigt sie, daß die Richtungskonstanten der Normale zu letzterer den Größen

$$\cos\alpha-\frac{p_1}{A}ds,\quad\cos\beta-\frac{p_2}{A}ds,\quad\cos\gamma-\frac{p_3}{A}ds$$

proportional sind. Die Richtungsänderung der Wellennormale beim Übergang von P' nach P'' läßt sich also durch einen ablenkenden Vektor mit den Komponenten

$$-\frac{p_1}{A}ds,\quad-\frac{p_2}{A}ds,\quad-\frac{p_3}{A}ds\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

darstellen.

§ 7. Hieraus folgt sofort, daß die Richtungsänderung der Wellennormale, welche bei der Fortpflanzung eines Lichtstrahls von einem Punkte P_1 nach einem beliebig weit davon entfernten Punkte P_2 stattfindet, einem ablenkenden Vektor mit den Komponenten

$$-\frac{1}{A}\int_{P_1}^{P_2} p_1 ds, \quad -\frac{1}{A}\int_{P_1}^{P_2} p_2 ds, \quad -\frac{1}{A}\int_{P_1}^{P_2} p_3 ds$$

entspricht. Die drei Integrale beziehen sich hier auf den Teil $P_1 P_2$ des Lichtstrahls. Dieselben lassen sich dadurch umformen, daß man die Größen

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (7)$$

einführt. Es ist z. B.

$$\int_{P_1}^{P_2} p_1 ds = \int_{P_1}^{P_2}\left(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial u}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial u}{\partial z}\right)ds + 2\int_{P_1}^{P_2}(\nu\cos\beta - \mu\cos\gamma)ds.$$

Da wir nun in diesen unendlich kleinen Ausdrücken unter $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ebensogut die Richtungskonstanten des Strahls wie die der Wellennormale verstehen dürfen, so wird das erste Integral

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{\partial u}{\partial s} ds = u_2 - u_1,$$

wenn die Indizes 1 und 2 die Werte im Anfangs- und Endpunkte bezeichnen. In dieser Weise gelangt man dazu, den die Drehung der Wellennormale bestimmenden ablenkenden Vektor zu zerlegen in einen Vektor

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{A}(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2) \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

und einen zweiten $\mathfrak{a}''$ mit den Komponenten

$$\mathfrak{a}''_x = \frac{2}{A}\int_{P_1}^{P_2}(\mu\cos\gamma - \nu\cos\beta)ds, \quad \mathfrak{a}''_y = \frac{2}{A}\int_{P_1}^{P_2}(\nu\cos\alpha - \lambda\cos\gamma)ds,$$

$$\mathfrak{a}''_z = \frac{2}{A}\int_{P_1}^{P_2}(\lambda\cos\beta - \mu\cos\alpha)ds. \quad \dots \dots \quad (9)$$

§ 8. Verbindet man dieses mit dem in § 5 Gefundenen, so zeigt es sich, daß die Richtungsänderung des *Strahls* auf der Strecke $P_1 P_2$ durch den ablenkenden Vektor $\mathfrak{a}''$ *allein* bestimmt wird. Wählt man

nun für jene Strecke ein einzelnes Element ds, so verwandeln sich die Ausdrücke (9) in

$$\frac{2}{A}(\mu \cos\gamma - \nu \cos\beta)ds, \quad \frac{2}{A}(\nu \cos\alpha - \lambda \cos\gamma)ds,$$

$$\frac{2}{A}(\lambda \cos\beta - \mu \cos\alpha)ds.$$

Der hierdurch bestimmte Vektor steht senkrecht zu ds und muß also mit dem früher (§ 2) mit $\mathfrak{k}ds$ bezeichneten zusammenfallen. Folglich haben die Komponenten des Krümmungsvektors des Strahls die Werte

$$\mathfrak{k}_x = \frac{2}{A}(\mu \cos\gamma - \nu \cos\beta), \quad \mathfrak{k}_y = \frac{2}{A}(\nu \cos\alpha - \lambda \cos\gamma),$$

$$\mathfrak{k}_z = \frac{2}{A}(\lambda \cos\beta - \mu \cos\alpha).$$

Diese Formeln, die sich in die Gestalt von Differentialgleichungen bringen lassen, genügen zur Bestimmung des Laufes eines Lichtstrahls bei gegebener Bewegung des Mediums.

Es ist übrigens zu bemerken, daß man, um die Integrale (9) auswerten zu können, nicht schon den Lauf des Lichtstrahls genau zu kennen braucht. Da ja die Integrale, wegen der darin vorkommenden Größen λ, μ, ν, unendlich klein sind, so darf man dieselben, statt für den wirklichen Lichtstrahl, für eine beliebige unendlich wenig davon abweichende Linie berechnen, z. B. für den Weg, auf dem der Strahl im ruhenden Medium von P_1 nach P_2 gehen würde, und der in dem als homogen vorausgesetzten Mittel geradlinig ist.

Wir wollen die Bemerkung hinzufügen, daß die Ausdrücke (7) als die Komponenten einer gewissen Winkelgeschwindigkeit betrachtet werden können, nämlich der Winkelgeschwindigkeit, die ein Volumenelement haben würde, wenn die Punkte des Mediums sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ bewegten. Die von dem Vektor $\mathfrak{a}''$ herrührende Richtungsänderung, insofern sie sich auf ein Element ds des Strahls bezieht, kann man nun auffassen als das *Doppelte* der Richtungsänderung, welche das Element in der Zeit $\frac{ds}{A}$ erfahren würde, wenn es jener Rotation des Volumenelementes, in dem es liegt, folgte.

Ist die Verteilung des Vektors $\mathfrak{p}$ irrotationell, mit anderen Worten von einem Potential abhängig, so bleiben, da $\mathfrak{k} = 0$ wird, die Strahlen geradlinig, ein Satz, den Stokes vor vielen Jahren bewiesen hat.

§ 9. Von der Geschwindigkeit B des Lichtstrahls ist die Geschwindigkeit der Wellen, die A' heißen möge, zu unterscheiden; man erhält diese, wenn man die Länge des vom Punkte P' (§ 4) auf die

Fläche σ'' gefällten Lotes durch dt dividiert. Ist ϑ der Winkel zwischen Wellennormale und Strahl, so ist

$$A' = B \cos \vartheta;$$

in unserem Falle ist also, wegen des unendlich kleinen Wertes von ϑ, zu setzen

$$A' = B = A + \mathfrak{p}_n.$$

Wir können mithin die neue Lage σ'' der Wellenfläche auch in der Weise aus der früheren Lage σ' ableiten, daß wir auf sämtlichen Normalen zu dieser letzteren Strecken von der Länge $(A + \mathfrak{p}_n)dt$ abschneiden; σ'' ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Strecken. Diese Konstruktion ist einfacher als die oben angewandte; sie liefert aber nicht die Richtung des Strahls.

§ 10. Wir wollen auch den Fall behandeln, daß an einer gewissen, und zwar an einer in bezug auf das Koordinatensystem ruhenden Fläche Σ eine Diskontinuität vorhanden ist. Wir unterscheiden die beiden Seiten dieser Fläche durch die Indizes I und II und bezeichnen mit N die nach der zweiten Seite hin gezogene Normale. Das Licht gehe von der ersten nach der zweiten Seite.

Die Unstetigkeit soll darin bestehen, daß sich auf beiden Seiten der Fläche verschiedene Medien mit den Lichtgeschwindigkeiten A_{I} und A_{II} und den Mitführungskoeffizienten k_{I} und k_{II} befinden, und daß außerdem die Vektoren $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ — die wir parallel zu Σ voraussetzen — voneinander verschieden sind.

Es gilt nun, wie man leicht sieht, für die Richtungsänderung der Wellen beim Durchgang durch die Fläche das gewöhnliche Brechungsgesetz. Die Wellennormalen n_{I} und n_{II} liegen mit der Normale N in einer Ebene und zwischen den spitzen Winkeln ϑ_{I} und ϑ_{II}, die sie mit N bilden, besteht die Relation

$$\frac{\sin \vartheta_{\mathrm{I}}}{\sin \vartheta_{\mathrm{II}}} = \frac{A'_{\mathrm{I}}}{A'_{\mathrm{II}}} = \frac{A_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{n\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{n\mathrm{II}}} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Ist die Richtung n_{I} gegeben, so kann man zunächst die Richtung, welche n_{II} bei ruhenden Medien haben würde, bestimmen, und dann für $\mathfrak{p}_{n\mathrm{II}}$ den *dieser* Richtung entsprechenden Wert in die Gleichung einsetzen.

Bei festgehaltener Richtung von n_{I} ist die durch die Bewegung verursachte Änderung von ϑ_{II}

$$\delta \vartheta_{\mathrm{II}} = \operatorname{tg} \vartheta_{\mathrm{II}} \left(\frac{\mathfrak{p}_{n\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{II}}} - \frac{\mathfrak{p}_{n\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}} \right).$$

Die Abweichung der Normale n_{II} von der Richtung, die sie im Fall

der Ruhe haben würde, läßt sich demnach mittels eines ablenkenden Vektors

$$-\frac{1}{\cos\vartheta_{II}}\left(\frac{\mathfrak{p}_{n II}}{A_{II}}-\frac{\mathfrak{p}_{n I}}{A_{I}}\right),$$

der die Richtung der Normale N hat, darstellen.

§ 11. Von jetzt ab soll hauptsächlich von der Fortpflanzung im reinen Äther, und zwar speziell in dem die Erde umgebenden Äther gehandelt werden. Freilich läßt sich die jährliche Aberration der Gestirne wohl kaum in anderer Weise erklären als durch die Annahme, daß der Äther der jährlichen Bewegung der Erde *nicht* folge, und es ist daher von vornherein wenig wahrscheinlich, daß die Erde bei ihrer Achsendrehung den ihr zunächstliegenden Äther mit in Rotation versetze. Dennoch schien es mir nicht ohne Wichtigkeit, nach dem Beispiele von Doppler und v. Oppolzer die Erscheinungen zu untersuchen, die sich bei einer rotierenden Ätherhülle[1]) zeigen würden. Diese sind von dem, was man bei ruhendem Äther beobachten würde, weit verschieden, und es könnten also, wenn die in Betracht kommenden Richtungsänderungen nur etwas größer wären, die Beobachtungen über die tägliche Aberration zu einer Entscheidung zwischen den verschiedenen Theorien führen.

Wenn wir es bloß mit Äther zu tun haben, so bedeutet der in unseren Gleichungen auftretende Vektor $\mathfrak{p}$ mit den Komponenten u, v, w einfach die Geschwindigkeit des Äthers in bezug auf das Koordinatensystem, während die durch (7) bestimmten Größen λ, μ, ν die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit eines Ätherelementes sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Äther wollen wir mit c bezeichnen. Übrigens können wir die für den freien Äther geltenden Formeln mit genügender Annäherung auch auf einen mit Luft gefüllten Raum anwenden.

Es fragt sich jetzt, welche Richtung wir bei unseren Beobachtungen dem von einem Stern zu uns kommenden Lichte zuschreiben. Man kann das für jeden beliebigen Bewegungszustand des Äthers angeben, wenn man voraussetzt, daß der Beobachter mit seinen Instrumenten dieselbe Geschwindigkeit hat wie der Äther in der unmittelbaren Nähe. Wir denken uns zunächst, daß man den scheinbaren Ort des Sternes mit Hilfe zweier hintereinander gestellten engen Öffnungen bestimmt. Da die Strahlen die seitliche Begrenzung eines Lichtbüschels angeben, so geht aus der Konstruktion des § 3 hervor, daß die Öffnungen richtig gestellt sein werden, wenn ein Punkt der ersten zur Zeit t die Lage P', und der korrespondierende Punkt der zweiten Öffnung zur Zeit $t + dt$

[1]) Doppler stellt sich vor, daß die Atmosphäre bei ihrer Rotation den Äther mit sich führt. Wir können es aber dahingestellt sein lassen, in welcher Weise die Rotation des Äthers zu stande kommt.

die Lage P'' hat. Dann hat aber — da $P'Q = dt \cdot \mathfrak{p}$ ist — in diesem letzteren Augenblick der erstgenannte Punkt die Lage Q, und indem der Beobachter die *gleichzeitigen* Lagen der beiden Öffnungen miteinander vergleicht, wird er die Richtung der Linie QP'' für die halten, in der das Licht zu ihm kommt. Diese Linie steht aber senkrecht zu der Wellenfront σ''; es wird also die Richtung des Lichtes nach der Wellennormale beurteilt.

Derselbe Schluß gilt für den Fall, daß die Ortsbestimmung mit Fernrohr und Fadenkreuz ausgeführt wird; wenn das Instrument und der Äther nur eine gemeinschaftliche Bewegung haben, so kann offenbar die Lage des Sternbildes im Fernrohr nur von der Richtung der einfallenden Wellen abhängen.

§ 12. Die mitgeteilten Betrachtungen ermöglichen es, den Einfluß der jährlichen und täglichen Bewegung der Erde auf die scheinbaren Örter der Himmelskörper zu bestimmen, sobald man annimmt, daß der Äther in solcher Weise von diesen Bewegungen mitgeführt wird, daß an der Erdoberfläche keine Gleitung stattfindet. Was die jährliche Bewegung betrifft, so empfiehlt es sich, ein an derselben teilnehmendes Koordinatensystem einzuführen. Die Annahme einer irrotationellen Ätherströmung führt dann sofort zu der bekannten Stokes'schen Theorie der Aberration. Der Vektor $\mathfrak{a}''$ (§ 7) verschwindet, und in dem Ausdruck (8), auf die Fortpflanzung von einem weit entfernten Punkt bis zur Erdoberfläche angewandt, ist $\mathfrak{p}_2 = 0$, $\mathfrak{p}_1$ aber der Erdgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt. Das Resultat stimmt somit mit dem der elementaren Aberrationstheorie überein und steht daher auch mit den Beobachtungen im Einklang.

Auf die dieser Erklärung sich entgegenstellenden Schwierigkeiten[1]) soll hier nicht eingegangen werden. Wir wenden uns vielmehr dem Einfluß einer Rotation zu, wobei wir zur Vereinfachung von der Translation abstrahieren wollen. Das Koordinatensystem soll nicht mitrotieren. Es soll weiter so gewählt werden, daß eine Drehung über einen rechten Winkel von OX nach OY, für einen in einem Punkte der positiven z-Achse stehenden Beobachter die der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzte Richtung hat. Wir legen den Anfang der Koordinaten in den Mittelpunkt der Erde und die positive z-Achse durch den Nordpol. Die Winkelgeschwindigkeit des Planeten, die Ω heißen möge, ist dann eine positive Größe.

§ 13. Um ihre Beobachtungen von dem Einflusse der täglichen Aberration zu befreien, halten die Astronomen sich an dieselbe Regel,

---

[1]) Siehe den vorhergehenden Artikel, § 6.

wie wenn es sich um die jährliche Aberration handelt; sie betrachten $-\frac{\mathfrak{p}}{c}$, wobei jetzt $\mathfrak{p}$ die infolge der Erddrehung bestehende Geschwindigkeit des Beobachtungsortes ist, als den die scheinbare Richtungsänderung bedingenden ablenkenden Vektor. Dieses Verfahren entspricht der Fresnel'schen Theorie eines ruhenden Äthers, in welcher es offenbar keinen Unterschied machen kann, ob die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ des Beobachters von der jährlichen oder täglichen Bewegung der Erde herrührt. Die tägliche Aberration, wie sie bei der Reduktion der Beobachtungen vorausgesetzt wird, soll daher zur Unterscheidung die Fresnel'sche genannt werden.

Zu eben dieser Aberration würde nun auch die Annahme eines an der Erde haftenden und also mitrotierenden Äthers führen, wenn nur für die Bewegung desselben ein Geschwindigkeitpotential existierte und also nur der ablenkende Vektor $\mathfrak{a}'$ übrig bliebe. Das ist aber, wie man leicht sieht, unmöglich und so kann die bei einer rotierenden Ätherhülle bestehende tägliche Aberration nie mit der Fresnel'schen zusammenfallen. Der Unterschied fällt sofort, ohne jede Berechnung, in die Augen, wenn man einen der Erdachse parallelen Lichtstrahl betrachtet. Die Wellen sind in diesem Fall fortwährend der Bewegungsrichtung des Äthers parallel und werden also gar nicht gedreht.

§ 14. Will man die Gesetze der täglichen Aberration bis ins Einzelne aus der Theorie ableiten, dann ist es nötig, bestimmte Voraussetzungen über die Ätherbewegungen zugrunde zu legen, um die in (9) vorkommenden Integrale berechnen zu können. Doppler und v. Oppolzer haben angenommen, daß der Äther bis zu einer gewissen Höhe über der Erdoberfläche die volle Umdrehungsgeschwindigkeit Ω der Erde habe, in größeren Höhen aber in Ruhe bleibe. Die Schlüsse, zu welchen sie in dieser Weise gelangt sind, beruhen auf der einfachen Erwägung, daß sich in einer als Ganzes rotierenden Äthermasse dieselben Erscheinungen wie in einer ruhenden Masse abspielen können, und daß sich also das Licht längs einer geraden Linie l, die mit dem Äther rotiert, fortpflanzen kann.

Obgleich der Nachweis überflüssig ist, wollen wir zeigen, daß dies mit der oben entwickelten allgemeinen Theorie übereinstimmt. Indem wir von einem Punkte P' der Wellenfront σ' ausgingen, gelangten wir (§ 3) zu einem zweiten Punkte P''; wir können in derselben Weise weitere Punkte P''', P^{IV} usw. eines Lichtstrahls L im Raum bestimmen. Wir können uns ferner eine mit dem Äther rotierende Linie l denken, deren Punkte p', p'', p''', p^{IV} usw. zu den Zeiten t, $t+dt$ usw. die Lagen P', P'', P''', P^{IV} usw. haben. Man sieht leicht, daß zur Zeit $t+dt$ das Element $p'p''$ dieser Linie mit der Linie, die wir in § 3

mit QP'' bezeichneten, zusammenfällt und daß also die augenblickliche Richtung von l fortwährend die Wellennormale in dem gerade von dem Licht erreichten Punkt anzeigt.

Es seien nun P_1 und P_2 zwei beliebige, zu den Zeiten t_1 und t_2 erreichte Punkte des Lichtstrahls L, p_1 und p_2 die entsprechenden Punkte von l, dl_1 und dl_2 zwei bei p_1 und p_2 liegende Elemente dieser Linie, $dl_{(t)}$ die Lage eines derartigen Elementes zu einer bestimmten Zeit t. Die Sätze des § 7 liefern uns den Unterschied der Richtungen von $dl_{1(t_1)}$ und $dl_{2(t_2)}$. Bei einer gemeinschaftlichen Rotation der ganzen Äthermasse tritt nun aber der vereinfachende Umstand ein, daß man die Formeln (9) ersetzen kann durch

$$\mathfrak{a}''_x = \frac{2}{c}\left(\mu \int_{P_1}^{P_2} \cos\gamma\, ds - \nu \int_{P_1}^{P_2} \cos\beta\, ds\right)$$

$$= \frac{2}{c}\{(\mu z_2 - \nu y_2) - (\mu z_1 - \nu y_1)\}\,, \text{ usw.,}$$

wenn man die Koordinaten von P_1 und P_2 mit x_1, y_1, z_1, bzw. x_2, y_2, z_2 bezeichnet. Man findet hieraus, daß zwischen den beiden in § 7 eingeführten Vektoren die Relation $\mathfrak{a}' = -\frac{1}{2}\mathfrak{a}''$ besteht. Es bleibt demzufolge als ablenkender Vektor nur $\frac{1}{2}\mathfrak{a}''$ übrig. Berücksichtigt man weiter, daß L und l nur unendlich wenig voneinander und von geraden Linien abweichen können, so stellt sich heraus, daß die Richtungsänderung beim Übergang von $dl_{1(t_1)}$ zu $dl_{2(t_2)}$ der Änderung gleich ist, welche dl_1 infolge der Drehung in der Zeit $t_2 - t_1$ erleidet. Die Richtungen von $dl_{2(t_2)}$ und $dl_{1(t_2)}$ fallen daher zusammen, d. h. die Linie l ist eine gerade.

So weit ist also nichts gegen die Betrachtungen von Doppler und v. Oppolzer einzuwenden. Beide haben jedoch unberücksichtigt gelassen, daß die Wellennormale beim Übertritt aus dem ruhenden in den rotierenden Äther eine plötzliche Richtungsänderung erfährt. Diese Ablenkung, die sich aus dem Ergebnis des § 10 ableiten läßt, ist, wie sich weiter unten ergeben wird, in manchen Fällen beträchtlich größer als die „rotatorische Ablenkung“, von der allein bei Doppler und v. Oppolzer die Rede ist.

§ 15. Wir ersetzen Doppler's Annahme einer scharf begrenzten rotierenden Ätherhülle durch die allgemeinere, daß jede unendlich dünne kugelförmige, mit der Erdoberfläche konzentrische Schicht des Äthers als Ganzes rotiert mit einer Geschwindigkeit ω, die sich stetig mit der Entfernung r vom Mittelpunkt ändert. Ist a der Erdradius, so ist für $r = a$, $\omega = \Omega$; für $r = \infty$ ist $\omega = 0$.

Die Geschwindigkeitskomponenten sind jetzt

$$u = -y\omega, \quad v = +x\omega, \quad w = 0, \tag{11}$$

und die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit eines Raumelements

$$\lambda = -\frac{xz}{2r}\frac{d\omega}{dr}, \quad \mu = -\frac{yz}{2r}\frac{d\omega}{dr}, \quad \nu = \omega + \frac{1}{2}r\frac{d\omega}{dr} - \frac{z^2}{2r}\frac{d\omega}{dr}.$$

Dieselbe läßt sich also zerlegen in eine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_z = \omega + \frac{1}{2}r\frac{d\omega}{dr} \tag{12}$$

um die z-Achse und eine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_r = -\frac{1}{2}z\frac{d\omega}{dr} \tag{13}$$

um die vom Erdmittelpunkt nach der betrachteten Stelle führende Gerade.

Es kommt nun auf die Werte von $\frac{d\omega}{dr}$ an, namentlich darauf, ob das Intervall der Werte von r, in dem die Winkelgeschwindigkeit von Ω auf Null oder bis nahe auf Null herabsinkt, beträchtlich kleiner als der Erdradius, oder von derselben Größenordnung wie dieser ist. Legt man ω bis zu einer gewissen Höhe den konstanten Wert Ω bei, und läßt man die Dicke der Schicht, in der dann ferner die Abnahme erfolgt, kleiner werden, so nähert man sich dem von Doppler vorausgesetzten Fall. Um auch ein Beispiel von einer allmählichen Abnahme der Winkelgeschwindigkeit zu geben, habe ich ω der dritten Potenz der Entfernung r umgekehrt proportional gesetzt; es ist dies das Gesetz, nach welchem die Drehungsgeschwindigkeit abnimmt, wenn in einer sich bis ins Unendliche erstreckenden reibenden Flüssigkeit eine Kugel mit konstanter Geschwindigkeit um einen Durchmesser rotiert.

In diesen verschiedenen Voraussetzungen habe ich die Ablenkung von Lichtstrahlen, die in der Äquatorebene der Erde verlaufen, und den Einfluß der Erddrehung auf die Durchgangszeiten in einem Vertikalkreise, letzteres für einen beliebigen Beobachtungsort, berechnet.

§ 16. *Lichtstrahl in der Äquatorebene.* Der Beobachter befinde sich am Äquator, und der in der Äquatorebene stehende Himmelskörper habe die Zenithdistanz ζ, die wir positiv oder negativ nennen, je nachdem der Stern im Osten oder im Westen steht. Die tägliche Aberration zeigt sich jetzt als eine Änderung der Rektaszension R, und zwar entspricht dem ablenkenden Vektor $\mathfrak{a}'$ (§ 7) eine Änderung

$$\frac{a\Omega}{c}\cos\zeta.$$

Was den Vektor $\mathfrak{a}''$ betrifft, so ist zu bemerken, daß jetzt (§ 15) $\omega_r = 0$, und daß also die am Schluß des § 8 erwähnten Drehungen der Ele-

mente ds mit der Winkelgeschwindigkeit $2\omega_z$ um die z-Achse stattfinden. Die Gesamtänderung der Rektaszension beträgt demnach

$$\delta R = \frac{a\Omega}{c}\cos\zeta + \frac{2}{c}\int\left(\omega + \frac{1}{2} r\frac{d\omega}{dr}\right)ds, \tag{14}$$

wo über die volle Länge des Lichtstrahls zu integrieren ist und das erste Glied auf der rechten Seite der Fresnel'schen Aberration entspricht.

Es sei nun für einen Punkt des Lichtstrahls, s die Entfernung vom Beobachtungsorte und ψ der spitze Winkel, den die nach dem Erdmittelpunkt gezogene Gerade mit dem Strahle bildet; wir wollen diesem Winkel dasselbe Vorzeichen beilegen wie der Zenithdistanz ζ. Auf dem Strahl sind r und ω als Funktionen von s zu betrachten, und man findet leicht

$$\frac{dr}{ds} = \cos\psi, \quad \frac{d\omega}{ds} = \cos\psi\frac{d\omega}{dr}.$$

Weiter ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a\sin\zeta}{a\cos\zeta + s}, \quad \frac{d\psi}{ds} = -\frac{1}{r}\sin\psi,$$

und man erhält nach partieller Integration, wenn man annimmt, daß für $r = \infty$, $\operatorname{Lim}(r\omega) = 0$,

$$\int_0^\infty r\frac{d\omega}{dr}ds = \int_0^\infty \frac{r}{\cos\psi}\frac{d\omega}{ds}ds = -\frac{a\Omega}{\cos\zeta} - \int_0^\infty \omega(1 - \operatorname{tg}^2\psi)ds$$

$$= -\frac{a\Omega}{\cos\zeta} - \int_0^\infty \omega ds + a^2\sin^2\zeta\int_0^\infty \frac{\omega ds}{(a\cos\zeta + s)^2}.$$

Dies, in (14) eingesetzt, liefert

$$\delta R = -\frac{a\Omega\sin^2\zeta}{c\cos\zeta} + \frac{1}{c}\int_0^\infty \omega ds + \frac{a^2\sin^2\zeta}{c}\int_0^\infty \frac{\omega ds}{(a\cos\zeta + s)^2}. \tag{15}$$

Es ist jetzt leicht, zu der von Doppler und v. Oppolzer gemachten Voraussetzung überzugehen; man hat nur in den Integralen ω durch Ω zu ersetzen und als obere Grenze statt ∞ die Länge l des in der rotierenden Äthermasse vom Strahl zurückgelegten Weges zu nehmen. Es ergibt sich schließlich

$$\delta R = \frac{l\Omega}{c} - \frac{a^2\Omega\sin^2\zeta}{c(a\cos\zeta + l)}, \tag{16}$$

während nach der Fresnel'schen Theorie

$$\delta R_F = \frac{a\Omega\cos\zeta}{c}$$

wäre. Das erste Glied auf der rechten Seite von (16) stimmt mit der von v. Oppolzer berechneten Ablenkung überein; das zweite Glied repräsentiert die beim Eintritt in die bewegte Ätherhülle stattfindende Richtungsänderung. Man hätte denn auch die Formel in einfacherer Weise erhalten, wenn man das in § 10 Gefundene angewandt hätte.

Von Oppolzer hat die rotatorische Ablenkung $\frac{l\Omega}{c}$ für verschiedene Höhen der mitrotierenden Ätherhülle berechnet. Nimmt man diese Höhe zu 300 km[1]), so wird der größte Wert von l (für $\zeta = 90^0$) 2000 km, und die rotatorische Ablenkung 0″,10, während die Fresnel'sche tägliche Aberration den Betrag von 0″,32 (für $\zeta = 0$) erreichen kann. Der Unterschied hängt damit zusammen, daß l beträchtlich kleiner als der Erdradius ist. Dagegen wird das von v. Oppolzer übersehene letzte Glied in dem Ausdruck (16) für Sterne am Horizont: 1″,0, für $\zeta = 80^0$: 0″,64 und für $\zeta = 70^0$: 0″,43.

Eine ziemlich beträchtliche tägliche Aberration für tief stehende Sterne erhält man übrigens immer, wenn man annimmt, daß die Bewegung des Äthers sich nur bis zu einer kleinen Höhe erstreckt, auch dann, wenn ω stetig abnimmt. Man darf nämlich in diesem letzteren Fall den Faktor ω in den beiden Integralen der Gleichung (15) durch gewisse Mittelwerte $\eta\Omega$ und $\eta'\Omega$ (η und η' positive echte Brüche) ersetzen, und es ergibt sich, wenn man wieder als obere Grenze die Länge l des im rotierenden Äther durchlaufenen Weges einführt,

$$\delta R = \frac{\eta l \Omega}{c} - \frac{(1-\eta')\, a\Omega \sin^2\zeta}{c\cos\zeta} - \frac{\eta' a^2 \Omega \sin^2\zeta}{c(a\cos\zeta + l)}.$$

Bei kleinem l und großem ζ können hier die beiden letzten Glieder ziemlich beträchtliche Werte erreichen.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß bei fortwährender Abnahme von l die Änderung der Rektaszension sich dem Grenzwerte

$$\delta R = -\frac{a\Omega \sin^2\zeta}{c\cos\zeta} = -\operatorname{tg}^2\zeta \cdot \delta R_F$$

nähert.

Wenn dagegen die Entfernung von der Erde, bis auf welche der Äther merklich mitrotiert, mit dem Erdradius vergleichbar wird, dann ist die tägliche Aberration im allgemeinen von derselben Größenordnung wie die Fresnel'sche, obgleich sie einem ganz anderen Gesetze folgt als diese. Setzt man $\omega = \frac{a^2}{r^2}\Omega$ und führt den Winkel ψ, mit dem r nach der Formel

$$r = \frac{a \sin\zeta}{\sin\psi}$$

[1]) Es ist dies etwa die größte Höhe, in der die Luft auf eindringende Meteore einen merklichen Widerstand ausübt.

zusammenhängt, als Integrationsvariable ein, so erhält man aus (15)

$$\delta R = \frac{a\Omega\cos\zeta}{c} - \frac{a\Omega}{2c\cos^2\frac{1}{2}\zeta}.$$

Das erste Glied entspricht der Fresnel'schen Aberration. Die Formel zeigt, daß, wegen des zweiten Gliedes, die Änderung δR für gewisse Zenithdistanzen negativ sein würde.

§ 17. *Durchgangszeiten in einem Vertikalkreise.* Den Einfluß der täglichen Aberration auf diese Zeiten berechnet man am einfachsten, wenn man auf die Formeln (5) zurückgeht. Substituiert man die Werte (11) und beachtet, daß ω Funktion von r ist, so zerfallen die Größen p_1, p_2, p_3 je in zwei Teile, von denen einer $\frac{d\omega}{dr}$, der andere aber ω enthält. Man sieht sofort, daß die Glieder mit $\frac{d\omega}{dr}$ in (6) eingeführt, zusammen einen ablenkenden Vektor liefern, der in die Verbindungslinie von ds mit dem Erdmittelpunkt fällt, und also, da er in der Vertikalebene des Sternes liegt, keinen Einfluß auf die zu betrachtende Durchgangszeit haben kann. Wir dürfen daher p_1, p_2, p_3 durch

$$\omega\cos\beta, \quad -\omega\cos\alpha, \quad 0$$

ersetzen und die Größen

$$-\frac{\cos\beta}{c}\int_0^\infty \omega\, ds, \quad +\frac{\cos\alpha}{c}\int_0^\infty \omega\, ds, \quad 0$$

als Komponenten des ablenkenden Vektors betrachten. Die entsprechende Richtungsänderung läßt sich als eine Drehung des Lichtstrahls um die z-Achse von der Größe

$$\frac{1}{c}\int_0^\infty \omega\, ds$$

auffassen. Da nun die scheinbare tägliche Bewegung des Sternes in einer Rotation um dieselbe Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $-\Omega$ besteht, so ergibt sich für die Verspätung des Durchganges die einfache, für jeden Beobachtungsort geltende Formel

$$\delta t = \frac{1}{c\Omega}\int_0^\infty \omega\, ds, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

die ganz verschieden ist von dem Resultat, das man aus der Fresnelschen Theorie ableitet.

Legt man jetzt wieder die von Doppler und v. Oppolzer gemachte Voraussetzung zugrunde, oder nimmt man an, daß die all-

mählich abnehmende Bewegung des Äthers schon in ziemlich geringer Höhe unmerklich wird, dann kommt man jetzt durchaus nicht, wie in dem § 16 erörterten Fall, zu einem beträchtlichen Einfluß der Erdbewegung. Aus (17) folgt nämlich

$$\delta t = \frac{l}{c} \text{ oder } \delta t = \frac{\eta l}{c}, \tag{18}$$

wo η wieder ein gewisser echter Bruch ist. Diese Werte sind viel kleiner als die sich aus der Fresnelschen Theorie ergebenden.

Die Annahme $\omega = \frac{a^3 \Omega}{r^3}$ führt zu

$$\delta t = \frac{a}{2c\cos^2\frac{1}{2}\zeta}. \tag{19}$$

Daß das hierin ausgedrückte Gesetz von dem aus der Fresnelschen Annahme abgeleiteten erheblich abweicht, geht schon daraus hervor, daß nach letzterer die unteren Kulminationen durch die tägliche Aberration *verfrüht* werden, während (17) immer positiv ist.

Bemerkenswert, obwohl leicht erklärlich, ist es übrigens, daß die oben für δt angegebenen Werte (18) und (19) nicht von dem absoluten Werte von Ω abhängen.

Was die numerischen Werte der oben für δt gefundenen Ausdrücke betrifft, so ist zu bemerken, daß die in denselben auftretenden Faktoren $\frac{l}{c}$ und $\frac{a}{c}$ sehr klein sind; der letztere, welcher offenbar die Zeit bedeutet, in der das Licht eine dem Erdradius gleiche Strecke durchläuft, beträgt nur 0,02 Sek. Die Änderungen der Durchgangszeiten sind daher, ebenso wie die im vorhergehenden Paragraphen untersuchten Änderungen der Rektaszension sehr unbeträchtlich, und man darf überhaupt, wie mir scheint, kaum hoffen, den Einfluß der Erddrehung auf die scheinbaren Örter der Himmelskörper, es sei denn die tägliche Fresnelsche Aberration, oder Dopplers rotatorische Ablenkung, mit Gewißheit aus den Beobachtungen abzuleiten. Ich brauche hier bei dieser Frage, die v. Oppolzer ausführlich diskutiert hat, nicht zu verweilen.

§ 18. Doppler hat in seiner Abhandlung den von ihm hervorgehobenen Grundsatz zu vielen Schlüssen verwendet, von welchen hier nur noch der eine erwähnt werden möge, daß ein von einem Fixstern zu uns kommender Lichtstrahl, wenn er ganz nahe an dem Planeten Jupiter vorbeistreicht, von dem diesen Körper umgebenden Ätherwirbel mitgeführt werden müßte, wodurch eine scheinbare Verschiebung des Sternes entstehen würde. In der Vorraussetzung, daß sich der Beobachter sowohl wie auch der Fixstern in der Äquatorebene des Planeten

befindet, und indem er die Höhe des Ätherwirbels zu 8500 geogr. Meilen annimmt (der Radius des Planeten ist 9500 geogr. Meilen), schließt Doppler für einen die Oberfläche streifenden Lichtstrahl auf eine rotatorische Ablenkung von 27″. Auch hier jedoch hat er die Drehung der Wellen an der Grenze der rotierenden Äthermasse übersehen. In Wirklichkeit würden noch zwei Richtungsänderungen, die eine beim Eintritt in den Wirbel, die andre beim Austritt, stattfinden; diese sind von gleicher Größe und beide von entgegengesetzter Richtung wie Dopplers rotatorische Ablenkung. Zusammengenommen würden sie in dem soeben vorausgesetzten Fall 10″ betragen, so daß nur eine Ablenkung von 17″ übrig bliebe.

Nimmt man für die Höhe der rotierenden Ätherhülle einen kleineren Wert an, so tritt die Dopplersche Ablenkung immer mehr gegen die Richtungsänderungen an der Grenzfläche des Wirbels zurück.

Ich habe den Einfluß der Rotation von Jupiter auf den scheinbaren Ort eines benachbarten Fixsterns — den ich mir ebenso wie den Beobachter in der Äquatorebene des Planeten denke — auch für den Fall berechnet, daß die Bewegung des Äthers nach der Formel

$$\omega = \frac{a^3}{r^3}\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

vor sich gehen sollte (§ 15). Der ablenkende Vektor $\mathfrak{a}'$ (§ 7) verschwindet jetzt, da der Lichtstrahl den Wirbel wieder verläßt, und von den beiden Drehungen (12) und (13) bleibt nur die erste bestehen, weil in der Äquatorebene des Planeten $z = 0$ ist. Es ist ferner bei der Annahme (20)

$$\omega_z = -\frac{a^3}{2r^3}\Omega,$$

und die rotatorische Ablenkung besteht also darin (§ 8), daß jedes Element des Lichtstrahls eine Rotation

$$-\frac{a^3}{r^3}\Omega$$

um die Drehungsachse des Planeten erleidet. Das Resultat lautet wie folgt: Wenn man mit n die scheinbare Entfernung des Sternes vom Mittelpunkte des Planeten, dividiert durch den scheinbaren Radius dieses letzteren, bezeichnet, dann ist die scheinbare Verschiebung des Sternes

$$\frac{2\Omega a}{n^2 c},$$

oder, wenn man für den Jupiterradius a und die Winkelgeschwindigkeit Ω die numerischen Werte einsetzt,

$$\frac{17''}{n^2}.$$

Diese Verschiebung würde die entgegengesetzte Richtung wie die von Doppler berechnete haben (mit deren oben korrigiertem Wert sie zufälligerweise für $n = 1$ in Größe übereinstimmt); sie wäre immer nach Westen gekehrt, sowohl wenn der Stern rechts als auch wenn er links von Jupiter steht. Verschiebungen von einer solchen Größe müßten sich bei Sternbedeckungen durch Jupiter zeigen. Ich habe indes in den Messungen, die Struve[1]) bei einem solchen am 19. September 1903 stattgefundenen Vorgang gemacht hat, keine Spur von denselben gefunden, und dürfen wir somit schließen, daß in der Nähe von Jupiter eine der Formel (20) entsprechende Ätherbewegung *nicht* existiert. Auch eine Mitführung des Äthers nach irgendeinem anderen Gesetze erscheint nach dem Gesagten sehr unwahrscheinlich, es sei denn, daß man der mitrotierenden Ätherhülle eine so geringe Dicke zuschreiben wollte, daß diese Dicke, von der Erde aus gesehen, sich der Beobachtung entzöge.

§ 19. Bei Betrachtungen, wie denen des vorhergehenden Paragraphen erhebt sich eine Frage, auf die noch kurz einzugehen ich mir erlaube.

Denken wir uns einen unendlich weit entfernten Lichtpunkt, dessen Strahlen uns erreichen, nachdem sie nahe an dem Planeten Jupiter vorbeigegangen sind, und stellen wir uns den ringförmigen Teil einer von diesem Punkt ausgegangenen Wellenfront W vor, der in die den Planeten umgebende rotierende Äthermasse fällt. Die Geschwindigkeiten des Äthers in den verschiedenen Punkten dieses Teils sind sehr ungleich, und es wird daher von einem scharfen Bilde und einer bestimmten Ablenkung nur dann die Rede sein können, wenn der Teil W_0 der Wellenfront, von welchem die im Fernrohr zur Beobachtung kommende Lichtbewegung herrührt, im Vergleich mit dem Planeten sehr klein ist.

Zu einem Urteil über die Größe dieses wirksamen Teiles, wie man ihn nennen kann, führt nun folgende Erwägung. Nach dem Huygens'schen Prinzip kann man jeden Punkt der Wellenfront W als einen Lichtpunkt betrachten, der in der Bildebene des Fernrohrs eine gewisse Lichtverteilung, eine Diffraktionsfigur hervorruft, und zwar ist diese Figur, von den lichtschwachen Ringen abgesehen, ein kleiner Kreis mit verwaschenem Rande. Die in Wirklichkeit in irgendeinem Punkte der Bildebene bestehende Lichtbewegung ist das Resultat der Interferenz jener übereinander gelagerten Diffraktionsfiguren. Ist nun die Achse des Fernrohrs genau auf den Stern gerichtet, so sind die

[1]) H. Struve, Über die Bedeckung des Sternes BD. — 6°,6191 durch Jupiter, Astr. Nachrichten **164** (1903—1904), p. 83.

äußeren Punkte der Wellenfront W, die an dem Zustandekommen der Lichterregung in der Mitte des Sternbildes beteiligt sind, liegen, deren Diffraktionskreise noch gerade bis an den Hauptbrennpunkt des Objektivs reichen. Hieraus folgt, daß der wirksame Teil W' der Wellenfront sehr klein gegen den Planeten sein wird, wenn die genannten Diffraktionskreise viel kleiner als das Bild der Planetenscheibe sind, eine Bedingung, die bei einem guten Fernrohr erfüllt ist.

XVI.

Die Fortpflanzung von Wellen und Strahlen in einem beliebigen nicht absorbierenden Medium.

(1906).

§ 1. In den beiden letzten Abhandlungen ist wiederholt die Fortpflanzung der Lichtwellen mit Hilfe der bekannten Huygens'schen Konstruktion untersucht worden. Hat eine Welle zu einer bestimmten Zeit t die Front σ, dann beschreibt man um jeden Punkt dieser Fläche als Zentrum eine dem Zeitintervall dt entsprechende Elementarwelle; die einhüllende Fläche aller Elementarwellen liefert uns die Wellenfront σ' für die Zeit $t + dt$, und die Lichtstrahlen, d. h. die Linien, welche dazu dienen können, die seitliche Begrenzung eines Lichtbündels anzugeben, werden durch den Satz bestimmt, daß die Linie, welche den Mittelpunkt P einer Elementarwelle mit dem Punkte P' verbindet, in dem sie von der Fläche σ' berührt wird, ein Element eines Strahls ist.

Die theoretischen Betrachtungen, durch welche man gewöhnlich zu dieser Konstruktion und zu dem letzteren Satze gelangt, sind in mancher Hinsicht unbefriedigend, während die strenge Theorie, welche Kirchhoff in einer bekannten Abhandlung[1]) entwickelt hat, auf den einfachen Fall eines homogenen und ruhenden, isotropen und dispersionsfreien Mittels beschränkt bleibt. Es erscheint daher angemessen, hier eine für jedes beliebige Mittel ohne Absorption geltende Lösung des Problems mitzuteilen, die zwar ziemlich kompliziert aussehende mathematische Entwicklungen erfordert, aber trotzdem auf sehr einfachen Grundgedanken beruht. Es wird sich die volle Berechtigung der Huygens'schen Konstruktion und der daraus gezogenen Folgerungen ergeben, freilich nur, wie von vornherein zu erwarten war, für diejenigen Fälle, in welchen man von den Diffraktionserscheinungen absehen darf.

Auf die Natur der Lichtschwingungen und auf die speziellen Eigenschaften des Mediums brauchen wir nicht einzugehen. Wir können uns mit der Annahme begnügen, daß der Zustand in jedem vom Licht

[1]) Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen, Ann. d. Phys. u. Chem. 18 (1883), p. 663.

getroffenen Punkte durch eine gerichtete Größe, die wir den Lichtvektor nennen wollen, bestimmt ist, und daß die Komponenten ξ, η, ζ derselben, als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und der Zeit t aufgefaßt, einem System von drei linearen und homogenen partiellen Differentialgleichungen zu genügen haben, in welchen die Koeffizienten von der Natur des Mediums abhängen.

§ 2. Wir beschränken uns stets auf einfache Schwingungen und wollen mit dem einfachen Fall von ebenen Wellen, die sich in einem homogenen Medium ausbreiten, anfangen; sämtliche Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen sollen also konstant sein.

Zunächst betrachten wir nun eine Lösung der Differentialgleichungen, die eine Fortpflanzung seitlich unbegrenzter Wellen mit konstanter Intensität und von bestimmtem Polarisationszustand vorstellt. Diese Lösung lautet

$$\xi = a e^{n(t - \alpha x - \beta y - \gamma z)}, \quad \eta = p\xi, \quad \zeta = q\xi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo n, α, β, γ, a, p, q konstante Größen sind. Die erste derselben möge eine rein imaginäre Zahl sein, damit wir, wenn wir für ξ, η, ζ nur die reellen Teile der drei Ausdrücke nehmen, die bekanntlich an und für sich den Differentialgleichungen genügen, Formeln erhalten, welche einer Fortpflanzung einfacher Schwingungen entsprechen. Um die Bedeutung der drei Koeffizienten α, β, γ, die wir als reell voraussetzen, zu erkennen, setzen wir

$$\alpha = \frac{\alpha'}{v}, \quad \beta = \frac{\beta'}{v}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{v}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mit der Bedingung

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Man sieht leicht, daß dann α', β', γ' die Richtungskonstanten der Wellennormale sind und daß v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bedeutet. Ferner ist der Koeffizient a, der ebenfalls reell sein möge, die Amplitude der parallel zur x-Achse stattfindenden Schwingungen. Was p und q betrifft, so geben diese Größen, wenn sie reell sind, die Amplituden der beiden anderen Schwingungskomponenten im Verhältnis zu der Amplitude der ersten Komponente an. Sind sie aber, wie es in gewissen Fällen vorkommt, komplex, dann kann man aus ihren Werten nicht nur jene Amplitudenverhältnisse, sondern außerdem die Phasendifferenzen zwischen den Komponenten des Lichtvektors ableiten.

§ 3. Die angenommenen Ausdrücke haben die Eigenschaft, daß eine Differentiation derselben nach t, x, y, z einer Multiplikation mit

n, $-n\alpha$, $-n\beta$, $-n\gamma$ äquivalent ist. Wir erhalten daher, wenn wir sie in die Bewegungsgleichungen einsetzen und mit ξ, eventuell auch noch mit irgend einer Konstante dividieren, Formeln von der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} f_1 + g_1 p + h_1 q = 0, \\ f_2 + g_2 p + h_2 q = 0, \\ f_3 + g_3 p + h_3 q = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

wo die Koeffizienten f, g, h gewisse ganze rationale Funktionen von n, α, β, γ sind.

Aus diesen Gleichungen folgt nun durch Elimination von p und q

$$\begin{vmatrix} f_1, & g_1, & h_1 \\ f_2, & g_2, & h_2 \\ f_3, & g_3, & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Bei gegebenem n, d. h. bei gegebener Schwingungsfrequenz, ist die links stehende Determinante eine Funktion von α, β, γ, die wir mit $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ bezeichnen wollen und die, weil das Medium nicht absorbiert, nur reell oder rein imaginär sein kann. Die Gleichung selbst wird

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0; \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

sie setzt uns in den Stand, für jede Richtung der Wellennormale die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v zu berechnen.

Ferner können wir für jedes die Bedingung (6) erfüllende Wertsystem von α, β, γ aus (4) die mit p und q bezeichneten Verhältnisse von ξ, η, ζ ableiten. Um das Resultat kurz auszudrücken, führen wir die den Elementen f_1, g_1, h_1, f_2 usw. entsprechenden Unterdeterminanten von φ ein, indem wir setzen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f_1} = F_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial g_1} = G_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial h_1} = H_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} = F_2, \text{ usw.} \quad \ldots \quad (7)$$

Es ist sodann

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{G_1}{F_1} = \dfrac{G_2}{F_2} = \dfrac{G_3}{F_3}, \\ q = \dfrac{H_1}{F_1} = \dfrac{H_2}{F_2} = \dfrac{H_3}{F_3}. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Wir bemerken noch, daß sich für ein doppeltbrechendes Medium im allgemeinen aus den Gleichungen (6) und (8), bei gegebener Richtung der Wellennormale, *zwei* Wertsysteme v, p, q ergeben. Im folgenden fassen wir immer nur *eins* dieser Systeme ins Auge, wobei wir uns vorstellen, daß sich bei kontinuierlicher Variation von α', β', γ' auch v, p, q allmählich ändern. Abkürzungshalber sagen wir, daß bei gegebener Richtung der Wellennormale auch v, p, q bestimmt sind.

§ 4. So weit wurde angenommen, daß die Amplitude a im ganzen Raume denselben Wert hat. Was nun ein seitlich begrenztes Licht-

bündel betrifft, so ist zunächst klar, das ein solches nie vollkommen scharf abgeschnitten sein kann. Wir dürfen nicht etwa annehmen, daß die Ausdrücke (1) mit konstanten a, p, q im Inneren eines gewissen Zylinders gelten, während außerhalb dieses Raumes an allen Stellen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ wäre. Dies würde nämlich eine Diskontinuität involvieren, die in Wirklichkeit im Inneren des Mediums nicht bestehen kann.

Wir können indes untersuchen, ob vielleicht unsere Gleichungen eine Lösung zulassen, in der die Amplitude a an der zylindrischen Fläche nicht plötzlich, sondern allmählich von dem konstanten Wert, den sie im Inneren des Zylinders hat, auf Null herabsinkt. Zur Beantwortung dieser Frage zeigen wir, daß wirklich unter gewissen Bedingungen die oben für ξ, η, ζ aufgestellten Ausdrücke, auch wenn a von den Koordinaten abhängt, den Bewegungsgleichungen genügen können. Dabei wollen wir die Änderungen von a als so langsam voraussetzen, daß die auf einer der Wellenlänge gleichen Strecke stattfindende Änderung im Vergleich zu a selbst sehr klein ist.

Da, wenn $n = in'$ gesetzt wird, die Schwingungszeit $T = \frac{2\pi}{n'}$ beträgt, so folgt aus den Gleichungen (2), daß $n\alpha$ von der Größenordnung $\frac{2\pi\alpha'}{Tv}$, und also $\frac{1}{n\alpha}$ von derselben Größenordnung wie die Wellenlänge ist. Dasselbe gilt von $\frac{1}{n\beta}$ und $\frac{1}{n\gamma}$, und unsere Voraussetzung involviert daher, daß die Größen

$$\frac{1}{n\alpha a}\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{1}{n\beta a}\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n\alpha a}\frac{\partial a}{\partial y} \text{ usw.} \quad \ldots \quad (9)$$

sehr klein gegen die Einheit sind. Wir wollen in den weiteren Entwicklungen die Quadrate und Produkte derselben vernachlässigen.

Übrigens soll auch noch von anderen Größen angenommen werden, daß sie, ebenso wie a, „langsam veränderlich“ sind. Damit meinen wir immer, daß, wenn man um eine Wellenlänge fortschreitet, die Änderung im Vergleich zu der Größe selbst sehr wenig beträgt.

§ 5. Wenn man nun versucht, den Differentialgleichungen durch die Werte (1) mit einem variablen a zu genügen, so wird man dazu geführt, noch eine weitere Änderung mit diesen Ausdrücken vorzunehmen. Wir wollen uns vorstellen, daß die Verhältnisse $\frac{\eta}{\xi}$ und $\frac{\zeta}{\xi}$ jetzt etwas von den oben bestimmten Werten abweichen, so daß wir sie mit $p + p'$ und $q + q'$ bezeichnen können, wo p und q noch immer die Werte (8) haben. Da von den Zusatzgliedern p' und q' nur dann die Rede ist, wenn die Amplitude a von x, y, z abhängt, so dürfen wir, wegen der vorausgesetzten langsamen Veränderlichkeit von a an-

nehmen, daß p' und q' sehr klein gegen p und q sind, und zwar dürfen wir, wie sich in unseren Formeln bestätigen wird, $\frac{p'}{p}$ und $\frac{q'}{q}$ als von gleicher Größenordnung wie die Zahlen (9) betrachten. Was die Größen α, β, γ anbelangt, so wollen wir uns denken, daß bestimmte der Gleichung (6) genügende Werte für sie festgelegt werden. Wir richten also unsere Aufmerksamkeit auf Wellen von irgendeiner bestimmten Richtung und nehmen speziell für diese die Frage nach der Möglichkeit einer seitlichen Begrenzung in Angriff.

§ 6. Wir haben jetzt die Werte

$$\xi = a e^{n(t - \alpha x - \beta y - \gamma z)}, \quad \eta = (p + p')\xi, \quad \zeta = (q + q')\xi \quad . \quad . (10)$$

nach der Zeit und den Koordinaten zu differenzieren. Während die Differentiation nach t noch immer einer Multiplikation mit n äquivalent ist, hat man nicht mehr, wie früher,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -n\alpha\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -n\beta\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -n\gamma\xi,$$

sondern

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(-n\alpha a + \frac{\partial a}{\partial x}\right) e^{n(t - \alpha x - \beta y - \gamma z)} = -n\left(\alpha - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\xi, \quad (11)$$

und ebenso

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -n\left(\beta - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial y}\right)\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -n\left(\gamma - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial z}\right)\xi, \quad . \quad . (12)$$

wo, der oben gemachten Annahme zufolge, in den eingeklammerten Ausdrücken die letzten Glieder sehr klein gegen die ersten sind. Wenn wir nun die gefundenen Differentialquotienten ein zweites Mal nach einer der Koordinaten zu differenzieren haben, können wir die Größen $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial z}$ als konstant betrachten. Der vollständige Ausdruck für $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ist z. B.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -n\left(\alpha - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\cdot\xi \\ &= \left\{n^2\left(\alpha - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right\}\xi \quad . \quad . (13)\end{aligned}$$

Hier können wir zunächst das Glied

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 \xi,$$

(das sich übrigens bei Entwicklung der Formel gegen ein anderes fortheben würde) vernachlässigen, da sich, wenn man es durch das Hauptglied $n^2\alpha^2\xi$ dividiert, der Quotient

$$\frac{1}{n^2\alpha^2 a^2}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2$$

ergibt, welcher in bezug auf die Größen (9) von der zweiten Ordnung ist. Aber auch das Glied

$$\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\xi \qquad (14)$$

in (13) brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Wir dürfen nämlich annehmen, daß ebenso wie a selbst, auch die Größe $\frac{\partial a}{\partial x}$ nur langsam von Punkt zu Punkt veränderlich ist (§ 4), und daß also (14) sehr klein ist gegen den Ausdruck

$$\frac{n\alpha}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\xi,$$

der seinerseits sehr klein ist gegen das Hauptglied $n^2\alpha^2\xi$.

Wir können nun auch das letzte Glied in der Entwicklung von

$$\left(\alpha - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2$$

in (13) fortlassen, doch wollen wir das vorläufig nicht tun. Es kam uns zunächst nur darauf an, zu zeigen, daß man das Glied mit $\frac{\partial a}{\partial x}$ in der Formel (11) nicht aufs Neue zu differenzieren braucht. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn es sich um eine Differentiation nach y oder z handelt, und nicht nur von dem genannten Gliede in (11), sondern auch von den entsprechenden Gliedern in (12). In dieser Weise überzeugen wir uns davon, daß, auch wenn sie beliebig wiederholt wird, eine Differentiation nach x, y oder z stets einer Multiplikation mit

$$-n\left(\alpha - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial x}\right), \quad -n\left(\beta - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial y}\right), \text{ oder } -n\left(\gamma - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial z}\right)$$

äquivalent ist, ebenso wie sie früher in einer Multiplikation mit $-n\alpha$, $-n\beta$ oder $-n\gamma$ bestand.

§ 7. Das Gefundene setzt uns in den Stand anzugeben, welche Gestalt in der ersten Bewegungsgleichung die von ξ abhängigen Glieder annehmen. In § 3 fanden wir für diese, nach der dort genannten Division, eine gewisse Funktion f_1 von n, α, β, γ. Jetzt ergibt sich die entsprechende Größe, wenn wir in f_1 die Größen α, β, γ durch

$$\alpha - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \beta - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial y}, \quad \gamma - \frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial z}$$

ersetzen, d. h. wenn wir α, β, γ sich um

$$-\frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial x}, \quad -\frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial y}, \quad -\frac{1}{na}\frac{\partial a}{\partial z}$$

ändern lassen. Da nun diese Werte als unendlich klein betrachtet werden, so erhalten wir statt f_1

$$f_1 - \frac{1}{na}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial \gamma}\frac{\partial a}{\partial z}\right).$$

Mit den Gliedern f_2 und f_3 in der zweiten und dritten der Gleichungen (4) haben wir genau so zu verfahren, und Ähnliches gilt auch von denjenigen Gliedern in den Bewegungsgleichungen, welche Differentialquotienten von η oder ζ enthalten. Man hat nämlich zu beachten, daß zwar kein Grund besteht, die Größen p' und q' in (10) für konstant zu halten, daß jedoch auch diese Größen als langsam veränderlich gelten dürfen, und daß somit, da sie selbst bereits im Vergleich zu p und q sehr klein sind, von ihren Differentialquotienten abgesehen werden darf. Indem wir nun ferner, was die Differentialquotienten von ξ anbelangt, das Obengesagte beachten, erhalten wir für die von η abhängigen Glieder in der ersten Bewegungsgleichung nach der genannten Division, statt des früheren Ausdrucks $g_1 p$,

$$\left\{g_1 - \frac{1}{n\,a}\left(\frac{\partial g_1}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial \gamma}\frac{\partial a}{\partial z}\right)\right\}(p + p').$$

Hier dürfen wir nun noch die Produkte der kleinen Größe p' mit den Differentialquotienten von a vernachlässigen, so daß das Glied $g_1 p$ in (4) durch

$$g_1(p + p') - \frac{1}{n\,a}\left(\frac{\partial g_1}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial \gamma}\frac{\partial a}{\partial z}\right)p$$

zu ersetzen ist.

Die Bedingung, die man aus der ersten der drei Bewegungsgleichungen ableitet, lautet schließlich, wenn man zur Abkürzung für irgendeine von α, β, γ abhängige Größe χ

$$\frac{1}{n\,a}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial \gamma}\frac{\partial a}{\partial z}\right) = (D\chi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

setzt,

$$f_1 + g_1(p + p') + h_1(q + q') - (Df_1) - (Dg_1)p - (Dh_1)q = 0.$$

Hier können wir wegen der ersten der Formeln (4) die Glieder $f_1 + g_1 p + h_1 q$ fortlassen. Indem wir nun mit den beiden anderen Bewegungsgleichungen in derselben Weise verfahren, finden wir

$$\left.\begin{aligned} g_1 p' + h_1 q' - (Df_1) - (Dg_1)p - (Dh_1)q = 0, \\ g_2 p' + h_2 q' - (Df_2) - (Dg_2)p - (Dh_2)q = 0, \\ g_3 p' + h_3 q' - (Df_3) - (Dg_3)p - (Dh_3)q = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

§ 8. Soll diesen Gleichungen durch gewisse Werte der noch unbekannten Größen p' und q' genügt werden, so müssen die Differentialquotienten $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial z}$ die Bedingungen erfüllen, die man durch Elimination von p' und q' erhält. Mit Rücksicht auf (5) führen wir die Elimination in der Weise aus, daß wir die Gleichungen (16) der Reihe nach mit den Unterdeterminanten F_1, F_2, F_3 multiplizieren und sie

dann zueinander addieren. Indem wir dabei, was auf Grund von (8) gestattet ist, in der ersten Gleichung pF_1 und qF'_1 durch G_1 und H_1, in der zweiten pF_2 und qF_2 durch G_2 und H_2, und endlich in der dritten pF_3 und qF_3 durch G_3 und H_3 ersetzen, und (15) berücksichtigen, finden wir für den Koeffizienten von $\frac{\partial a}{\partial x}$ in der resultierenden Gleichung

$$-\frac{1}{na}\left(F_1\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}+F_3\frac{\partial f_3}{\partial \alpha}+G_1\frac{\partial g_1}{\partial \alpha}+G_2\frac{\partial g_2}{\partial \alpha}\right.$$
$$\left.+G_3\frac{\partial g_3}{\partial \alpha}+H_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha}+H_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}+H_3\frac{\partial h_3}{\partial \alpha}\right),$$

wofür sich, wegen der in (7) angegebenen Bedeutung von F_1, F_2, F_3, G_1 usw. schreiben läßt

$$-\frac{1}{na}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Die Koeffizienten von $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial z}$ nehmen ähnliche Formen an und die gesuchte Bedingung wird schließlich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\frac{\partial a}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Sobald sie erfüllt ist, kann man p' und q' aus (16) berechnen, und haben wir also wirklich aus unseren Ansätzen eine Lösung der Bewegungsgleichungen abgeleitet.

§ 9. Um die Bedeutung des Resultates zu verstehen, bemerken wir, daß bei festgesetzten α, β, γ die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$ ganz bestimmte Werte haben. Führen wir nun eine gerade Linie s ein, deren Richtungskonstanten sich wie diese Differentialquotienten verhalten, so drückt die Gleichung (17) aus, daß sich die Amplitude a längs einer Linie von der Richtung s nicht ändert.

Im übrigen bleiben die Änderungen, welche sie von Punkt zu Punkt erleidet, völlig unbestimmt. Wir können z. B. in den verschiedenen Punkten einer Ebene mit der Gleichung

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ganz beliebige Werte für sie annehmen, vorausgesetzt nur, daß wir nicht mit der Bedingung der langsamen Veränderlichkeit in Widerspruch geraten; in allen anderen Punkten des Raumes ergibt sich dann der Wert von a aus dem soeben Gefundenen, und wir können somit sagen, daß sich auf jeder zu s parallelen Linie die Schwingungen mit konstant bleibender Amplitude fortpflanzen.

Wir wollen uns, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, in der Ebene (18) zwei geschlossene Linien l und l' vorstellen, deren zweite die erste umgibt, so daß zwischen beiden ein ringförmiger Teil R der Ebene liegt. Die Breite dieses Teils sei sehr groß im Vergleich mit der Wellenlänge und zu gleicher Zeit klein gegen die Dimensionen der durch l begrenzten inneren Fläche E. Wir wollen annehmen, daß die Amplitude a in dieser letzteren überall einen gewissen konstanten Wert a_0 hat, daß sie aber außerhalb l' Null ist und in dem Ringe R allmählich von a_0 in Null übergeht. Unsere die Amplitude betreffenden Voraussetzungen sind dann erfüllt und, wenn Z und Z' zwei Zylinder sind, deren erzeugende Linien die oben bestimmte Richtung s haben, und deren Grundlinien l bzw. l' sind, so können wir schließen, daß die Lichtbewegung im Inneren von Z eine konstante, durch a_0 bestimmte Intensität J_0 hat, daß es außerhalb Z' gar kein Licht gibt, und daß in dem Zwischenraum die Intensität stetig von J_0 in Null übergeht. Wegen der Kleinheit der Wellenlänge kann nun die Breite des Ringes R in manchen Fällen so klein im Vergleich zu den Dimensionen unserer Apparate oder sonstiger Gegenstände genommen werden, daß man in erster Annäherung von der Übergangsschicht zwischen Z und Z' absehen und von einem scharf begrenzten Lichtbündel sprechen kann. Wir fügen noch hinzu, daß in jedem einzelnen Fall die aus (16) abgeleiteten Werte von p' und q' dazu würden dienen können, die Lichtbewegung in der Übergangsschicht genauer zu untersuchen. Innerhalb des Zylinders Z ist $p' = 0$, $q' = 0$. Hier bestehen zwischen den Werten von ξ, η, ζ die für ein seitlich unbegrenztes Bündel gefundenen Verhältnisse (8).

§ 10. Nachdem wir hiermit die Richtung der Lichtstrahlen durch die Linie s bestimmt haben, ist noch zu untersuchen, wie sie mit der Richtung der Wellen zusammenhängt. Zu diesem Zwecke entnehmen wir zunächst den Gleichungen (1), daß bei seitlich unbegrenzten Wellen die Schwingungsphase, die in einem bestimmten Augenblick in der durch den Koordinatenursprung gehenden Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

besteht, sich nach einer Zeiteinheit in der Ebene mit der Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

befindet. Wir wollen dies dadurch ausdrücken, daß wir sagen, die Wellenfront (19) habe sich in der Zeiteinheit bis in die Lage (20) fortgepflanzt.

Wenn wir nun, bei festgehaltenem n, für α, β, γ der Reihe nach alle mit der Gleichung (6) verträglichen Werte nehmen, so repräsen-

tiert (19) alle durch O in verschiedenen Richtungen gelegten ebenen Wellenfronten und (20) die Ebenen, bis zu welchen diese sich in der Zeiteinheit fortgepflanzt haben. Die einhüllende Fläche aller dieser Ebenen ist die sogenannte, um O als Mittelpunkt gelegte **Wellenfläche**, und nach der **Huygens**'schen Konstruktion wird nun die Richtung des zu einer bestimmten Wellenfront gehörenden Lichtstrahls durch die Linie gegeben, welche O mit demjenigen Punkt S verbindet, in welchem die Wellenfläche von der betrachteten Wellenfront in ihrer neuen durch (20) bestimmten Lage berührt wird.

Zu demselben Schluß führt nun auch sofort die hier entwickelte Theorie. Aus der Gleichung (20) ersieht man nämlich, daß die Koeffizienten α, β, γ die reziproken Werte der durch die Ebene von den Koordinatenachsen abgeschnittenen Stücke sind; α, β, γ sind also das, was man gewöhnlich die **Koordinaten** der Ebene nennt, und die Formel (6), die eine für alle Berührungsebenen der Wellenfläche geltende Beziehung ausdrückt, ist die Gleichung dieser Fläche in Ebenenkoordinaten. Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie sind daher die Koordinaten des Berührungspunktes S den Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$$

proportional. Folglich hat OS die Richtung der in § 9 eingeführten Linie s.

§ 11. Wir wollen auch noch die Fortpflanzung **gekrümmter** Wellenfronten untersuchen, wobei wir indes die Annahme machen, daß die Krümmungsradien derselben sehr groß gegen die Wellenlänge λ sind. Einen für diesen Fall passenden Ansatz erhalten wir, wenn wir die Exponentialgröße

$$e^{n(t - \alpha x - \beta y - \gamma z)}$$

durch

$$\omega = e^{n[t - \chi(x, y, z)]} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

ersetzen, wo χ eine Funktion der Koordinaten ist, die wir alsbald noch etwas näher bestimmen werden. Die Gleichung einer Wellenfront, d. h. einer Fläche, in der überall eine bestimmte Phase besteht, hat dann die Form

$$\chi(x, y, z) = C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

und man erhält die sukzessiven Wellenfronten, wenn man die Konstante C sich allmählich ändern läßt.

Es sind nun zunächst die Größen zu betrachten, die aus (21) durch wiederholte Differentiation nach den Koordinaten entstehen. Bei einmaliger Differentiation ergibt sich

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = - n \frac{\partial \chi}{\partial x} \omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = - n \frac{\partial \chi}{\partial y} \omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = - n \frac{\partial \chi}{\partial z} \omega \quad . \quad . \quad (23)$$

und hieraus folgt, da $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}$ von der Größenordnung

$$\frac{\omega}{\lambda}$$

sind, daß $\frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}, \frac{\partial \chi}{\partial z}$ von der Ordnung $\frac{1}{n\lambda}$ sein müssen.

Wir untersuchen jetzt, wie sich die Richtungskonstanten der Normale vom einen Punkt der Fläche (22) zum andern ändern. Sind die Krümmungsradien von der Ordnung ϱ, dann sind die Änderungen der Richtungskonstanten, wenn man ein Linienelement ds durchläuft, von der Größenordnung $\frac{ds}{\varrho}$. Anderseits folgt aus den Werten der Richtungskonstanten, nämlich

$$\frac{\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2\right\}}}, \text{ usw.,}$$

daß ihre soeben genannten Änderungen von der Größenordnung

$$\frac{\chi''}{\chi'} ds$$

sind, wenn man mit χ' einen der ersten und mit χ'' einen der zweiten Differentialquotienten von χ bezeichnet. Wenden wir nun das Zeichen (=) an, um die Gleichheit der Größenordnung auszudrücken, so finden wir

$$\frac{\chi''}{\chi'} (=) \frac{1}{\varrho}$$

und $\chi'' \lambda (=) \frac{\lambda}{\varrho} \chi'$. Dies zeigt, da $\frac{\lambda}{\varrho}$ ein sehr kleiner Bruch ist, daß die ersten Differentialquotienten von χ langsam veränderliche Größen in dem in § 4 angegebenen Sinne sind. Dagegen ist die Funktion ω selbst rasch veränderlich, da für ihre ersten Differentialquotienten ω' gilt

$$\omega' \lambda (=) \omega .$$

Wir dürfen annehmen, daß auch die Krümmungsradien und, wenn man sie als Funktionen der Koordinaten auffaßt, ihre sämtlichen Abgeleiteten langsam veränderlich sind. Dieselbe Eigenschaft haben daher auch nicht nur die ersten, sondern auch die zweiten und alle höheren Differentialquotienten von χ.

§ 12. Es ist nun zu beachten, daß man, wenn man die Größen (23) beliebig oft nach x, y oder z differenziert, und dabei immer wieder $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}$ durch die Werte (23) ersetzt, Ausdrücke erhält, in wel-

chen der Faktor ω stets mit langsam veränderlichen Größen multipliziert ist. Bei jeder neuen Differentiation wird nun das Glied, das aus der Differentiation des Faktors ω hervorgeht, viel größer sein als der Anteil, den man wegen der Veränderlichkeit des mit ω multiplizierten Faktors erhält. Wir gelangen deshalb zu angenäherten Lösungen unseres Problems, wenn wir uns, was die Differentiation der langsam veränderlichen Größen betrifft, mehr oder weniger beschränken.

Auch die Amplituden, mit welchen wir (21) zu multiplizieren haben, um die Werte von ξ, η, ζ zu erhalten, sind langsam veränderliche Größen. Insofern die Änderung derselben mit der seitlichen Begrenzung eines Lichtbündels zusammenhängt, folgt dies aus der früheren Annahme, die wir auch jetzt aufrecht erhalten wollen, daß an der Grenze des Bündels die Intensität nicht plötzlich, sondern in einer Übergangsschicht, deren Dicke sehr viele Wellenlängen beträgt, auf Null herabsinkt. Aber auch die Änderung der Amplitude, die bei der jetzt gemachten Voraussetzung dadurch bedingt wird, daß bei der Fortpflanzung einer Wellenfront die Lichtbewegung sich über einen größeren Flächenraum verbreitet oder in einen kleineren zusammengedrängt wird, dürfen wir wegen unserer Voraussetzung in bezug auf die Krümmungsradien als langsam betrachten. Die Formeln, die wir für diese Änderung finden werden, werden dies bestätigen.

§ 13. Wenn wir gänzlich von der Veränderlichkeit der langsam veränderlichen Größen absehen, dürfen wir in den Formeln

$$\xi = a e^{n[t-\chi(x,y,z)]}, \quad \eta = p\xi, \quad \zeta = q\xi, \tag{24}$$

die wir jetzt an die Stelle von (1) treten lassen, a, p und q als konstant betrachten und die Differentiationen nach x, y, z durch Multiplikation mit $-n\frac{\partial\chi}{\partial x}$, $-n\frac{\partial\chi}{\partial y}$, $-n\frac{\partial\chi}{\partial z}$ ersetzen. Indem wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial\chi}{\partial z} = \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \tag{25}$$

setzen, kommen wir dann wieder genau zu den früheren in § 3 abgeleiteten Formeln zurück. Die Werte von α, β, γ müssen der Bedingung (6) genügen und die Verhältniszahlen p und q sind den Gleichungen (8) zu entnehmen.

Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, daß das hier Gesagte darauf hinausläuft, daß ein Stück einer Welle, so klein, daß es als eben betrachtet werden kann, sich nach dem für eine ebene Welle von der betreffenden Richtung geltenden Gesetz fortpflanzt.

Wenn man in die Gleichung (6) für α, β, γ die Werte (25) einsetzt, so verwandelt sie sich in eine Differentialgleichung, durch welche

die Funktion χ und also die Gestalt der Wellenfronten näher bestimmt wird. Es geschieht dies in der Weise, daß aus einer beliebig angenommenen Lage der Wellenfront die sukzessiven weiteren Lagen abgeleitet werden können.

Wir können nämlich auch jetzt, da unter α, β, γ die Größen (25) zu verstehen sind, die Formeln (2) und (3) benutzen. Offenbar sind dann α', β', γ' die Richtungskonstanten der Wellennormale. Für jede Richtung dieser letzteren liefert die Gleichung (6), nachdem man in ihr die Substitution (2) gemacht hat, einen bestimmten Wert von v und dieser Wert ist eben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche einer ebenen Welle mit der Normale (α', β', γ') zukommen würde.

Aus den Gleichungen (24) ersieht man nun sofort, daß die Phase, welche zur Zeit t in einer Wellenfront σ mit der Gleichung

$$\chi(x, y, z) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

besteht, zur Zeit $t + dt$ in einer Fläche σ' mit der Gleichung

$$\chi(x', y', z') = C + dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

angetroffen wird. Es sei P ein beliebiger Punkt von σ, und Q der Punkt, in welchem die in P gezogene Normale der ersten Fläche die zweite Fläche schneidet. Wir bezeichnen mit x, y, z die Koordinaten von P, mit ds die Länge PQ und also mit

$$x' = x + \alpha' ds, \quad y' = y + \beta' ds, \quad z' = z + \gamma' ds$$

die Koordinaten von Q. Da nun diese Werte der Gleichung (27) zu genügen haben, so ist

$$\chi(x, y, z) + \frac{\partial \chi}{\partial x}\alpha' ds + \frac{\partial \chi}{\partial y}\beta' ds + \frac{\partial \chi}{\partial z}\gamma' ds = C + dt$$

und folglich, wenn man (26), (25), (2) und (3) berücksichtigt,

$$ds = v\,dt.$$

Aus der Lage σ der Wellenfront erhält man also die der Zeit $t + dt$ entsprechende neue Lage σ' dadurch, daß man von jedem Punkt von σ aus die Normale zieht, und auf jeder Normale ein Stück von der Länge $v\,dt$ abschneidet, wobei sich v wegen der Richtungsveränderung der Normale von Punkt zu Punkt ändern kann. Daß nun diese Konstruktion im Grunde mit der Huygens'schen übereinstimmt, wird man leicht sehen.

§ 14. Wir wollen jetzt den Einfluß der Wellenkrümmung näher untersuchen und zu gleicher Zeit der Veränderlichkeit der Amplituden Rechnung tragen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\xi = a e^{n[t - \chi(x, y, z)]}, \quad \eta = (p + p')\xi, \quad \zeta = (q + q')\xi, \qquad (28)$$

wobei wir unter χ eine der Differentialgleichung (6) genügende Funktion verstehen wollen, so daß wir noch immer auf die im letzten Paragraphen angegebene Weise die eine Lage einer Wellenfront aus der anderen ableiten können. Unter p und q verstehen wir die durch die Gleichungen (4) bestimmten Werte (8); in den darin vorkommenden Unterdeterminanten haben wir, ebenso wie in der Determinante φ selbst, für α, β, γ die Werte (25) zu setzen.

Wenn wir nun die Ausdrücke (28) nach x, y, z differenzieren, wie es geschehen muß, wenn wir sie in die Bewegungsgleichungen einführen, so können wir aus dem in § 7 angegebenen Grunde p' und q' als konstant behandeln und uns, was die Amplitude a betrifft, mit der früher motivierten Beschränkung auf die ersten Potenzen ihrer ersten Differentialquotienten begnügen. Es treten jetzt aber noch neue Glieder auf, die sich bei der Differentiation von p und q in den Ausdrücken (28) und von

$$\omega = e^{n[t - \chi(x, y, z)]}$$

ergeben. Ebenso wie a sollen nämlich auch die langsam veränderlichen Faktoren $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$, $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ in den Gleichungen (23) nicht mehr als konstant betrachtet werden. Indes wollen wir diese Faktoren, die auch in p und q auftreten, da die letzteren Größen nach (8) von α, β, γ abhängen, nur einmal nach den Koordinaten differenzieren, da, wie wir sahen, jede weitere Differentiation zu Gliedern führen würde, die im Vergleich mit den Hauptgliedern, in welchen jedesmal nur ω selbst differenziert ist, so klein sind, daß sie vernachlässigt werden dürfen. Die höchsten in den Endgleichungen vorkommenden Differentialquotienten von χ sind also von der zweiten Ordnung, und zwar gilt dies, gleichviel welcher Ordnung die ursprünglichen Differentialgleichungen sein mögen.

Überdies werden wir alle Glieder fortlassen, in welchen diese mit der Krümmung der Wellen zusammenhängenden Größen $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$ usw. mit den kleinen Größen

$$\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}, p', q'$$

multipliziert sind.

§ 15. Man sieht nun leicht, daß schließlich in den drei aus den Bewegungsgleichungen hervorgehenden Formeln alle Glieder ξ als Faktor enthalten, so daß diese Größe bei der in § 3 genannten Division herausfällt, und ferner, daß dreierlei Glieder entstehen.

1. Diejenigen, zu welchen man gelangt, wenn man alle langsam veränderlichen Größen als konstant behandelt und von p' und q' in (28) absieht. Diese Glieder fallen fort, weil die Ausdrücke (24) unter den in § 13 gemachten Annahmen den Bewegungsgleichungen genügen.

2. Die Glieder mit p' und q'.

3. Die Glieder mit $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial z}$, nämlich die Größen $-(Df_1)$ usw. in den Gleichungen (16).

4. Die Glieder mit den zweiten Differentialquotienten von χ, die außerdem noch α, β, γ und zwar in sehr verschiedener Weise enthalten können.

Indem wir diese letzteren Glieder in die Bezeichnungen A_1, A_2, A_3 zusammenfassen, nehmen die definitiven Formeln folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + g_1 p' + h_1 q' - (Df_1) - (Dg_1)p - (Dh_1)q = 0\,, \\ A_2 + g_2 p' + h_2 q' - (Df_2) - (Dg_2)p - (Dh_2)q = 0\,, \\ A_3 + g_3 p' + h_3 q' - (Df_3) - (Dg_3)p - (Dh_3)q = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (29)$$

Wir können nun ferner genau so wie in § 8 verfahren. Bei Multiplikation mit F_1, F_2, F_3 und nachheriger Addition erhalten wir statt der Formel (17)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\frac{\partial a}{\partial z} = na(F_1 A_1 + F_2 A_2 + F_3 A_3); \quad . \quad (30)$$

sobald dieser genügt ist, können p' und q' aus (29) berechnet werden.

§ 16. Um die Bedeutung von (30) zu erklären, fassen wir einen bestimmten Punkt P der Fläche σ ins Auge, mit welcher eine Wellenfront zur Zeit t zusammenfällt, leiten aus dieser mittels der Konstruktion von Elementarwellen die der Zeit $t + dt$ entsprechende Wellenfront σ' ab und nennen P' den Punkt, in welchem dieselbe die um P beschriebene Elementarwelle berührt. Wiederholen wir dieselbe Konstruktion für weitere unendlich kleine Zeiten und verbinden wir P mit P', P' mit dem Punkte P'', in dem die um P' beschriebene Elementarwelle von der Wellenfront in ihrer dritten Lage berührt wird, usw., dann erhalten wir eine gewisse Linie s, von der wir in einem folgenden Paragraphen zeigen werden, daß sie, wegen der Homogenität des Mittels, eine Gerade ist. Es ist klar, daß sich durch jeden Punkt von σ eine derartige Linie s ziehen läßt; wir wollen sie als Strahl bezeichnen, mit dem Vorbehalt, diesen Namen alsbald zu rechtfertigen.

Die Richtung des Strahlelementes PP' wird nur unendlich wenig geändert, wenn man P' durch den Punkt ersetzt, in welchem die um P beschriebene Elementarwelle nicht durch die Wellenfront σ', sondern durch eine Ebene berührt wird, welche der Wellenfront σ in P parallel läuft und deren Normale also die Richtungskonstanten α', β', γ' hat. Kleidet man die Konstruktion, welche uns das Strahlelement PP' liefert, auf diese Weise ein, so ist sie dieselbe Konstruktion, nur in verkleinertem Maßstab, die uns früher (§ 10) den Strahl OS geliefert

hat. Bei dieser letzteren waren die Koordinaten von S den Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$ proportional. Sie hatten also, da S auch in der Ebene (20) lag, die Werte

$$x = \frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad y = \frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad z = \frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma},$$

wo

$$N = \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

ist. Bezeichnet man nun die Länge von OS, die sogenannte Geschwindigkeit des Strahls mit u, so sind die Richtungskonstanten von OS, und also auch diejenigen des Elementes $PP' = ds$ in der jetzt benutzten Figur

$$\alpha'' = \frac{1}{Nu}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \beta'' = \frac{1}{Nu}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \gamma'' = \frac{1}{Nu}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}.$$

Die linke Seite von (30) beträgt somit

$$Nu\left(\alpha''\frac{\partial a}{\partial x} + \beta''\frac{\partial a}{\partial y} + \gamma''\frac{\partial a}{\partial z}\right) = Nu\frac{\partial a}{\partial s},$$

und es wird

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{n}{Nu}(F_1 A_1 + F_2 A_2 + F_3 A_3)a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

eine Gleichung, durch welche die Art und Weise, wie sich die Amplitude auf einem Strahl s von Punkt zu Punkt ändert, bestimmt wird. Hat man die aufeinanderfolgenden Wellenfronten und den Lauf eines Strahls nach der Huygens'schen Konstruktion ermittelt und durch Ausführung aller im obigen angegebenen Berechnungen F_1, F_2, F_3, A_1, A_2, A_3, N und u gefunden, so kennt man in jedem Punkte des Strahles die Größe

$$\frac{n}{Nu}(F_1 A_1 + F_2 A_2 + F_3 A_3).$$

Wir können diese daher mit $\psi(s)$ bezeichnen, wenn s die von einem Punkte P der ursprünglichen Wellenfront ab gemessene Strahllänge ist, und haben dann

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \psi(s) \cdot a$$

$$a = a_0 e^{\int_0^s \psi(s)\, ds}.$$

Hier ist a_0 die Amplitude im Punkte P.

Wir erinnern daran, daß von dieser Änderung von a längs eines Strahls nur dann die Rede ist, wenn die Wellenfronten gekrümmt sind. Bei ebenen Wellen hat man $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ und in jedem Punkt des Strahls $a = a_0$.

§ 17. Bei den gekrümmten Wellen bleiben nun wieder, ebenso wie bei den früheren Planwellen, die Änderungen der Amplitude a in der Wellenfront, stets vorausgesetzt, daß diese Änderungen langsame seien, völlig unbestimmt. Insofern nun, ganz abgesehen von der Intensität der Gleichgewichtsstörung in den anderen Punkten von σ, der Wert von a_0 in P die Amplitude in den weiteren Punkten des durch P gehenden Strahls bestimmt, kann man füglich von einer dieser Linie entlang stattfindenden Fortpflanzung sprechen. Daß ferner eine Fläche, deren erzeugende Linien Strahlen sind, in genau demselben Sinne wie der früher (§ 9) betrachtete Zylinder Z die seitliche Begrenzung eines Bündels bilden kann, braucht nicht weiter erklärt zu werden. Damit hat die Benennung „Strahl" für die Linie s ihre Rechtfertigung gefunden.

§ 18. Wir haben jetzt noch zu zeigen, daß, wie bereits gesagt wurde, in einem homogenen Mittel die Strahlen immer, auch bei irgendwie gekrümmten Wellenfronten, gerade Linien sind. Zu diesem Zwecke bemerke ich, daß zu jeder gegebenen Richtung der Wellennormale eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Geschwindigkeit u des Strahls gehören, und daß man (vgl. § 16) von einer Wellenfront σ zu der benachbarten σ' dadurch übergehen kann, daß man von jedem Punkte P von σ aus eine Linie in der der Wellennormale in P entsprechenden Strahlrichtung zieht und von dieser ein unendlich kleines Stück $PP' = u\,dt$ abschneidet. Der geometrische Ort der Punkte P' ist dann die neue Wellenfront.

Sind x, y, z die Koordinaten von P, so werden nach den in § 16 angeführten Formeln die Koordinaten von P' durch die Gleichungen

$$x' = x + \frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dt, \quad y' = y + \frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}dt, \quad z' = z + \frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}dt$$

bestimmt.

Es sei nun Q ein beliebiger in unendlich kleiner Entfernung von P liegender Punkt der Fläche σ, und Q' der Punkt, wo σ' von dem durch Q gehenden Strahl geschnitten wird. Bezeichnen wir die Änderungen, welche verschiedene Größen bei dem Übergange von P, P' nach Q, Q' erleiden, mit einem vorgesetzten d, so ist nach den vorhergehenden Formeln

$$dx' = dx + d\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)dt, \quad dy' = dy + d\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)dt,$$

$$dz' = dz + d\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right)dt.$$

Daß nun das folgende Element $P'P''$ des Strahls dieselbe Richtung wie PP' hat und also der Strahl eine gerade Linie ist, wird bewiesen sein, wenn gezeigt wird, daß die Fläche σ' in P' der Fläche σ in P

parallel läuft. Um uns hiervon zu überzeugen, brauchen wir nur zu beweisen, daß für alle möglichen Verschiebungen PQ in der Fläche σ, d. h. für alle Werte von dx, dy, dz, welche der Bedingung

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

genügen, auch

$$\alpha dx' + \beta dy' + \gamma dz' = 0$$

ist. Dies folgt aber daraus, daß

$$\alpha d\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) + \beta d\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) + \gamma d\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right),$$

wofür wir auch schreiben können

$$d\left\{\frac{1}{N}\left[\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right]\right\} - \frac{1}{N}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}d\gamma\right),$$

stets Null ist. Das erste Glied des letzteren Ausdrucks verschwindet nämlich wegen der Gleichung (31), und das zweite wegen der Gleichung (6).

Zu einem noch einfacheren Beweis führt ein Satz, der sich sofort aus der Huygens'schen Konstruktion ergibt[1]), und nach welchem unter allen zwei Punkte A und B verbindenden Linien s, der Strahl diejenige ist, für welche das Integral

$$\int \frac{ds}{u}$$

ein Minimum wird. Aus diesem Theorem, in welchem man unter u die Geschwindigkeit eines mit ds zusammenfallenden Strahls zu verstehen hat, folgt sofort, daß es, was den Lauf eines von A nach B gehenden Strahles betrifft, einerlei ist, ob A ein Punkt einer bereits vorhandenen Wellenfront, oder selbst Schwingungsmittelpunkt ist. Für diesen letzteren Fall führt aber die Huygens'sche Konstruktion zu geschlossenen Wellenfronten, die unter sich ähnlich sind und A zum Ähnlichkeitszentrum haben. Die aufeinanderfolgenden Punkte eines Strahls haben ähnliche Lagen auf diesen Flächen und liegen somit auf einer von A ausgehenden geraden Linie.

Es ist bemerkenswert, daß wir jetzt in einem homogenen Mittel aus einer beliebig gegebenen Wellenfront σ direkt die Lage σ' ableiten können, die sie nach einer *endlichen* Zeit τ einnimmt. Man braucht nur aus jedem Punkte von σ einen Strahl zu ziehen und ein Stück $u\tau$ darauf abzuschneiden.

§ 19. Es wird nicht überflüssig sein, die gefundenen Resultate an einem Beispiel zu erläutern. Als solches wählen wir die Ausbreitung sphärischer Schallwellen in einem homogenen Gase. Wir ver-

[1]) Vgl. Art. XIV dieser Sammlung, § 12.

stehen also unter ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten der schwingenden Gasteilchen und gehen aus von den bekannten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=0, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

in welchen k eine positive Konstante ist. Substituieren wir hier die Werte (24) und betrachten wir zunächst α, β, γ, a, p, q als Konstanten, dann ergeben sich nach Division mit $n^2\xi$ Gleichungen von der Form (4), in welchen die Koeffizienten folgende Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} & f_1=\alpha^2-\frac{1}{k^2}, && g_1=\alpha\beta, && h_1=\alpha\gamma, \\ & f_2=\beta\alpha, && g_2=\beta^2-\frac{1}{k^2}, && h_2=\beta\gamma, \\ & f_3=\gamma\alpha, && g_3=\gamma\beta, && h_3=\gamma^2-\frac{1}{k^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (34)$$

Hieraus folgt für die Determinante φ (§ 3)

$$\varphi=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{k^4}-\frac{1}{k^6}. \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

Die Gleichung (6) wird daher

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{k^2} \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

oder, wenn wir die Werte (2) benutzen,

$$v=k,$$

so daß die Wellenfläche eine Kugel wird. Der Strahl fällt mit der Wellennormale zusammen, und auch die Geschwindigkeit des Strahls hat den Wert

$$u=k.$$

Ferner finden wir, indem wir (36) berücksichtigen, für die Unterdeterminanten von φ

$$F_1=\frac{\alpha^2}{k^2}, \quad F_2=\frac{\alpha\beta}{k^2}, \quad F_3=\frac{\alpha\gamma}{k^2} \text{ usw.,}$$

und schließen dann aus (8)

$$p=\frac{\beta}{\alpha}, \quad q=\frac{\gamma}{\alpha}, \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

so daß die Schwingungen senkrecht zur Wellenfront stehen müssen.

Die in § 13 angedeutete Konstruktion zeigt nun, daß, wenn eine Wellenfront kugelförmig ist, die übrigen es gleichfalls sind. Für

Wellen, die sich von dem Koordinatenursprung aus fortpflanzen, dürfen wir daher in dem Ausdrucke (21) offenbar setzen

$$\chi = \frac{r}{k},$$

wenn r die Entfernung vom Ursprung bedeutet. Die Differentialquotienten dieser Funktion

$$\alpha = \frac{x}{kr}, \quad \beta = \frac{y}{kr}, \quad \gamma = \frac{z}{kr}$$

genügen in der Tat der Bedingung (36).

Um nun die Änderungen der Amplitude zu untersuchen, setzen wir, entsprechend den allgemeinen Formeln (28)

$$\xi = ae^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)}, \quad \eta = a\left(\frac{y}{x} + p'\right)e^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)}, \quad \zeta = a\left(\frac{z}{x} + q'\right)e^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)} \tag{38}$$

und betrachten hier a, r, $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ als langsam veränderliche Größen.

Wir müssen besonders diejenigen Teile auf den linken Seiten der Gleichungen (33) kennen, in welchen $\frac{y}{x}$ und $\frac{z}{x}$, sowie $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$, $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ einmal nach x, y oder z differenziert vorkommen. Dividiert man diese Teile mit $n^2\xi$, dann ergeben sich die Größen, die wir in § 15 im allgemeinen A_1, A_2, A_3 genannt haben. Bei der Berechnung derselben darf von den Gliedern mit p' und q', sowie von der Veränderlichkeit von a abgesehen werden.

Tut man dies, so erhält man für

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

den Wert

$$-\frac{n}{k}\frac{r}{x}ae^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)} + \frac{2}{x}ae^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)},$$

und hier hat man noch, um die gesuchten Glieder zu erhalten, im ersten Gliede den Faktor $\frac{r}{x}$, im zweiten aber die Exponentialgröße nach x, y oder z zu differenzieren. Schließlich wird

$$A_1 = -\frac{1}{kn}\left(\frac{3}{r} - \frac{r}{x^2}\right), \quad A_2 = -\frac{1}{kn}\cdot\frac{3y}{xr}, \quad A_3 = -\frac{1}{kn}\cdot\frac{3z}{xr}.$$

Beachtet man auch, daß nach (31), (35) und (36)

$$N = \frac{2}{k^6}$$

ist und daß die Strahlen von O ausgehende gerade Linien sind, so erhält man aus (32)

$$\frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{a}{r},$$

folglich

$$a = \frac{C}{r},$$

wenn C für jeden Strahl eine Konstante ist.

§ 20. Was nun die unbestimmt gebliebene Änderung der Amplitude a in den Wellenfronten anbelangt, so wollen wir beispielsweise annehmen, daß sie in der Wellenfront σ (§ 16), von der wir ausgehen, dem Verhältnis $\frac{x}{r}$ proportional ist. Dies gilt dann nach dem soeben Gefundenen auch in allen weiteren Wellenfronten, und dürfen wir setzen

$$C = C' \frac{x}{r}, \quad a = C' \frac{x}{r^2}, \tag{39}$$

wo C' nicht nur auf dem einzelnen Strahl, sondern überhaupt konstant ist.

Um nun in dieser Voraussetzung p' und q' zu bestimmen, haben wir noch die Größen (Df_1) usw. in (29) zu berechnen. Zu diesem Zwecke leiten wir zunächst $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}$ usw. aus (34) und $\frac{\partial a}{\partial x}$ usw. aus (39) ab. Es ergibt sich dann nach einiger Rechnung, wenn wir für p und q die Werte (37) nehmen,

$$(Df_1) + (Dg_1)p + (Dh_1)q = \frac{1}{kn}\left(-\frac{3}{r} + \frac{r}{x^2}\right),$$

$$(Df_2) + (Dg_2)p + (Dh_2)q = -\frac{1}{kn} \cdot \frac{3y}{xr}.$$

Da dies gerade die Werte von A_1 und A_2 sind, so folgt aus den beiden ersten der Gleichungen (29)

$$p' = 0, \quad q' = 0,$$

so daß

$$\frac{\eta}{\xi} = p = \frac{y}{x}, \quad \frac{\zeta}{\xi} = q = \frac{z}{x} \quad \ldots \ldots \tag{40}$$

wird. Dies war zu erwarten, da offenbar ein Bewegungszustand bestehen kann, in welchem die radial gerichteten Geschwindigkeiten der Luftteilchen in allen Punkten einer kugelförmigen Wellenfront gleich groß sind.

Eine diesem Fall entsprechende genaue Lösung der Bewegungsgleichungen (33) ist

$$\xi = C' \frac{x}{r^2}\left(1 + \frac{k}{nr}\right) e^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)},$$

$$\eta = C' \frac{y}{r^2}\left(1 + \frac{k}{nr}\right) e^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)},$$

$$\zeta = C' \frac{z}{r^2}\left(1 + \frac{k}{nr}\right) e^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)}.$$

Sie steht wirklich mit den Formeln (40) im Einklang und liefert, wenn r sehr groß gegen die Wellenlänge und also $\frac{k}{nr}$ eine sehr kleine Zahl ist, in erster Annäherung

$$\xi = C' \frac{x}{r^2} e^{n\left(t - \frac{r}{k}\right)},$$

was mit (38) und (39) übereinstimmt.

§ 21. Wir wollen schließlich, wenn auch in sehr unvollständiger Weise, die Fortpflanzung in einem nicht homogenen Mittel besprechen. Mit einem solchen haben wir es zu tun, sobald einer oder mehrere der Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen Funktionen der Koordinaten sind. In einem festen elastischen Körper z. B. können die Dichtigkeit oder die Elastizität von Punkt zu Punkt variieren, in einem das Licht fortpflanzenden Medium die Größen, von denen seine optischen Konstanten abhängen. Berücksichtigt man, daß die in dieser Abhandlung vorgetragenen Betrachtungen auch auf einen sich bewegenden Körper anwendbar sind, dann kommt man dazu, ein Medium auch dann nicht homogen zu nennen, wenn es zwar überall aus einem gleichartigen Stoff besteht, dieser aber an verschiedenen Stellen ungleiche Geschwindigkeiten hat, während „homogen" bedeuten würde, daß alle Teile des Mediums eine gemeinsame Translationsgeschwindigkeit besitzen.

Am einfachsten werden nun die Erscheinungen, wenn das Mittel aus zwei durch eine gewisse Fläche Σ voneinander getrennten Teilen besteht, die jeder für sich homogen, aber voneinander verschieden sind. In den beiden Teilen, die wir durch die Indices I und II voneinander unterscheiden wollen, gelten dann Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, wie wir sie bisher vorausgesetzt haben; nur haben die Koeffizienten in I und II ungleiche Werte.

Für eine vollständige Behandlung der Erscheinungen würde es nun nötig sein, auch die Grenzbedingungen an der Fläche Σ zu kennen; jedoch können wir schon zu einigen Schlüssen gelangen, wenn wir bloß annehmen, daß diese Bedingungen in gewissen linearen Relationen zwischen den für I und für II geltenden Größen bestehen.

Eine Welle, die z. B. von der Seite I her sich gegen die Grenzfläche hin fortpflanzt, wird nun zum Teil reflektiert und erleidet beim Überschreiten der Fläche eine Richtungsänderung. Für letztere gilt das gewöhnliche Brechungsgesetz, wie folgende Betrachtung zeigen möge.

§ 22. Es seien für die beiden Teile des Mediums $\chi_{\mathrm{I}}(x, y, z)$ und $\chi_{\mathrm{II}}(x, y, z)$ die Funktionen, welche ebenso wie früher die Funktion χ die Phasen bestimmen, so daß in den Ausdrücken, welche die Lichtbewegung in den beiden Raumteilen darstellen, die Faktoren

$$e^{n[t-\chi_I(x,y,z)]} \quad \text{und} \quad e^{n[t-\chi_{II}(x,y,z)]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

auftreten. Da diese Faktoren auch in den Größen vorkommen, mit welchen man es in den Grenzbedingungen zu tun hat, so überzeugt man sich leicht davon, daß die Zustände in den beiden Raumteilen sich nur dann in der erforderlichen Weise aneinander anschließen werden, wenn in jedem Punkt von Σ die Größen (41) gleichen Wert haben. An der Fläche Σ muß daher

$$\chi_I(x, y, z) = \chi_{II}(x, y, z)$$

sein. Offenbar folgt hieraus, daß die Durchschnittslinie s von Σ mit einer Wellenfront

$$\chi_I(x, y, z) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

zu gleicher Zeit auch die Schnittlinie mit der Wellenfront

$$\chi_{II}(x, y, z) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

ist, und dies zeigt, daß in einem beliebigen Punkte P der Linie die Normalen zu Σ und zu den beiden Wellenfronten (42) und (43) in ein und derselben Ebene liegen.

Wir denken uns ferner, daß eine bestimmte Phase die beiden Wellenfronten (42) und (43), die σ_I und σ_{II} heißen mögen, zur Zeit t, und nach dem unendlich kleinen Intervall dt die Wellenfronten σ'_I und σ'_{II} erreicht; s' sei die Linie, in welcher diese beiden die Grenzfläche Σ treffen. Von einem Punkte P der Linie s ziehen wir nun drei Geraden in der senkrecht zu ihr stehenden Ebene, die eine PR in der Fläche Σ, die beiden anderen PR_I und PR_{II} aber senkrecht zu den Flächen σ_I und σ_{II}. Diese Linien mögen die Linie s' bzw. die Flächen σ'_I und σ'_{II}, wenn die erste um ein unendlich kleines Stück verlängert wird, in den Punkten R bzw. R_I und R_{II} schneiden. Aus dem in § 13 Gesagten erhellt, daß, wenn v_I und v_{II} die in Betracht kommenden Wellengeschwindigkeiten sind,

$$PR_I = v_I dt, \quad PR_{II} = v_{II} dt$$

ist, und man hat offenbar, wenn die Normalen zu σ_I und σ_{II} mit der Normale zu Σ die Winkel ϑ_I und ϑ_{II} einschließen,

$$PR_I = PR \sin\vartheta_I, \quad PR_{II} = PR \sin\vartheta_{II}.$$

Folglich ist

$$\sin\vartheta_I : \sin\vartheta_{II} = v_I : v_{II}.$$

Wir sind also ganz allgemein, was die Wellennormalen betrifft, zu den beiden bekannten Brechungsgesetzen gelangt.

Hieraus können wir weiter schließen, daß die Huygens'sche Konstruktion uns auch die Lage der geknickten Wellenfronten, von denen bereits ein Teil die Grenzfläche überschritten hat, richtig zu liefern vermag.

Bei der Ableitung des Reflexionsgesetzes und der Rechtfertigung der Huygens'schen Konstruktion für die reflektierten Wellen brauchen wir nicht zu verweilen.

§ 23. Nachdem man die Richtung der zurückgeworfenen und gebrochenen Wellen bestimmt hat, sind noch ihre Amplituden zu berechnen. Hierzu müssen in jedem Fall die Grenzbedingungen an der Fläche Σ dienen. Da nun die Form der sich aus denselben ergebenden Gleichungen voraussichtlich von der Neigung der Wellen gegen die Grenzfläche Σ abhängt und diese sich langsam von Punkt zu Punkt ändert, so wird dies zu einer langsamen Änderung in der Amplitude der neu entstehenden Wellen führen. Darin liegt jedoch nach dem früher Gesagten keine Schwierigkeit, und es ist klar, daß, wenn überdies schon bei den einfallenden Wellen eine langsame Änderung der Amplitude in der Wellenfront besteht, eine hiermit gleichen Schritt haltende Änderung sich auch in den neuen Wellen zeigen wird.

Geht die Veränderlichkeit der Amplitude des einfallenden Lichtes so weit, daß man annäherungsweise von einem seitlich begrenzten Lichtbündel sprechen kann, so kann man dies auch, was das reflektierte und gebrochene Licht betrifft, tun. Auch hierbei wird die Begrenzung wieder durch Strahlen bestimmt, und zwar gehen die reflektierten und gebrochenen Lichtbündel von demjenigen Teil der Grenzfläche aus, der von dem einfallenden Bündel getroffen wird. Zu ähnlichen Schlüssen würde man auch kommen, wenn eine Doppelbrechung oder eine doppelte Reflexion stattfände.

§ 24. Nach dieser Vorbereitung können wir zu der Fortpflanzung in einem nicht homogenen Mittel übergehen. Wir wollen annehmen, daß sich eine Schar von Flächen

$$K(x, y, z) = C$$

angeben läßt, derart, daß in allen Punkten ein und derselben Fläche das Medium dieselben Eigenschaften hat. Wir können durch eine Reihe derartiger Flächen, die zunächst in endlichen Entfernungen voneinander liegen mögen, den Raum in Schichten teilen und uns denken, daß in der ganzen Ausdehnung einer Schicht die Eigenschaften bestehen, die an ihrer einen Grenzfläche vorkommen, so daß sich die Eigenschaften des Mediums nicht allmählich, sondern stufenweise ändern.

Ein in das Medium eindringendes Lichtbündel wird dann in viele Bündel zerfallen, von denen eines als die Fortsetzung des einfallenden Wellenzuges betrachtet werden kann, die übrigen aber durch ein- oder mehrmalige Reflexion an den Grenzflächen der Schichten entstehen.

Wir fassen zunächst nur das direkt durchgehende Licht ins Auge und bestimmen für dieses mit Hilfe der Huygens'schen Konstruktion

die Lagen, welche eine Wellenfront in sukzessiven, jedesmal um dt voneinander entfernten Augenblicken hat. Die so entstehende Figur ist dadurch gekennzeichnet, daß der senkrechte Abstand zweier aufeinanderfolgender Wellenfronten immer den Wert vdt hat, wenn v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an der betrachteten Stelle und für Wellen von der betreffenden Richtung bedeutet. Auch können wir die seitliche Begrenzung eines Bündels in der früher dargelegten Weise angeben.

Den Fall eines Mediums, dessen Eigenschaften sich kontinuierlich ändern, betrachten wir nunmehr als einen Grenzfall. Wir lassen nämlich die Dicke der Schichten, die wir soeben angenommen haben, unbegrenzt abnehmen. Wir dürfen annehmen, daß schließlich für die Fortpflanzung des Lichtes eine Figur gelten wird, die man als die Grenze ansehen kann, der sich die oben betrachtete, in dem geschichteten Medium entworfene Figur nähert. Die Wellenfront wird die Knicke verlieren, aber ihre sukzessiven Lagen werden die Eigenschaft behalten, daß die senkrechte Entfernung je zwei aufeinanderfolgender stets den Wert vdt hat. Hiermit ist bewiesen, daß auch in dem nicht homogenen Medium für den fortschreitenden Teil der Wellenbewegung die Huygens'sche Konstruktion anwendbar bleibt. Auch muß noch immer die seitliche Begrenzung der Bündel durch Linien angegeben werden können, deren Elemente man in der oft erwähnten Weise kennen lernt, eben weil man dies, wie groß die Anzahl der Schichten auch sein möge, für das geschichtete Medium tun kann. Dabei ist zu bemerken, daß diese Linien, die Strahlen, jetzt im allgemeinen gekrümmt sein werden.

§ 25. Freilich wird sich nun der Zustand außerordentlich komplizieren, sobald auch die zurückgeworfenen Strahlen eine beträchtliche Intensität haben. Glücklicherweise sind aber in allen Fällen, in denen sich die Eigenschaften des Mediums auf einer der Wellenlänge gleichen Strecke nur unmerklich ändern, diese Strahlen so schwach, daß man sie gar nicht zu berücksichtigen braucht.

Es möge genügen, dies für einen besonders einfachen Fall darzutun. Wir nehmen an, daß die Nichthomogenität des Mediums darin besteht, daß eine einzige die Eigenschaften bestimmende Größe ε von Punkt zu Punkt variiert, und daß dieses ε nur von der einen Koordinate x abhängt, so daß die obengenannten Grenzflächen senkrecht zur x-Achse stehende Ebenen sind. Wir betrachten ein Bündel, das in der Richtung von OX einfällt und beschränken uns auf die Strahlen, welche daraus durch einmalige Reflexion an den unendlich nahe beieinander liegenden Grenzflächen entstehen, insofern sich diese zwischen zwei senkrecht zur x-Achse stehenden Ebenen E_1 und E_2 befinden. Die Entfernung von E_1 und E_2 sei eine endliche Größe Δ. Ferner sei η

eine der Komponenten der Gleichgewichtsstörung, a die derselben entsprechende Amplitude des einfallenden Lichtes an der Ebene E_1, und $a\mu$ die Amplitude des eingedrungenen Lichtes an irgend einer anderen Ebene E; μ ist dann ein echter Bruch.

Die Lage der Ebene E bestimmen wir nicht durch den Wert von x, sondern durch die Zeit ϑ, welche das Licht braucht, um von E_1 aus die Ebene E zu erreichen, und zwar wählen wir dabei die Zeiteinheit in solcher Weise, daß die Zeit, in der die Strecke Δ durchlaufen wird, durch eine Zahl Θ ausgedrückt wird, die weder sehr klein noch sehr groß ist. Der Dicke einer unendlich dünnen Schicht entspricht dann ein gewisses $d\vartheta$, und wir haben für die Änderung, welche ε von einer Schicht zur anderen erleidet

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}\,d\vartheta\,.$$

Die Amplitude der an der Fläche E reflektierten Strahlen ist nun dieser Änderung oder vielmehr der relativen Änderung proportional zu setzen; sie kann daher mit

$$\frac{a\mu q}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}\,d\vartheta\,.$$

bezeichnet werden, wo q ein endlicher von ε abhängiger numerischer Koeffizient von mäßiger Größe ist.

Wir schließen hieraus, daß, wenn für das einfallende Licht in der Ebene E_1 der Ausdruck

$$\eta = a\cos n(t+p) \tag{44}$$

gilt, für den an der Ebene E reflektierten und wieder nach E_1 zurückgekehrten Strahl geschrieben werden kann

$$\frac{a\mu q}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}\cos n(t-2\vartheta+p)\,d\vartheta.$$

Schließlich ergibt sich für die aus der Interferenz aller einmal reflektierten Strahlen entstehende Gleichgewichtsstörung

$$\eta_r = a\int\limits_0^{\Theta}\frac{\mu q}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}\cos n(t-2\vartheta+p)\,d\vartheta\,. \tag{45}$$

§ 26. Wir setzen

$$\frac{\mu q}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = k$$

und formen das Integral

$$J = \int\limits_0^{\Theta} k\cos n(t-2\vartheta+p)\,d\vartheta \tag{46}$$

durch partielle Integration um:

$$J = -\frac{1}{2n}\Big| k \sin n(t - 2\vartheta + p)\Big|_0^\Theta + \frac{1}{2}\int_0^\Theta \frac{1}{n}\frac{dk}{d\vartheta}\sin(t - 2\vartheta + p)\,d\vartheta. \quad (47)$$

Das letzte Integral wollen wir mit dem vorhergehenden Ausdruck (46) vergleichen. Dabei kommt es auf das Verhältnis der Werte von k und $\frac{1}{n}\frac{dk}{d\vartheta}$, oder $\frac{v}{n}\frac{dk}{dx}$ an. Da nun, wenn λ die Wellenlänge bedeutet,

$$\frac{v}{n}\frac{dk}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{dk}{dx},$$

so ist diese Größe sehr klein im Vergleich zu k selbst. Wir dürfen nämlich, ebenso wie ε, auch $\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}$ (wegen unserer Annahme, daß Θ eine Zahl von mäßiger Größe ist) und μ, q als langsam veränderlich ansehen. In erster Annäherung können wir nun das letzte Glied in (47), weil es sehr klein gegen J ist, vernachlässigen. Infolgedessen wird die Formel (45)

$$\eta_r = -\frac{1}{2}a\Big|\mu q\frac{1}{\varepsilon n}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}\sin n(t - 2\vartheta + p)\Big|_0^\Theta.$$

Da $\frac{1}{n\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}$ eine sehr kleine Zahl ist und μq einen mäßigen Wert hat, so ist sowohl für $\vartheta = 0$ als auch für $\vartheta = \Theta$ der Ausdruck

$$\mu q\frac{1}{n\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}$$

sehr klein. Die Amplitude des reflektierten Lichtes ist daher sehr viel kleiner als die des einfallenden Bündels (44). Selbstverständlich wird dies in noch höherem Maße von den mehrfach reflektierten Strahlen gelten.

Wir können dieser Betrachtung entnehmen, daß an der Grenze zweier Körper, die in einer dünnen Schicht allmählich ineinander übergehen, nur dann eine intensive Reflexion stattfinden kann, wenn die Dicke der Schicht nicht groß gegen die Wellenlänge ist.

Zum Schluß will ich hervorheben, daß wir unsere letzten Resultate auch direkt aus der Betrachtung der Bewegungsgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten hätten ableiten können. Sind die Koeffizienten langsam veränderlich, dann kann man Lösungen finden, die aus einem Hauptgliede und einem Zusatzgliede bestehen. Das Hauptglied hängt in solcher Weise von x, y, z, t ab, daß es die Bewegungsgleichungen befriedigt, wenn man bei der Bildung der Differentialquotienten die langsam veränderlichen Größen als konstant behandelt; es entspricht dem ohne Reflexion fortschreiten-

den Teil des einfallenden Lichtes. Das Zusatzglied, welches die Gesamtheit der zurückgeworfenen Lichtbewegungen darstellt, würde nach unseren Annahmen einen viel kleineren Wert als das Hauptglied haben.

Freilich würde diese Betrachtungsweise, wenn man sie weiter durchführen wollte, recht komplizierte mathematische Entwicklungen erfordern. Sie hat aber den Vorteil, daß sie auch dann anwendbar bleibt, wenn der Zustand des Mediums durch mehr als eine von Punkt zu Punkt veränderliche Größe bestimmt wird.

XVII.

Die relative Bewegung der Erde und des Äthers.

(Amsterdam, Zittingsverslag Akad. v. Wet., 1 [1892], p. 74.)

Zur Erklärung der Aberration des Lichtes nahm Fresnel an, daß der Äther der jährlichen Bewegung der Erde nicht folgt, was natürlich eine vollkommene Durchdringlichkeit des Planeten für den Äther voraussetzt. Später hat Stokes eine auf der entgegengesetzten Annahme beruhende Theorie zu entwickeln versucht; er stellt sich vor, daß der Äther von der Erde mitgeführt wird und also in jedem Punkt der Erdoberfläche dieselbe Geschwindigkeit wie diese selbst hat.

Diese Theorien habe ich vor einigen Jahren ausführlich besprochen.[1]) Es zeigte sich dabei, daß noch andere Erklärungsweisen möglich sind, die zwischen den genannten gleichsam die Mitte halten, jedoch, da sie nicht so einfach wie diese sind, weniger Beachtung verdienen. Von den beiden äußersten Auffassungen glaubte ich die von Stokes verwerfen zu müssen, weil sie die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials für die Bewegung des Äthers verlangt, was sich mit der Gleichheit der Geschwindigkeiten der Erde und des ihr zunächst liegenden Äthers nicht vereinigen läßt.

Dagegen war es möglich, durch die Fresnel'sche Theorie fast alle betrachteten Erscheinungen zu erklären; nur mußte zu diesem Zweck für durchsichtige ponderable Körper der „Mitführungskoeffizient" angenommen werden, der von Fresnel angegeben wurde, und dessen Wert ich vor kurzem aus der elektromagnetischen Lichttheorie abgeleitet habe.[2])

Eine große Schwierigkeit bot nun aber ein Interferenzversuch, den Michelson ausgeführt hat[3]), und durch den er hoffte zu einer Entscheidung zwischen den beiden streitigen Theorien gelangen zu können.

---

[1]) Siehe Nr. XIV dieser Sammlung.

[2]) Man wird diese Ableitung in einer späteren Abhandlung finden.

[3]) Siehe Nr. XIV dieser Sammlung, §§ 25, 26.

Wenn der Äther in Ruhe bleibt, so muß die Bewegung der Erde einen Einfluß auf die Zeit haben, welche das Licht braucht, um zwischen zwei fest mit ihr verbundenen Punkten hin und zurück zu gehen. Ist l die Entfernung der Punkte, c die Geschwindigkeit des Lichtes, und w die der Erde, so ist die betreffende Zeit, wenn die Verbindungslinie der Punkte der Bewegungsrichtung der Erde parallel läuft,

$$2\frac{l}{c}\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right), \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und wenn sie senkrecht auf ihr steht,

$$2\frac{l}{c}\left(1+\frac{w^2}{2c^2}\right), \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

so daß die Werte um

$$\frac{lw^2}{c^2} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

voneinander verschieden sind.

Michelson benutzte einen Apparat mit zwei gleichlangen, aufeinander senkrecht stehenden horizontalen Armen, die an ihren Enden je einen senkrecht auf die Richtung des Armes gestellten Spiegel trugen. Eine Interferenzerscheinung kam in der Weise zustande, daß vom Kreuzpunkte ab ein Strahl längs des einen Armes und ein zweiter längs des anderen Armes hin- und herlief. Der ganze Apparat, einschließlich der Lichtquelle und des Beobachtungsfernrohrs, konnte um eine vertikale Achse gedreht werden, und die Beobachtungszeit wurde so gewählt, daß bei dieser Bewegung Lagen erreicht werden konnten, in denen entweder der eine oder der andere Arm einen ziemlich kleinen Winkel mit der Bewegungsrichtung der Erde bildete. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß die Arme der Erdbewegung genau parallel gerichtet werden können. Dann muß, wenn Fresnel's Theorie richtig ist, infolge der Erdbewegung das in ihrer Richtung hin- und hergehende Lichtbündel in bezug auf das andere Bündel die durch (3) bestimmte Verzögerung erleiden. Bei einer Drehung über einen rechten Winkel müssen also alle Phasendifferenzen sich um einen Betrag ändern, der, in Zeiteinheiten ausgedrückt, durch das Doppelte der Größe (3) angegeben wird. In Wirklichkeit ließ sich aber eine Verschiebung der Interferenzstreifen nicht nachweisen.

Gegen diesen Versuch konnte ich einwenden, daß die Länge der Arme etwas zu klein war, um eine beobachtbare Verschiebung der Streifen zu erhalten. Michelson hat aber, in Gemeinschaft mit Morley, das Experiment in größerem Maßstabe wiederholt.[1]) Bei den neuen Versuchen liefen die Lichtstrahlen in zueinander senkrechten Richtungen mehrere Male hin und her, indem sie jedesmal wieder von Spiegeln

[1]) A. A. Michelson u. E. W. Morley, Amer. Journ. of Science (3) 34 (1887), p. 333.

reflektiert wurden; die letzteren, sowie alle sonstigen Teile des Apparats waren auf eine auf Quecksilber schwimmende und also leicht in horizontaler Richtung drehbare Steinplatte gestellt. Auch jetzt zeigte sich keine Spur der durch die Fresnel'sche Theorie verlangten Verschiebung der Interferenzstreifen.

Ich habe mir viel Mühe um die Erklärung dieses Versuchs gegeben und habe schließlich nur *einen* Ausweg gefunden. Derselbe besteht in der Hypothese, daß die Verbindungslinie zweier Punkte eines festen Körpers nicht die gleiche Länge behält, wenn sie einmal der Bewegungsrichtung der Erde parallel läuft, und dann senkrecht darauf gestellt wird. Wenn z. B. die Entfernung im letzteren Fall l und im ersteren $l(1-\alpha)$ beträgt, so muß man den ersten der Ausdrücke (1) und (2) mit $1-\alpha$ multiplizieren. Vernachlässigt man $\frac{\alpha w^2}{c^2}$, so erhält man dadurch

$$2\frac{l}{c}\left(1+\frac{w^2}{c^2}-\alpha\right).$$

Dies wird dem Ausdruck (2) gleich, und das negative Resultat von Michelson ist somit erklärt, wenn

$$\alpha=\frac{w^2}{2c^2}$$

ist.[1])

Eine solche Änderung der Länge der Arme bei Michelson's erstem Versuch, und der Dimensionen der Steinplatte beim zweiten, ist nun wirklich, wie mir scheint, nicht undenkbar. In der Tat, wodurch werden die Größe und die Gestalt eines festen Körpers bestimmt? Offenbar durch die Intensität der molekularen Kräfte; jede Ursache, welche diese modifiziert, muß auch die Form und die Dimensionen des Körpers ändern. Nun dürfen wir gegenwärtig annehmen, daß elektrische und magnetische Kräfte durch Vermittlung des Äthers wirken, und es ist nicht unnatürlich, dasselbe von den molekularen Kräften vorauszusetzen. Tut man dies, so kann es einen Unterschied machen, ob die Verbindungslinie zweier materieller Teilchen, die sich zusammen durch den ruhenden Äther verschieben, parallel oder senkrecht zur Bewegung gerichtet ist. Man sieht leicht, daß ein Einfluß von der Ordnung $\frac{w}{c}$ nicht zu erwarten ist, aber ein Einfluß von der Ordnung $\frac{w^2}{c^2}$ ist nicht ausgeschlossen, und das ist gerade, was wir brauchen.

Da wir von dem Wesen der molekularen Kräfte nichts wissen, so ist es unmöglich, die Hypothese näher zu prüfen. Wir können nur —

---

[1]) Dieselbe Erklärung hat auch Fitz Gerald gegeben; siehe O. Lodge, Aberrationproblems, London Trans. A 184 (1893), p. 749, 750.

selbstverständlich indem wir gewisse mehr oder weniger plausible Hypothesen einführen — den Einfluß einer Translation der ponderabelen Materie auf elektrische und magnetische Kräfte berechnen. Es ist nun bemerkenswert, daß das Resultat, welches man dabei für die elektrischen Kräfte erhält, wenn es auf die molekularen Wirkungen übertragen wird, gerade den oben für α angegebenen Wert liefert.

Es sei A ein System materieller Punkte, die gewisse elektrische Ladungen tragen und relativ zum Äther in Ruhe sind, B das System derselben Punkte, wenn sie sich in der Richtung der x-Achse mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit w durch den Äther verschieben. Aus den von mir entwickelten Gleichungen[1]) kann man ableiten, mit welchen Kräften die Teilchen in dem System B aufeinander wirken. Am einfachsten läßt sich das Resultat ausdrücken, wenn man noch ein drittes System C einführt, das ebenso wie A in Ruhe ist, aber sich von diesem letzteren System durch die gegenseitige Lage der Punkte unterscheidet. Das System C soll nämlich aus A entstehen durch eine einseitige Ausdehnung, bei der alle Dimensionen in der Richtung der x-Achse im Verhältnis $1 + \frac{w^2}{2c^2}$ vergrößert werden, die auf der x-Achse senkrecht stehenden Dimensionen aber ungeändert bleiben.

Für die Kräfte im System B gilt nun der Satz, daß die der x-Achse parallelen Komponenten dieselben sind wie in C, während die auf dieser Achse senkrecht stehenden aus den entsprechenden Komponenten in C durch Multiplikation mit dem Faktor $1 - \frac{w^2}{2c^2}$ erhalten werden.

Wir wollen dies auf die Molekularkräfte übertragen und uns einen festen Körper als ein System materieller Punkte vorstellen, die sich unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Anziehungen und Abstoßungen im Gleichgewicht befinden. Es sei das System B ein solcher Körper, der sich durch den Äther hin bewegt. Während er das tut, müssen die auf jeden seiner materiellen Punkte wirkenden Kräfte sich einander aufheben. Aus dem Gesagten folgt, daß, wenn dies in B zutrifft, es in dem System A nicht der Fall zu sein braucht, wohl aber im System C. Zwar werden, wenn man von B zu C übergeht, alle senkrecht zur x-Achse stehenden Kraftkomponenten geändert, aber das Gleichgewicht wird hierdurch nicht gestört, da sie alle in demselben Verhältnis vergrößert werden. In dieser Weise zeigt es sich, daß, wenn B der Gleichgewichtszustand des Körpers während einer Verschiebung durch den Äther ist, C der Gleichgewichtszustand des ruhenden Körpers sein muß. Beachtet man das über die Dimensionen von B und C Gesagte, so kommt man genau zu der Dimensionenänderung, die wir zur Erklärung des Michelson'schen Versuchs angenommen haben.

---

[1]) Man wird diese in einer späteren Abhandlung finden.

Natürlich ist diesem Resultat kein großes Gewicht beizulegen; das für die elektrischen Kräfte Gefundene auf die Molekularwirkungen zu übertragen, mag wohl manchem zu gewagt erscheinen. Auch ist zu bemerken, daß, sogar wenn man kein Bedenken dagegen hätte, unentschieden bliebe, ob die Bewegung der Erde die Dimensionen in der einen Richtung verkürzt, was wir oben angenommen haben, oder die senkrecht darauf stehenden verlängert, was wir ebensogut hätten annehmen können.

Wie dem auch sei, man muß, wie mir scheint, die Möglichkeit von Änderungen der Molekularkräfte und der Dimensionen zu einem Betrag, der von der Größenordnung $\frac{w^2}{2c^2}$ ist, zugeben. Der Michelson'sche Versuch verliert damit seine Beweiskraft für die Frage, die er entscheiden sollte. Wenn man die Fresnel'sche Theorie annimmt, so liegt die Bedeutung des Versuchs vielmehr darin, daß er uns über die Dimensionenänderungen Aufschluß gibt.

Da $\frac{w}{c} = 0{,}0001$ ist, so wird $\frac{w^2}{2c^2}$ ein Zweihundertmilliontel. Eine Verkürzung des Durchmessers der Erde mit diesem Bruchteil betrüge 6 cm. Daß an eine Vergleichung von zwei Meterstäben mit einer Genauigkeit von einem Zweihundertmilliontel ihrer Länge nicht zu denken ist, braucht kaum gesagt zu werden. Übrigens, auch wenn sie möglich wäre, so würde man doch an zwei nebeneinander gelegten Stäben nichts von den besprochenen Änderungen bemerken können, da diese bei beiden in gleichem Maße bestehen. Um die Erscheinung zu konstatieren, müßte man die Länge zweier zueinander senkrecht gestellter Stäbe vergleichen, und wollte man dies mit Hilfe einer Interferenzerscheinung tun, bei welcher der eine Strahl an dem ersten Stab und der andere an dem zweiten entlang hin und hergeht, so käme man eben auf den Versuch von Michelson zurück. Die oben vorausgesetzte Längenänderung würde sich auch jetzt der Beobachtung entziehen, weil ihr Einfluß von dem der durch (3) bestimmten Phasenänderungen kompensiert würde.

XVIII.

Stokes' Aberrationstheorie.

(Amsterdam, Zittingsverslag Akad. v. Wet., 1 [1892], p. 97.)

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich nachgewiesen, daß die von Stokes angenommene Existenz eines Geschwindigkeitspotentials für die Ätherbewegung seiner Voraussetzung, daß an der Erdoberfläche keine Gleitung stattfinde, widerspricht. Es fragt sich indes, ob in seiner Theorie die Annahme eines Geschwindigkeitspotentials unumgänglich nötig sei. Dies soll im folgenden gezeigt werden.

Wir betrachten eine beliebige, sich von einem Punkte O der Erdoberfläche ins Unendliche erstreckende gerade Linie OX, wählen sie zur x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Ursprung wir in O legen, und bezeichnen mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Äthers, mit c die Geschwindigkeit des Lichtes. Wenn sich nun eine Wellenfront, die ursprünglich senkrecht auf OX steht, längs dieser Linie der Erde nähert, so erleidet ihre Normale eine Richtungsänderung, die sich durch einen ablenkenden Vektor[2]) mit den Komponenten

$$0, \quad \frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y}\,dx, \quad \frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial z}\,dx \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

angeben läßt. Die Integrale beziehen sich hier auf sämtliche Elemente von OX.

Andererseits kann man sagen, daß die beobachtete Aberration einem ablenkenden Vektor mit den Komponenten

$$0, \quad -\frac{v_0}{c}, \quad -\frac{w_0}{c}$$

entspricht, wenn v_0 und w_0 die zweite und dritte Komponente der Erdgeschwindigkeit, und also auch, nach der Stokes'schen Theorie,

---

[1]) Nr. XIV dieser Sammlung, § 6.

[2]) Vgl. Nr. XV dieser Sammlung, §§ 2 und 7.

die entsprechenden Komponenten der Äthergeschwindigkeit im Punkte O sind. Da nun

$$-v_0 = \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial x} dx, \qquad -w_0 = \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

ist, weil der Äther im Unendlichen ruht, so kann die durch (1) bestimmte Richtungsänderung der Wellen nur dann mit der wirklichen Aberration übereinstimmen, wenn

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

ist.

Ähnliche Bedingungen müssen für jede von einem Punkte der Erdoberfläche aus gezogene gerade Linie erfüllt sein. Um uns nun von einer speziellen Wahl der Koordinatenachsen unabhängig zu machen, betrachten wir den Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

den wir die *Rotation* des Vektors (u, v, w) nennen und mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wollen. Dieser Vektor ist bekanntlich, unabhängig von der Wahl der Achsen, durch die Bewegung des Äthers bestimmt, und die gefundene Bedingung läßt sich nun wie folgt ausdrücken:

Ist ds ein Element einer der oben genannten geraden Linien, h irgendeine bestimmte senkrecht auf ihr stehende Richtung und $\mathfrak{R}_h$ die Komponente von $\mathfrak{R}$ nach der Richtung h, so muß sein

$$\int \mathfrak{R}_h ds = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn die Integration sich auf die ganze Linie, von der Erdoberfläche bis ins Unendliche erstreckt.

Es gilt jetzt zu zeigen, daß diese Bedingung (3) erfordert, daß an allen Stellen $\mathfrak{R} = 0$ ist. Aus letzterer Gleichung folgt nämlich die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials.

Wir betrachten die Erde als eine Kugel, ihre Bewegung als eine Translation mit konstanter Geschwindigkeit und legen den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in den Mittelpunkt, die x-Achse in die Richtung der Verschiebung. Da die Ätherbewegung symmetrisch rings um OX sein muß, mit den Stromlinien in den durch diese Achse gehenden Ebenen, so müssen die Linien, welche die Richtung des Vektors $\mathfrak{R}$ angeben, Kreise sein, die OX zur Achse haben; in allen Punkten eines solchen Kreises muß $\mathfrak{R}$ die gleiche Größe haben. Nimmt man ferner an, daß bei Umkehrung der Erdbewegung auch alle Geschwindigkeiten im Äther sich umkehren würden, und daß man den

neuen in dieser Weise entstandenen Bewegungszustand auch dadurch erhalten könnte, daß man das Spiegelbild des ursprünglichen in bezug auf die yz-Ebene nähme, so kommt man zu dem Schluß, daß in zwei Punkten, die symmetrisch gegen die yz-Ebene liegen, $\mathfrak{R}$ dieselbe Richtung und Größe haben muß.

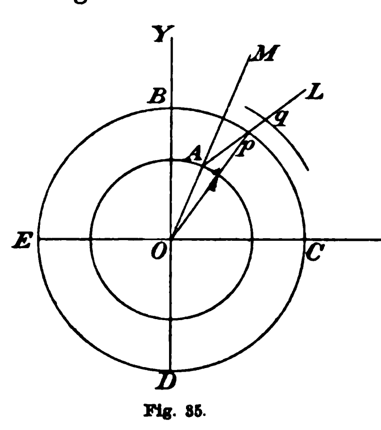


Fig. 35.

Wir beschränken uns jetzt auf eine Ebene YOC (Fig. 35), die durch OY geht und einen gewissen Winkel mit OX bildet. Sei, in dieser Ebene, A ein Punkt der Erdoberfläche, AM die Verlängerung des Radius, AL eine beliebige ins Unendliche gehende Gerade, auf die wir die Gleichung (3) anwenden wollen, indem wir die Richtung h senkrecht zur Ebene YOC wählen. Ferner sei

$$\angle YOA = \varphi \text{ und } \angle MAL = \beta.$$

Wenn wir um O als Mittelpunkt zwei Kreise mit den Radien r und $r + dr$ legen, so können wir für ds den zwischen diesen Kreisen liegenden Teil pq von AL nehmen. Die Formel (3) wird infolgedessen

$$\int_a^\infty \frac{\mathfrak{R}_h}{\cos\gamma} dr = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

wenn man den Winkel ApO mit γ und den Erdradius mit a bezeichnet. Jedes Element des Integrals ist nun eine Funktion von φ, β, r und dr. Wir können diese Größe

$$\frac{\mathfrak{R}_h}{\cos\gamma} dr$$

mit $\cos\varphi d\varphi$ multiplizieren und sie dann, indem wir β konstant halten, nach φ zwischen 0 und 2π, nach r zwischen a und ∞ integrieren. Da man die Reihenfolge der Integrationen umkehren kann, so ist

$$\int_a^\infty \frac{dr}{\cos\gamma} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_h \cos\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_a^\infty \frac{\mathfrak{R}_h}{\cos\gamma} dr,$$

und also, wegen der Gleichung (4),

$$\int_a^\infty \frac{dr}{\cos\gamma} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_h \cos\varphi d\varphi = 0. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Wenn man die in

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_h \cos\varphi d\varphi$$

angedeutete Integration ausführt, so durchläuft der Punkt p den Kreis $BCDE$. Bezeichnet man den Winkel AOp, der hierbei konstant bleibt, mit α und den Winkel BOp mit ψ, so ist $\varphi = \psi - \alpha$, und man kann für das Integral schreiben

$$\cos\alpha \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \mathfrak{K}_h \cos\psi\, d\psi + \sin\alpha \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \mathfrak{K}_h \sin\psi\, d\psi.$$

Hier darf man die Grenzen durch 0 und 2π ersetzen. Ferner folgt aus dem oben von der Größe und Richtung des Vektors $\mathfrak{K}$ in verschiedenen Punkten Gesagten

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_h \sin\psi\, d\psi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_h \cos\psi\, d\psi = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathfrak{K}_h \cos\psi\, d\psi.$$

Das letzte Integral, das sich auf den Kreisquadranten BC bezieht, kann nur noch eine Funktion von r sein. Wir setzen daher

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathfrak{K}_h \cos\psi\, d\psi = \vartheta(r)$$

und finden dann für (5)

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\, \vartheta(r)\, dr = 0,$$

oder, da $\alpha = \beta - \gamma$ ist,

$$\cos\beta \int_a^{\infty} \vartheta(r)\, dr + \sin\beta \int_a^{\infty} \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\, \vartheta(r)\, dr = 0.$$

Der Winkel β wurde nämlich bei den obigen Betrachtungen stets konstant gehalten. Da nun die Gleichung auch gelten muß für $\beta = 0$, so muß zunächst

$$\int_a^{\infty} \vartheta(r)\, dr = 0, \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und dann ferner für jeden Wert von β

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\, \vartheta(r)\, dr = 0$$

sein.

Aus dem Dreieck OAp folgt aber

$$\sin\gamma = \frac{a}{r} \sin\beta,$$

und es muß also für jeden Wert von β

$$\int_a^\infty \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\sin^2\beta\right)^{-\frac{1}{2}} \vartheta(r)\,dr = 0$$

sein. Dies ist nur möglich, wenn die Teile, in welche das Integral durch die Entwicklung von

$$\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\sin^2\beta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

nach steigenden Potenzen von $a^2 \sin^2\beta$ zerfällt, jeder für sich verschwinden. Man erhält also die Reihe von Bedingungen

$$\int_a^\infty \frac{1}{r}\,\vartheta(r)\,dr = 0, \qquad \int_a^\infty \frac{1}{r^3}\,\vartheta(r)\,dr = 0, \qquad \int_a^\infty \frac{1}{r^5}\,\vartheta(r)\,dr = 0 \quad \text{usw.},$$

und hieraus folgt, daß im allgemeinen, wenn F eine beliebige ganze rationale Funktion ist,

$$\int_a^\infty \frac{1}{r} F\left(\frac{1}{r^2}\right)\vartheta(r)\,dr = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

sein muss.

Aus dieser Bedingung kann man ableiten, daß für jedes r

$$\vartheta(r) = 0$$

ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte, wie aus (6) hervorgeht, die Funktion $\vartheta(r)$ einen oder mehr Zeichenwechsel zeigen. Fänden diese bei den nach der Größe geordneten Werten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots\ r_n$$

der Variablen r statt, so würde das Produkt

$$\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_n^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zugleich mit $\vartheta(r)$ das Vorzeichen ändern. Die Funktion

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_n^2}\right)\vartheta(r)$$

hätte stets dasselbe Vorzeichen und würde, wenn man sie nach r von a bis ∞ integriert, einen von Null verschiedenen Wert geben. Dies steht aber im Widerspruch mit der Bedingung (7), da man für die Funktion F das Produkt (8) nehmen kann.

Es zeigt sich somit, daß, wie man auch den Radius OB in Fig. 35 wählt, das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathfrak{K}_h \cos\psi\, d\psi$$

für den Kreisquadranten BC berechnet, verschwinden muß. Die Komponente $\mathfrak{R}_k$ kann daher nicht in allen Punkten des Quadranten dasselbe Vorzeichen haben.

Wir fassen nun endlich die Kugel ins Auge, die O zum Mittelpunkt und OB zum Radius hat, sowie den Kreis BFD (Fig. 36), in welchem sie von der Ebene XOY geschnitten wird. Wäre nicht, in allen Punkten von BF, $\mathfrak{R} = 0$, so könnte man einen Punkt H so wählen, daß zwischen B und H der Vektor $\mathfrak{R}$ die Richtung nicht ändert. Wählte man dann ferner den Winkel zwischen der Ebene YOC von Fig. 35 und der Ebene YOX so groß, daß der Kreis BCD in Fig. 35 den kleinen Kreis auf der Kugel, der OX zur Achse hat und durch H (Fig. 36) geht, nicht schneidet, dann würde in Fig. 35 die Größe $\mathfrak{R}_k$ in allen Punkten von BC dasselbe Vorzeichen haben, was, wie wir sahen, unmöglich ist. Es ist daher in allen Punkten des Kreises BFD (Fig. 36) und also auch, da der Radius OB beliebig gewählt wurde, in allen Punkten des Raumes, $\mathfrak{R} = 0$.

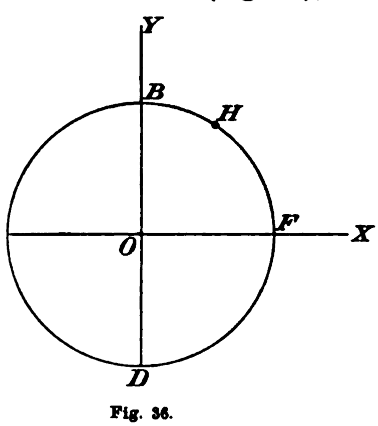


Fig. 36.

XIX.

Stokes's theory of aberration in the supposition of a variable density of the aether.

(Amsterdam, Zittingsverlag Akad. v. Wet. 7 [1899], p. 523; Amsterdam Proceedings 1898—1899, p. 443.)

In the theory of aberration that has been proposed by Stokes it must be assumed that the aether has an irrotational motion, and that, all over the earth's surface, its velocity is equal to that of the planet itself, in its yearly motion. These two conditions are easily shown to contradict each other, if the aether is understood to have everywhere the same invariable density.[1])

Prof. Planck of Berlin had the kindness to call my attention to the fact that both conditions might be satisfied at the same time, if the aether were compressible and subject to gravity, so that it could be condensed around the earth like a gas. It is true that a certain amount of sliding is not to be avoided, but the relative velocity of the aether with regard to the earth may be made as small as we like by supposing the condensation sufficiently large.

At my request Prof. Planck permitted me to communicate his treatment of the case; it is as follows.

Instead of considering the earth moving through the aether, we shall suppose the planet to be at rest, and the aether to flow along it; this comes to the same thing. Let this motion be steady and irrotational, and let the velocity at infinite distance be c, constant in direction and magnitude. Let the aether obey Boyle's law and be attracted by the earth according to the law of Newton.

We shall place the origin of coordinates in the centre of the planet, and give to the axis of z the direction of the velocity c. Finally we shall call the distance to the centre r, the radius of the earth r_0, the velocity-potential φ, the pressure p, the density k, and the potential

---

[1]) See Art. XIV of this collection, § 6.

of gravity per unit mass V. We shall denote by μ the constant ratio $\frac{k}{p}$, and by g the value

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r = r_0)$$

of the acceleration at the surface of the earth.

The motion will be determined by the equations

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

and

$$\int\frac{dp}{k} + V + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} = \text{const.} \quad . \quad . \quad (2)$$

The problem becomes much simpler, if, in the second equation, we suppose the variations of the square of the velocity to be much smaller than those of either of the first terms. We may then write

$$\int\frac{dp}{k} + V = \text{const.},$$

or, since

$$V = -g\frac{r_0^2}{r},$$

$$\log k - \mu g\frac{r_0^2}{r} = \text{const.}$$

If k_0 is the density at the surface, and

$$\mu g r_0^2 = \alpha,$$

the last equation becomes

$$\log k - \log k_0 - \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = 0 \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

As we see, our simplification consists in this, that the distribution of the aether is independent of its motion, that is to say that it is condensed to the same degree as if it were at rest.

Substituting the value of k from (3) in (1), we find a differential equation for the determination of φ. It can be satisfied by

$$\varphi = z\left[a\left(\frac{\alpha}{2r} - 1\right) + b\left(\frac{\alpha}{2r} + 1\right)e^{-\frac{\alpha}{r}}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

the form of the solution being chosen with a view to the remaining conditions of the problem. These are

1°. for $r = \infty$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = c,$$

2°. for $r = r_0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

They give us the following relations between the integration-constants a and b:

$$-a+b=c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$a=\left(\frac{\alpha^2}{2r_0^2}+\frac{\alpha}{r_0}+1\right)e^{-\frac{\alpha}{r_0}}b. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

The velocity with which the aether slides along the earth is found to be

$$v=\frac{\alpha^3}{4r_0^3}\cdot e^{-\frac{\alpha}{r_0}}b\sin\vartheta, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

where ϑ is the angle between the radius of the point considered and the direction of the velocity c. Now, **Planck** observes that, on account of (6), if only $\frac{\alpha}{r_0}$ be large enough, a will be very small relatively to b, so that, as (5) shows, b is nearly equal to c. But then, the value of v given by (7) will be a very small fraction of c itself.

If the quotient of the pressure and the density had the same value for aether as for air of 0°, and if the force of gravity acted with the same intensity on the aether as on ponderable matter, we should have

$$\frac{\alpha}{r_0}=800, \text{ approximately.}$$

The sliding would then be absolutely imperceptible, but it should be noticed that this would be due to an enormous condensation, the ratio n between the densities for $r=r_0$ and $r=\infty$ being by (3)

$$e^{\frac{\alpha}{r_0}}.$$

In order that the aether may follow the earth in its motion so far as is necessary for the explanation of the phenomena, we need not require that the condensation should have such a high value. Of course it would be less, if either $\frac{k}{p}$ or g were smaller than for air.

We can easily determine what degree of condensation must necessarily be admitted. Indeed, the constant of aberration may be reckoned to agree to within $^1/_2$ per cent with the value given by the elementary theory of the phenomenon; consequently, in the theory of **Stokes**, the velocity of sliding should be no more than about $^1/_2$ per cent of the earth's velocity. Now, putting $\frac{\alpha}{r_0}=10$, I find for the maximum value of the velocity of sliding 0,011 c. If $\frac{\alpha}{r_0}=11$, this value would be 0,0055 c. Thus we are led to the conclusion that $\frac{\alpha}{r_0}$ cannot be much different from 11, so that the least admissible value of the condensation is nearly $n=e^{11}$.

Calculations which we shall omit here may serve to estimate the error that has been committed in simplifying the equation (2). It is found that far away from the earth the error may become rather large, but that nearer the surface, precisely on account of the smallness of the velocity in these parts, we need not trouble ourselves about it. Thus, what has been said about the condensation may be true, even though the state of motion in the rarefied aether, at great distances, differ more or less from that represented by the equation (4).

Strictly speaking, the condensation must be still more considerable than the value we have found to be necessary. If the aether is attracted by the earth, it is natural to suppose that it is likewise acted on by the sun; thus, the earth will describe its orbit in a space in which the aether is already condensed. In this dense aether the earth must produce a new condensation.

Of course it is not necessary that the attraction follow precisely the law of inverse squares; any law which leads to a sufficient condensation will suffice for our purpose. To understand the connexion between the condensation and the velocity of sliding, we may consider a simple case. Let the aether have a constant small density k outside a certain sphere S with radius r_1, concentric with the earth, and within this sphere a constant density $k' > k$. Also, let W be the part situated between the sphere and the earth, of a plane passing through the centre of the planet, and perpendicular to its translation.

If the earth were at rest, and the aether flowed along it, the plane W would be traversed by a quantity of aether, equal to that which enters the sphere S on one side and leaves it on the other side. If this shall be the case, the velocities inside the sphere must be of the order $\frac{k r_1^2}{k'(r_1^2 - r_0^2)} c$, if outside the surface they are of the order c.

If we wish to maintain the theory of Stokes by the supposition of a condensation in the neighbourhood of the earth, it will be necessary to add a second hypothesis, namely that the velocity of light is the same in the highly condensed and in the not condensed aether. This is the theory that may be opposed to that of Fresnel, according to which the aether has no motion at all. In comparing the two we should, I believe, pay attention to the following points.

1. The latter theory can only serve its purpose if we introduce the well known coefficient of Fresnel, concerning the propagation of light in moving media. Now, the value of this coefficient has been verified by direct measurements[1]) and may be calculated by means of well founded theoretical considerations.[2]) It might be deemed strange,

---

[1]) See Art. XIV of this collection, § 23.

[2]) These will be given in a later paper.

if in these ways we arrived precisely at the value that is required by a wrong theory.

2. If we hope some day to account for the force of gravitation by means of actions going on in the aether, it is natural to suppose that the aether itself is not subject to this force.

On these and other grounds, I consider Fresnel's theory as the more satisfactory of the two. Prof. Planck is of the same opinion. Nevertheless it will be of importance to consider the question from all sides, and it is for this reason that the following remarks may here be allowed.

1. If the large condensation that has been spoken of, and the constancy of the velocity of propagation, whatever be the density, be taken for granted, one can indeed explain all observed phenomena. At least, I have been unable to find any contradiction. It is true, as has already been stated, that, far away from the earth, the equation (4) will no longer hold. In considering the motion in those distant regions, the square of the velocity in the equation (2) has to be taken into account; also, the sun's attraction will have to be considered. But, after all, I find that there can always exist an irrotational motion[1]), and this, in addition to a sufficient condensation near the earth, is all that is required.[2])

2. If we apply to the moving aether the equations which Hertz has proposed for moving dielectrics[3]), the propagation of light will obey very simple laws. Suppose the earth to be at rest and the aether

[1]) The fundamental theorem of hydrodynamics according to which the motion of a fluid will for ever be irrotational, if it was so initially, holds true for a compressible fluid whose density is a definite function of the pressure, and which is acted on by a system of conservative forces. Therefore, since the attractions exerted by the heavenly bodies are of this kind, and since, if the aether is considered as compressible, it is natural to assume the existence of a definite relation between its density and the pressure, it can always have an irrotational motion, whatever be the degree to which it is condensed around the sun and the planets. We can form an idea of this motion by imagining the bodies of the solar system to have been at rest initially, as well as the aether surrounding them, and then to have acquired their velocities.

[2]) It must also be taken into account that the motion of the aether is confined to a certain space surrounding the bodies of the solar system, and that during the time it takes a ray of light to travel through this space, the velocities u, v, w of the aether in a definite point of space will undergo no perceptable changes. Hence, in the equations which determine the propagation of the waves (see Art. XV of this collection) u, v, w may be taken to represent the velocities existing at different points at one and the same instant, so that the results will be the same as if the aether had a *steady* motion.

[3]) H. Hertz, Über die Grundgleichungen der Electrodynamik für bewegte Körper, Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 369.

to flow, and let the axes of coordinates be fixed in space. Then, if $\mathfrak{d}$ is the dielectric displacement, $\mathfrak{H}$ the magnetic force, $\mathfrak{v}$ the velocity of the aether and c that of light, and if the electromagnetic properties of the aether are supposed to be wholly independent of its density, the equations may be put in the form[1])

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = 4\pi \left[\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{v}_y \mathfrak{d}_x - \mathfrak{v}_x \mathfrak{d}_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v}_x \mathfrak{d}_z - \mathfrak{v}_z \mathfrak{d}_x)\right], \text{ etc.}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

$$4\pi c^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{v}_y \mathfrak{H}_x - \mathfrak{v}_x \mathfrak{H}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v}_x \mathfrak{H}_z - \mathfrak{v}_z \mathfrak{H}_x), \text{ etc.}$$

We shall apply these equations to a steady motion with velocity-potential φ, without supposing that $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ vanishes. We shall however neglect quantities of the order $\mathfrak{v}^2$.

Now if, instead of t, we introduce as a new independent variable

$$t' = t + \frac{\varphi}{c^2},$$

and instead of $\mathfrak{d}$ and $\mathfrak{H}$ the vectors $\mathfrak{F}'$ and $\mathfrak{H}'$ defined by

$$\mathfrak{F}'_x = 4\pi c^2 \mathfrak{d}_x + (\mathfrak{v}_z \mathfrak{H}_y - \mathfrak{v}_y \mathfrak{H}_z), \text{ etc.,}$$

and

$$\mathfrak{H}'_x = \mathfrak{H}_x - 4\pi(\mathfrak{v}_z \mathfrak{d}_y - \mathfrak{v}_y \mathfrak{d}_z), \text{ etc.,}$$

the equations become

$$\operatorname{div} \mathfrak{F}' = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial t'}, \text{ etc.}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H}' = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial z} = -\frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial t'}, \text{ etc.}$$

These formulae have the same form as those that would hold for an aether without motion, and this is sufficient to obtain in a moment the well known theorems concerning the rotation of the wave-fronts and the rectilinearity of the rays of light. At the same time we see that at the boundary of the different layers of the aether, which slide one over the other, there never is a reflection of light.

[1]) In these formulae the components of $\mathfrak{d}$ are denoted by $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$, and the expression $\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial z}$ by $\operatorname{div} \mathfrak{d}$ (divergence of $\mathfrak{d}$). The other notations have a similar meaning.

3. There seems to be nothing against the assumption that, though the aether may be condensed by gravitation, molecular forces are incapable of producing this effect. In this way it might be explained that small masses, e. g. the flowing water in Fizeau's experiments, cannot drag the aether along with them. In these cases the coefficient of Fresnel would remain of use.

4. A decision between the two theories would be soon obtained, if the phenomena of the daily aberration were sufficiently known.[1] Unfortunately, this is by no means the case; even, as Prof. van de Sande Bakhuyzen assures me, one has never purposely examined what the existing observations teach us concerning this aberration.

---

[1] See Art. XV of this collection.

XX.

Über die Frage, ob die Erde in ihrer jährlichen Bewegung den Äther mitführe.

(Amsterdam, Zittingsverlag Akad. v. Wet., 6 [1897], p. 266.)

Michelson hat vor kurzem einen wichtigen und in großem Maßstabe ausgeführten Interferenzversuch beschrieben[1]), dessen Zweck es war, die Frage nach der Existenz einer relativen Bewegung des der Erdoberfläche zunächst liegenden Äthers gegen die höheren Schichten dieses Mediums zu entscheiden. Der Mitteilung seiner Resultate läßt er einige Bemerkungen über die in der Aberrationstheorie notwendigen oder zulässigen Hypothesen folgen. Da sich, was diesen Punkt betrifft, dem von Michelson Gesagten noch einiges hinzufügen läßt, so erlaube ich mir, die nachstehenden Betrachtungen mitzuteilen.

§ 1. In meiner Abhandlung über den Einfluß der Erdbewegung auf die optischen Erscheinungen[2]) habe ich folgende Annahmen zugrunde gelegt:

A. Durchsichtige ponderable Körper enthalten Äther, der sich frei bewegen kann. An der Grenze zweier durchsichtiger Körper, oder eines solchen und eines luftleeren Raumes, ändert sich die Geschwindigkeit des Äthers kontinuierlich.

B. Die Bewegung des Äthers ist irrotationell; es besteht also ein Geschwindigkeitspotential.

C. Die Mitführung der Lichtwellen durch durchsichtige ponderable Körper wird durch den bekannten Fresnel'schen Koeffizienten bestimmt.

Was das Verhalten des in undurchsichtigen Körpern eingeschlossenen Äthers und die Lichtbewegung in solchen Körpern betrifft, wurden keine besonderen Hypothesen eingeführt.

Es zeigte sich nun, daß man mittels der Hypothesen *A*, *B* und *C* die Aberration und verschiedene mit ihr zusammenhängende Erschein-

---

[1]) A. A. Michelson, The relative motion of the earth and the ether, Amer. Journ. of Science (4) 3 (1897), p. 475.

[2]) Art XIV dieser Sammlung.

ungen erklären kann. Die Theorie, zu welcher ich in dieser Weise gelangte, umfaßt als einen besonderen Fall die von Fresnel herrührende, in welcher der Äther als ruhend betrachtet wird, und die sich, was die durchsichtigen ponderablen Körper betrifft, auf die Hypothese C stützt. Andererseits kann man meine Theorie als eine Modifikation der von Stokes vorgeschlagenen betrachten, in welcher die Hypothese B als Ausgangspunkt dient, mit der weiteren Annahme,

D. daß an der Erdoberfläche nirgendwo ein Gleiten des Äthers stattfinde.

Schließt man sich dieser letzteren Auffassung an, so werden die Voraussetzungen A und C überflüssig; wenn nämlich der Äther an der Erdbewegung teilnimmt, so braucht man in einem mit der Erde verbundenen ponderablen Körper nicht mehr zwei sich relativ zueinander verschiebende Bestandteile zu unterscheiden, und kann man von einer Mitführung der Lichtwellen durch den einen dieser Bestandteile nicht mehr reden.

Die Theorie von Stokes ist aber, wie mir scheint, unhaltbar, weil die beiden Hypothesen B und D sich widersprechen.[1]) Diese können nicht gleichzeitig angenommen werden, und da wenig Aussicht vorhanden ist, ohne B zu einer Erklärung der Aberration zu gelangen[2]), so ist es nötig, die Hypothese D fallen zu lassen und also an der Erdoberfläche ein Gleiten des Äthers zuzulassen. Auf diesem Standpunkt kann man aber wieder die Annahmen A und C nicht entbehren.

Abkürzungshalber möge die auf A, B und C beruhende Theorie die *modifizierte* Stokes'sche Theorie heißen. Soweit ich sehe, hat man nur zwischen ihr und der Fresnel'schen Theorie, die übrigens als spezieller Fall in ihr enthalten ist, die Wahl.

§ 2. Bei dem jetzt von Michelson gemachten Versuch durchliefen die beiden miteinander interferierenden Lichtbündel denselben Weg in entgegengesetzter Richtung, und zwar war dieser Weg der Umfang eines Rechtecks $ABCD$, von dem zwei Seiten BC und DA vertikal standen, während die beiden anderen die Richtung Ost-West hatten. Die Dimensionen des Ryerson-Laboratoriums in Chicago gestatteten, diesem Rechteck eine Höhe von 50 und eine Länge von 200 Fuß zu geben. An dem einen Ende A der Grundlinie AB befand sich eine mit einer durchsichtigen Silberschicht belegte Glasplatte P, deren Ebene den Winkel des Rechtecks halbierte; an den anderen Eckpunkten B, C und D waren Spiegel angebracht, die wir nicht näher zu beschreiben brauchen. Die Strahlen einer auf die Verlängerung der Grundlinie an

[1]) Siehe Nr. XIV dieser Sammlung, § 6.
[2]) Vgl. Nr. XVIII.

der Seite von A gestellten Lichtquelle fielen nun in horizontaler Richtung auf die Platte P und teilten sich hier in ein durchgelassenes und ein reflektiertes Bündel. Ersteres folgte dem Wege $ABCDA$ und wurde, nachdem es zu P zurückgekehrt war, zum Teil durch die Glasplatte durchgelassen. Dagegen liefen die zuerst durch P reflektierten Strahlen in der Richtung $ADCBA$; was sie betrifft, kommt es auf den Teil an, der schließlich durch die Platte P in vertikaler Richtung nach unten reflektiert wurde, und mit den vorher genannten, in derselben Richtung sich fortpflanzenden Strahlen zur Interferenz kam. Die Interferenzstreifen wurden in einem Fernrohr beobachtet.

Um 12 Uhr Mittags und um Mitternacht wichen die horizontalen Seiten des genannten Rechtecks wenig von der Richtung der Erdbewegung ab; führte nun die Erde den Äther mit und zwar die unteren Schichten in höherem Maße als die oberen, so würde die Fortpflanzung des Lichtes bei der einen Umlaufsrichtung beschleunigt und bei der anderen verzögert werden. Die Differenz der Äthergeschwindigkeit oben und unten würde also in den Phasendifferenzen eine Änderung zur Folge haben, die von Mittag zu Mitternacht das Vorzeichen wechselt. Es wurde daher untersucht, ob die Interferenzstreifen von einer Stunde zur anderen ihre Lage ändern. Das Resultat war, daß die Verschiebung jedenfalls weniger betrug als den zwanzigsten Teil der Entfernung zweier Streifen. Die größte sich aus den Mittelwerten vieler Ablesungen ergebende Verschiebung hatte nahezu diesen Wert, aber die einzelnen Zahlen gehen zu weit auseinander, um mit Gewißheit einen Schluß auf das Vorhandensein einer so kleinen Verschiebung zu gestatten.

§ 3. Im Obigen war nur von den Geschwindigkeiten die Rede, welche der Äther oben und unten in der Richtung der horizontalen Seiten des Rechtecks hatte. Eine etwas genauere Betrachtung läßt erkennen, daß für jede beliebige Bewegung des Äthers der Einfluß auf die Phasendifferenzen durch das für den Umfang des Rechtecks genommene Linienintegral der Äthergeschwindigkeit bestimmt wird; dieses Integral ist Null, wenn die Bewegung irrotationell ist. Daß sich in den Beobachtungen eine nachweisbare Lagenänderung der Interferenzstreifen *nicht* ergeben hat, steht daher sowohl mit der modifizierten Theorie (freilich auch mit der ursprünglichen Theorie) von Stokes, als mit der Fresnel'schen, und also mit den *beiden* zulässigen Theorien im Einklang.

Das negative Resultat spricht sogar noch etwas kräftiger zugunsten dieser Theorien, als Michelson's Betrachtungen es vermuten lassen. Man kann nämlich zeigen, daß eine merkliche Verschiebung der Streifen nicht nur stattfinden müßte, wenn die vorausgesetzte Strömung des

Äthers schon in einer Höhe, die viel kleiner als der Erdradius ist, unmerkbar wäre, sondern auch bei gewissen sich auf viel größere Höhen erstreckenden nicht irrotationellen Bewegungen. Nimmt man z. B. an, daß die Bewegung des Äthers mit der einer inkompressibeln reibenden und an der Erde haftenden Flüssigkeit übereinstimmt, und denkt man sich die Erdbewegung um 12 Uhr Mittags genau nach Westen gerichtet, so findet man, daß sich von dieser Stunde bis Mitternacht die Streifen um $^1/_7$ ihrer Entfernung hätten verschieben müssen, was gewiß dem Beobachter nicht entgangen wäre.

Ich glaube hiernach sagen zu dürfen, daß man sich, wenn man sich an die Annahme D halten will, schwerlich eine solche Vorstellung von der Bewegung des Äthers wird machen können, daß man nicht in Widerspruch mit Michelson's Versuch gerät.

Freilich ist nicht aus dem Auge zu verlieren, daß dieser Versuch alle Beweiskraft verlieren würde, wenn entweder die Wände des Gebäudes oder die Schlußplatten der evakuierten Röhren, in welchen die Lichtstrahlen liefen, für den Äther undurchdringlich wären. Jedoch halte ich dies, wenigstens was die Glasplatten betrifft, für sehr unwahrscheinlich. Da, wie aus einem bekannten Versuch von Fizeau[1]) hervorgeht, eine längere Wassersäule den Äther ungehindert durchläßt, so kann man sich kaum vorstellen, daß die Platten, welche in Michelson's Vorrichtung zum Abschluß der horizontalen Röhren dienten, die Strahlen im Inneren derselben gegen den Ätherstrom geschützt haben.

§ 4. Von den beiden Theorien, die nach dem in § 1 Gesagten einzig und allein zulässig sind, hat die Fresnel'sche unstreitig den Vorzug der größeren Einfachheit, und ich habe mich daher in späteren Untersuchungen dieser Theorie angeschlossen und angenommen, daß *alle* ponderablen Körper für den Äther *vollkommen* durchlässig sind. Damit ist indes keineswegs gesagt, daß wir die allgemeinere Auffassung, die ich als die modifizierte Stokes'sche Theorie bezeichnet habe, gänzlich verwerfen müssen. Wir können auch diese annehmen, wobei dann alle Entwicklungen, zu welchen die Anwendung der Fresnel'schen Auffassung auf durchsichtige Körper geführt hat, ungeändert bleiben können, so z. B. die Ableitung des Mitführungskoeffizienten aus der elektromagnetischen Lichttheorie.[2])

Ich muß auch bemerken, daß es, was einen älteren von Michelson und Morley ausgeführten Versuch, und die in demselben liegende Schwierigkeit[3]) betrifft, keinen wesentlichen Unterschied macht, ob man

---

[1]) Siehe Art. XIV dieser Sammlung, § 23.

[2]) Von dieser Ableitung wird in einem späteren Artikel die Rede sein.

[3]) Siehe Art. XVII dieser Sammlung.

die eine oder die andere Theorie annimmt. In diesem Versuch, bei welchem zwei Lichtstrahlen miteinander interferierten, die in zueinander senkrechten Richtungen über gleiche Strecken hin und herliefen, hatte sich ebensowenig wie in dem oben betrachteten ein Einfluß der Erdbewegung gezeigt, ein Resultat, das sich durch folgende auch von Fitz Gerald angenommene Hypothese erklären ließ[1]):

E. Die Dimensionen des festen Körpers (Metall oder Stein), der als Träger des optischen Apparates dient, erleiden eine Änderung, sobald er sich relativ zu dem ihm zunächst liegenden Äther mit einer gewissen Geschwindigkeit v verschiebt. Zieht man nämlich in dem Körper zwei Linien L_1 und L_2, von denen die erste die Richtung von v hat, während die andere senkrecht darauf steht, und die, so lange $v = 0$ ist, gleich lang sind, so wird infolge der Bewegung das Verhältnis $\frac{L_1}{L_2}$ den Wert

$$1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

annehmen, wenn c die Geschwindigkeit des Lichtes bedeutet.

Als ich diese Hypothese zuerst aussprach, hatte ich nur die Fresnel'sche Theorie im Auge, und verstand ich also unter v die Geschwindigkeit der Erde. Man wird aber leicht einsehen, daß auch in der modifizierten Stokes'schen Theorie die entsprechende Annahme, in der jetzt v die soeben angegebene Bedeutung haben muß, für die Erklärung des negativen Ergebnisses von Michelson und Morley notwendig und hinreichend ist.

§ 5. Es möge jetzt, mit Beibehaltung der Annahmen *A* und *C*, das in § 3 von dem Einfluß einer beliebigen Ätherbewegung Gesagte noch kurz bewiesen werden. Zu diesem Zwecke wollen wir sowohl was den Äther als auch was die Lichtwellen anbelangt, auf die relative Bewegung in bezug auf die ponderable Materie, also in bezug auf die Erde achten. Ist p die Geschwindigkeit des Äthers in irgendeinem Punkte, c die Geschwindigkeit des Lichtes im ruhenden Äther, ϑ der Winkel zwischen einem Lichtstrahl und der Geschwindigkeit p, und vernachlässigt man Größen von der Ordnung $\frac{p^2}{c^2}$, so findet man für die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls, wenn er sich im Äther fortpflanzt,

$$c + p \cos \vartheta,$$

und wenn er in einem ponderablen Körper mit dem Brechungsexponenten n weiter geht[2]),

---

[1]) Siehe Art. XVII dieser Sammlung.

[2]) Vgl. Art. XIV, § 12.

$$\frac{c}{n} + \frac{p}{n^2} \cos \vartheta,$$

wo das letzte Glied eben auf der Hypothese C beruht.

Die Zeit, während welcher der Strahl ein Element ds durchläuft, ist also

$$\frac{ds}{c + p \cos \vartheta} = \frac{ds}{c} - \frac{p}{c^2} \cos \vartheta \, ds$$

im Äther, und

$$\frac{ds}{\frac{c}{n} + \frac{p}{n^2} \cos \vartheta} = \frac{n\,ds}{c} - \frac{p}{c^2} \cos \vartheta \, ds$$

in irgendeinem ponderablen Körper, so daß die durch die Ätherbewegung hervorgebrachte Zeitersparnis in beiden Fällen durch den Ausdruck

$$\frac{p}{c^2} \cos \vartheta \, ds$$

bestimmt wird.

Es handelt sich nun, wenn man sich stets des Huygens'schen Prinzips bedient, bei allen Erscheinungen der Reflexion, Brechung, Interferenz und Beugung um den Einfluß der Ätherbewegung auf die Phasendifferenz, mit welcher zwei, auf verschiedenen Wegen APB und AQB von einem Punkte A nach einem Punkte B gehende Lichtstrahlen in B zusammenkommen.

Die Änderung dieser Phasendifferenz wird offenbar durch den Unterschied der für die beiden Wege erreichten Zeitersparnisse bestimmt, und hierfür hat man nach dem soeben Gesagten

$$\frac{1}{c^2}\left[\int\limits_{APB} p \cos \vartheta \, ds - \int\limits_{AQB} p \cos \vartheta \, ds\right],$$

oder, wenn man den zweiten Integrationsweg umkehrt,

$$\frac{1}{c^2}\left[\int\limits_{APB} p \cos \vartheta \, ds + \int\limits_{BQA} p \cos \vartheta \, ds\right] = \frac{1}{c^2} \int\limits_{APBQA} p \cos \vartheta \, ds.$$

Für den gesuchten Einfluß ist somit lediglich das Linienintegral der Geschwindigkeit p längs des geschlossenen Weges $APBQA$ maßgebend, woraus sofort folgt, daß er um so erheblicher ist, je weiter die beiden betrachteten Wege auseinander gehen. Nach einem bekannten Satze hängt nämlich das für eine geschlossene Linie berechnete Integral mit der Größe einer von dieser Linie begrenzten Fläche zusammen.

§ 6. Wenn wir das oben Gesagte auf den in dieser Mitteilung besprochenen Versuch anwenden wollen, so können wir damit anfangen,

die Lichtbewegung zu bestimmen, welche in der Ebene des Interferenzbildes durch diejenigen Wellen hervorgebracht wird, welche sich auf dem *einen* Weg fortgepflanzt haben. Sodann betrachten wir die Wellen, welche den *zweiten* Weg eingeschlagen haben, und schließlich die Interferenz der beiden Lichtbewegungen.

Bei der Behandlung der ersten Frage fassen wir zunächst einen bestimmten Punkt L der Lichtquelle und einen bestimmten Punkt W der Bildebene ins Auge. Zwischen diesen können wir zahlreiche gebrochene Linien $L\alpha\beta\gamma \cdots W$ ziehen, derart, daß der Punkt α irgendwo in der ersten spiegelnden oder brechenden Fläche liegt, der Punkt β in der zweiten Fläche usw. Die Bewegung, welche der leuchtende Punkt L in W hervorbringt, können wir nun der Zusammenwirkung vieler Schwingungen, die sich längs der genannten Linien fortgepflanzt haben, zuschreiben. Folgen zwei derselben den Wegen $L\alpha\beta\gamma \cdots W$ und $L\alpha'\beta'\gamma' \cdots W$, so ist der Einfluß der Ätherbewegung auf die Phasendifferenz, die sie in W gegeneinander haben, dem Linienintegral der Geschwindigkeit p für den Weg $L\alpha\beta \cdots W \cdots \beta'\alpha'L$ proportional. Da nun dieser Weg eine Fläche begrenzt, die viel kleiner ist als das in § 2 genannte Rechteck, und da bereits für die dieses letztere umkreisenden Lichtbündel der Einfluß der Bewegung nur sehr klein sein kann, so dürfen wir die Zeitersparnis für alle Wege $L\alpha\beta \cdots W$, $L\alpha'\beta' \cdots W$ usw. gleichsetzen. Folglich interferieren sämtliche in W ankommenden Schwingungen mit denselben Phasendifferenzen, als ob der Äther in Ruhe wäre, und wird an der resultierenden Amplitude nichts geändert. Nur die Phase der resultierenden Schwingung wird unter dem Einfluß der Ätherbewegungen ein wenig verschoben, und zwar um ebensoviel wie die Phasen der einzelnen Schwingungen, die wir miteinander zusammenzusetzen haben, d. h. um einen Betrag, welcher der Zeitersparnis auf dem Wege $L\alpha\beta \cdots W$ entspricht.

Ähnliche Betrachtungen gelten für das zweite der interferierenden Lichtbündel. Auch für die durch dieses in der Bildebene hervorgebrachte Lichtbewegung gilt, daß die Amplitude nicht von der Ätherbewegung beeinflußt, die Phase aber um eine Größe geändert wird, die von dem für einen der Strahle des Bündels, etwa $Lab \cdots W$ berechneten Linienintegral der Geschwindigkeit abhängt.

§ 7.[1]) Die Änderung der Phasendifferenz, mit der die Interferenz stattfindet, wird nun schließlich nach dem in § 5 Gesagten durch den Ausdruck

$$\frac{1}{c^2}\int p \cos \vartheta \, ds$$

gegeben, wo sich das Integral auf den Weg $L\alpha\beta \cdots W \cdots baL$, d. h.

[1]) In dieser Ausgabe hinzugefügt.

bei der von Michelson benutzten Anordnung auf *zwei* Umläufe um das Rechteck in gleichem Sinne bezieht. Ist also J das Integral für einen *einmaligen* Umlauf, dann ist die gesuchte Änderung, wenn man sie in Sekunden ausdrückt

$$\frac{2J}{c^2}$$

und also, wenn man sie, wie gewöhnlich, in Schwingungszeiten oder Wellenlängen angibt,

$$\frac{2J}{c\lambda},$$

wenn λ die Wellenlänge bedeutet.

Wir wollen nun die Größe J für die in § 3 genannte, mit der Strömung einer reibenden Flüssigkeit übereinstimmende Ätherbewegung berechnen. Dabei legen wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt der Erde, die y-Achse durch den Beobachtungsort und die x-Achse in die Richtung der Erdbewegung, von welcher wir annehmen, daß sie den horizontalen Seiten des oftgenannten Rechtecks parallel ist. Wir haben dann[1]) für die Komponenten der Äthergeschwindigkeit in allen Punkten der Ebene des Rechtecks

$$u = \frac{3}{4} R g \frac{x^2 + r^2}{r^3} - \frac{1}{4} R^3 g \frac{3x^2 - r^2}{r^5},$$

$$v = \frac{3}{4} R g x y \frac{r^2 - R^2}{r^5}, \quad w = 0,$$

wenn r die Entfernung des betrachteten Punktes von dem Mittelpunkt bedeutet, R den Radius, und g die Geschwindigkeit der Erde. Nach einem bekannten Satze wird nun das Linienintegral der Geschwindigkeit für eine unendlich kleine Linie, die in der xy-Ebene einen Flächeninhalt ω umschließt, durch den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \omega$$

gegeben.

Man darf dies auf Michelson's Rechteck anwenden, und hat also, wenn man die Länge und Höhe desselben mit a und b bezeichnet, und nach Ausführung der Differentiation

$$x = 0, \quad y = r = R$$

setzt,

$$J = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) ab = \frac{3}{2} \frac{gab}{R}.$$

Die Änderung der Phasendifferenzen, welche, sei es um Mittag oder um Mitternacht, aus der Ätherbewegung entsteht, beträgt also

$$3 \frac{g}{c} \frac{ab}{R\lambda},$$

[1]) Vgl. oben, p. 349.

und hieraus ergibt sich, wenn man beachtet, daß zu den beiden Zeiten die Bewegung entgegengesetzten Einfluß hat, für die Änderung, welche von der einen Zeit zur anderen stattfindet,

$$6 \frac{g}{c} \frac{ab}{R\lambda}.$$

Bei Michelson's Anordnung war $a = 6000$ und $b = 1500\,cM$. Setzt man ferner $R = 6{,}4 \times 10^8\,cM$, $\lambda = 5{,}9 \times 10^{-5}\,cM$, und berücksichtigt man, daß $\frac{g}{c} = 10^{-4}$ ist, so erhält man für den obigen Ausdruck ungefähr $\frac{1}{7}$. Es wäre daher, wie bereits in § 3 gesagt wurde, eine Verschiebung der Interferenzstreifen um diesen Bruchteil ihrer Entfernung zu erwarten.

XXI.

Sur la méthode du miroir tournant pour la détermination de la vitesse de la lumière.

(Archives néerlandaises (2) 6 [1901], p. 303.)

Dans un mémoire de l'année passée Cornu[1]) a émis quelques doutes sur l'exactitude de la méthode du miroir tournant, qui a été employée par Fizeau et Foucault et dont Michelson et Newcomb se sont servis dans leurs travaux bien connus sur la vitesse de la lumière. Le physicien français se demande d'abord si on a bien le droit d'appliquer les lois ordinaires de la réflexion à un miroir qui est animé d'une rotation rapide; il craint qu'un tel miroir n'entraîne un peu le faisceau lumineux et que, pour cette raison, le résultat des mesures ne soit un peu trop bas. Une erreur pourrait également résulter de ce que le rayon qui est reçu par le miroir fixe se déplace sur la surface

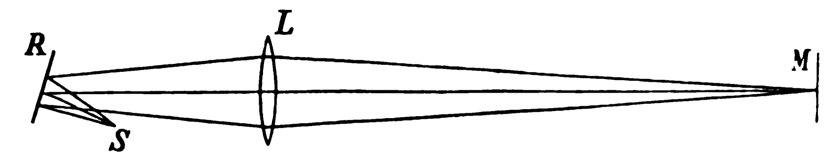


Fig. 37.

de ce dernier avec une vitesse qui devient comparable à celle de la lumière. Enfin, Cornu parle de l'entraînement des ondes par le tourbillon d'air qui entoure le miroir mobile, et d'une certaine difficulté qu'on trouve à décrire exactement le cours des rayons et le mode de formation des images.

Ces remarques m'ont conduit à quelques considérations que je me permets de communiquer dans les pages suivantes. Quoiqu'elles laissent encore beaucoup à désirer au point de vue de la rigueur, elles me semblent bien propres à dissiper les doutes que je viens de rappeler.

---

[1]) A. Cornu, Sur la vitesse de la lumière. Rapports présentés au Congrès international de Physique de 1900, T. 2, p. 225.

§ 1. *Expériences de* Michelson *et de* Newcomb. Je commencerai par une description sommaire des appareils dont se sont servis les savants américains et j'en indiquerai approximativement les dimensions. Dans les observations de Michelson[1]) (Fig. 37), le miroir tournant R, dont le diamètre était de 3 cm, se trouvait à une distance de 1020 cm de la fente éclairée S, et à une distance de 3960 cm de la lentille convergente L. Celle-ci avait une distance focale de 4600 cm et un diamètre de 20 cm.

Le miroir fixe M était plan; il était éloigné de 60 500 cm, et avait à peu près la même grandeur que la lentille. Pour 257 révolutions par seconde, la déviation de l'image de la fente s'est élevée à 13,3 cm. Ajoutons encore que, dans une répétion[2]) de ses mesures, Michelson

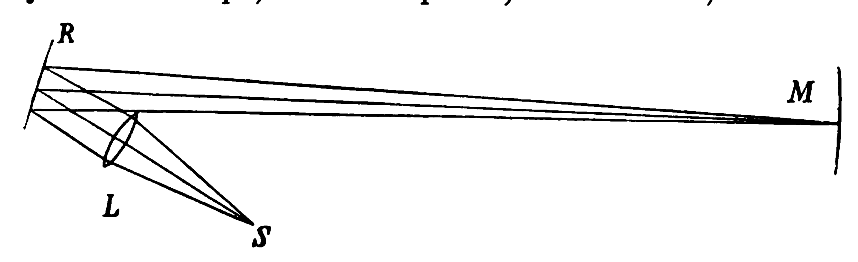


Fig. 38.

a remplacé le miroir plan M par un miroir légèrement concave, de 36 cm. de diamètre.

Le dispositif de Newcomb[3]) (Fig. 38) a été un peu différent. Il a placé la lentille L entre la fente S et le miroir tournant, tout près de ce dernier. Avec la fente, cette lentille constituait un collimateur, et le faisceau de retour était reçu dans une lunette à laquelle on pouvait donner une rotation autour d'un axe vertical coïncidant avec celui du miroir mobile. La lunette se trouvait dans un plan horizontal situé au dessus ou au dessous du collimateur, ce qui exigeait une certaine hauteur (8,5 cm.) du miroir. Ce dernier était un prisme carré, poli sur les quatre faces, ce qui contribuait à augmenter l'éclat de l'image. Dans le même but, on employait deux miroirs fixes, un peu concaves et placés l'un à côté de l'autre.

Les dimensions de ces appareils ont été les suivantes:

Longueur du collimateur et de la lunette 230 cm.

---

[1]) A. A. Michelson, Experimental determination of the velocity of light. Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. I, Part III, p. 115, 1880.

[2]) A. A. Michelson, Supplementary measures of the velocity of light in air and water. Astronomical papers etc., Vol. II, p. 237, 1883.

[3]) S. Newcomb, Measures of the velocity of light. Astronomical papers etc., Vol. II, p. 113, 1882.

Diamètre des objectifs 3,5 cm.

Largeur des faces du miroir tournant 3,75 cm.

Diamètre de chaque miroir fixe 40 cm.

Rayon de courbure de ces miroirs 300 000 cm.

Distance des miroirs (dans les expériences que Newcomb considère comme les meilleures) 370 000 cm.

Le nombre des révolutions par seconde a été d'environ 210, ce qui a produit une déviation angulaire du rayon de retour de 13000″. C'est le double de cet angle qu'on a directement mesuré; en effet, on a toujours combiné deux expériences dans lesquelles le miroir a tourné en directions opposées.

Le résultat final de Newcomb,

$$299\,860 \pm 30 \text{ kilomètres par seconde,}$$

s'accorde très bien avec les nombres

$$299\,910 \pm 50$$

et

$$299\,850 \pm 60$$

que Michelson[1]) a déduits de ses deux séries d'expériences.

§ 2. *Remarques sur la formation de l'image.* Le cours des rayons soulève quelques questions d'optique géométrique sur lesquelles je n'insisterai pas longuement. Je rappellerai seulement une condition essentielle, sans laquelle la méthode serait impraticable, c'est que, s'il n'y a pas de rotation, la position de l'image observée de la fente — que je nommerai la *deuxième* image — doit être indépendante de la position particulière qu'on a donnée au miroir mobile. Il en sera rigoureusement ainsi, pour chaque forme du miroir M, tant que la *première* image de la fente, formée par la lentille L, se trouve exactement dans la surface de M; et même, dans le cas d'un miroir concave, ayant son centre de courbure dans l'axe de rotation de R, la condition sera remplie encore si la première image est située en avant ou en arrière de M.

En effet, en désignant par l la distance LM, par l' la distance de la première image au miroir fixe, et par Δi la variation qu'une légère rotation de R fait subir à l'angle d'incidence sur M pour le rayon central, c'est à dire pour celui qui a été réfléchi par le centre de R, on trouve facilement

$$\frac{2l'\Delta i}{l \pm l'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

pour le déplacement correspondant du point central de la deuxième image. Dans cette formule, où il faut prendre le signe supérieur si

[1]) Astronomical papers etc., Vol. II, p. 244.

la première image se trouve derrière M, le déplacement est mesuré par l'angle sous lequel il serait vu par un observateur placé au lieu de la lentille L. Or, ce déplacement s'annule dans l'un des cas que je viens d'indiquer parce que $l' = 0$, et dans l'autre parce que $\Delta i = 0$.

Dès que l'expression (1) est différente de 0, la rotation du miroir imprimera au point central de la deuxième image un mouvement horizontal qui est entièrement indépendant de la déviation qu'il s'agit d'observer. Le manque de netteté de la deuxième image qui en est la conséquence, s'ajoutera à celui qui, pour chaque position particulière du miroir tournant, est produit par le pointage imparfait. J'ai calculé que dans les expériences de Michelson ces deux conséquences d'un défaut de pointage ont à peu près la même importance.

Même dans le cas où $l' = 0$, il y a encore la *diffraction* qui nuira à la netteté de l'image; il en faudra tenir compte dans la considération de la première image aussi bien que de la seconde. On voit facilement que chez Michelson c'est le miroir tournant qui joue le rôle du diaphragme relativement le plus étroit, et que la largeur b de ce miroir, multipliée par le cosinus de l'angle d'incidence α, doit être regardée comme la largeur de l'ouverture qui produit la diffraction dans la première image. On en déduit que la largeur de cette image sera d'un ordre de grandeur donné par

$$\frac{\lambda l}{b \cos \alpha},$$

où λ est la longueur d'onde. La valeur de cette expression est environ 1,2 cm., l'angle d'incidence ayant été de 9°.

Dans l'appareil de Newcomb c'est plutôt l'objectif du collimateur qui détermine le phénomène; ici je trouve pour la première image une largeur d'environ 6 centimètres. On peut maintenant regarder cette image comme un objet qui envoie ses rayons vers la lunette; c'est ainsi que les effets de diffraction de la première image se font sentir dans la seconde, où ils se trouvent encore compliqués par la diffraction qui se produit sur le chemin de retour. Il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails; en effet, comme l'image dans la lunette de l'objet en question a une largeur comparable à celle qui serait causée par la deuxième diffraction seule, on pourra se borner à considérer cette dernière, s'il s'agit seulement d'évaluer le degré de netteté de la deuxième image. En tenant compte de ce que le miroir R n'est pas toujours entièrement éclairé par le faisceau de retour, je trouve que chez Newcomb la largeur angulaire de l'image observée doit avoir été d'environ 8″, et que chez Michelson la diffraction a causé un élargissement de 0,04 cm. Ce dernier chiffre s'accorde assez bien avec le degré d'exactitude qui a été atteint, mais il semble que les mesures

de Newcomb auraient été encore plus précises, si la diffraction avait été la principale cause d'erreur. Sous ce rapport il est intéressant de noter que dans une observation où le miroir R était tenu immobile[1]) la largeur de la première image a même surpassé le diamètre du miroir fixe. Pour une raison que je ne saurais indiquer, la rotation rapide a amélioré les images.

Il est encore intéressant de comparer entre eux les effets de la diffraction et d'un pointage défectueux; en effet, on calcule facilement la valeur qu'on peut attribuer à la distance l' dans l'expression (1), sans que le manque de netteté dû à l'erreur de pointage surpasse celui qui est la suite de la diffraction. De cette manière je suis arrivé à $l' = 800$ cm. pour les expériences de Michelson; dans celles de Newcomb la première image peut même avoir été éloiguée du miroir fixe de 10000 cm. sans que la deuxième image en souffrirait beaucoup.

§ 3. *Réflexion par un miroir tournant.* Abordons maintenant les questions posées par Cornu, en négligeant d'abord toute influence de l'air et en supposant que l'éther n'ait pas participé à la rotation. On sait quel a été le succès de cette hypothèse d'un éther immobile dans la théorie de l'aberration astronomique et des phénomènes qui s'y rattachent. En l'adoptant également dans le problème qui nous occupe actuellement, on aura l'avantage que l'influence de la rotation ne s'exerce qu'au moment où les ondes se réfléchissent, leur propagation dans l'éther n'en étant aucunement modifiée. Malheureusement, malgré cette simplification, il y a des difficultés mathématiques considérables; aussi n'ai je pas réussi à établir pour des corps tournants une théorie aussi simple et aussi rigoureuse que celle qui s'applique à un système animé d'un mouvement de translation. J'ai dû me contenter d'une application du principe de Huygens sous la forme qu'on lui donne dans la théorie élémentaire de la diffraction.

Il est naturel de penser d'abord à un entraînement des rayons par le miroir tournant. Si un tel entraînement avait pour effet de faire tourner le rayon réfléchi dans le sens de la rotation, d'un certain angle ε, à partir de la direction qu'il aurait suivant la loi ordinaire, on démontre facilement que le changement final dans la direction du rayon de retour serait la difference des valeurs de ε pour les deux réflexions successives par le miroir mobile. Il n'en résulterait une erreur que dans le cas où les deux angles d'incidence diffèrent suffisamment entre eux pour conduire à des entraînements sensiblement inégaux.[2])

---

[1]) Newcomb, l. c. p. 192.

[2]) Voyez: Michelson, Astronomical papers, Vol. I, p. 142 et Cornu, l. c., p. 243.

Je crois cependant pouvoir démontrer qu'un tel changement de la direction de la lumière réfléchie n'existe pas du tout et que le seul effet de la rotation est de modifier un peu la courbure des ondes.

Soient (Fig. 39) L un point lumineux, A le centre du miroir tournant, PP' sa position au moment t où une vibration partie de L au moment t_0 atteint le point A, AN la normale de PP', α l'angle LAN, Q un point quelconque de la surface, $AQ = x$, $LA = r$, et ω la vitesse de rotation. Cette dernière sera nommée positive si le mouvement a lieu dans le sens de la flèche,

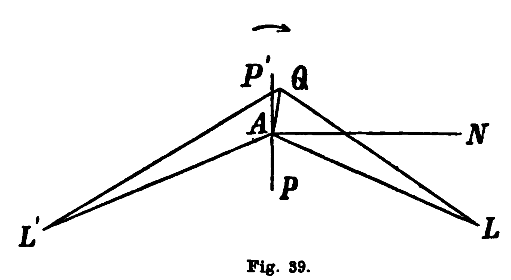


Fig. 39.

c'est-à-dire s'il tend à diminuer l'angle d'incidence, et la distance x sera positive si la direction AQ fait avec AL un angle obtus. Cela posé, on peut calculer le moment où une vibration partie de L à l'instant t_0 rencontrera le point Q de la surface mobile. Évidemment, ce moment sera un peu postérieur au temps t; si on l'indique par $t + \tau$, il s'agira de calculer la valeur de τ. Elle s'annule pour $x = 0$, et, pour des valeurs suffisamment petites de x, elle pourra se développer en série suivant les puissances croissantes de x. Je négligerai les puissances supérieures à la deuxième, et, pour simplifier les formules, je prendrai pour unité de longueur la distance à laquelle la lumière se propage dans l'unité de temps.

A l'instant $t + \tau$, l'angle LAQ est devenu $90^0 + \alpha - \omega\tau$; de plus, on aura

$$LA = r, \quad LQ = r + \tau.$$

Par conséquent, le triangle LAQ nous donne la formule

$$(r + \tau)^2 = r^2 + 2rx \sin(\alpha - \omega\tau) + x^2,$$

d'où

$$\tau = x \sin\alpha + \frac{x^2}{2r} \cos^2\alpha - \omega x^2 \sin\alpha \cos\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ce qui est encore vrai pour des valeurs négatives de x et de ω.

Soit maintenant AL' une direction fixe derrière le miroir qui fait avec la direction PP' du miroir, correspondant au temps t, un angle $L'AP = LAP$. Sur cette ligne il y a un point L', jouissant de la propriété que, si une vibration partie de ce point arrive en A à l'instant t, une vibration partie au même moment atteindra précisément à l'instant $t + \tau$ le point Q déplacé. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$(r' + \tau)^2 = r'^2 + 2r'x \sin(\alpha + \omega\tau) + x^2.$$

Cette équation, dans laquelle $r' = AL'$, a été déduite du triangle $L'AQ$, dont l'angle $L'AQ$ est devenu $90^0 + \alpha + \omega\tau$.

En employant la valeur (2), on trouve

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - 4\omega \operatorname{tg} \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

On voit donc que les vibrations réfléchies dans l'espace devant le miroir ont entre elles les mêmes différences de phase que si elles avaient été émises par le point L'. Cela suffit pour démontrer que des ondes sphériques au centre L sont changées en des ondes dont le centre est en L'. Mais, en même temps, il résulte de notre construction que l'angle de réflexion n'a pas été modifié.

La formule (3) pourra aussi être appliquée à des rayons incidents qui convergent vers un point situé derrière le miroir; on fera alors r négatif. En général, l'effet de la rotation est équivalent à celui d'une légère courbure du miroir; elle provoque dans la courbure des ondes un petit changement $4\omega \operatorname{tg} \alpha$. Si, pour le miroir en repos, la première image se trouvait exactement dans la surface du miroir éloigné, la rotation la déplacerait en avant ou en arrière de cette surface sur une certaine distance qui serait de 5 cm. dans les expériences de Michelson et de 6000 cm. dans celles de Newcomb. Or, nous avons déjà vu qu'une telle valeur de l' ne changerait pas d'une manière appréciable la qualité de la deuxième image. De plus, il ne faut pas perdre de vue que la modification de la courbure des ondes qui est produite par la première réflexion sur le miroir tournant, sera compensée pour la plus grande partie par celle qui a lieu dans la deuxième réflexion; elle le serait même totalement si l'angle d'incidence était le même dans les deux cas.

A la rigueur il faudrait encore tenir compte du changement de la longueur d'onde dans la réflexion sur le miroir tournant, changement qui n'est pas le même pour les deux moitiés de ce miroir, et de ce que l'intensité réfléchie varie également d'un point du miroir à un autre. Il me semble pourtant qu'on pourra négliger ces deux effets dont l'influence doit être extrêmement faible.

§ 4. *Propagation entre les deux miroirs et réflexion par le miroir fixe.* Des nombres qui ont été donnés au § 1 on déduit que la première image de la fente se déplace horizontalement sur la surface du miroir éloigné avec une vitesse qui s'élève à 0,0013 de la vitesse de la lumière dans le dispositif de Michelson et à 0,032 de cette vitesse dans celui de Newcomb. Dans ces circonstances, il est difficile de se former une idée exacte de la propagation des ondes qui forment cette image.

Cela tient surtout à ce que la diffraction joue un rôle si important et à ce qu'il y a rotation et non pas translation du faisceau lumineux. Quant à la réflexion sur le miroir fixe, elle ne me semble guère pouvoir amener de nouvelles complications. Si ce miroir était plan et pouvait être considéré comme un réflecteur parfait, le mouvement réfléchi serait toujours l'image exacte par rapport à la surface polie du mouvement qu'on trouverait de l'autre côté de ce plan si le miroir n'existait pas. On peut dire aussi que le mouvement réfléchi peut être considéré comme produit par une fente, une lentille et un miroir tournant qui seraient disposés de l'autre côté du plan réfléchissant, symétriquement par rapport à la fente, la lentille et le miroir tournant réels.

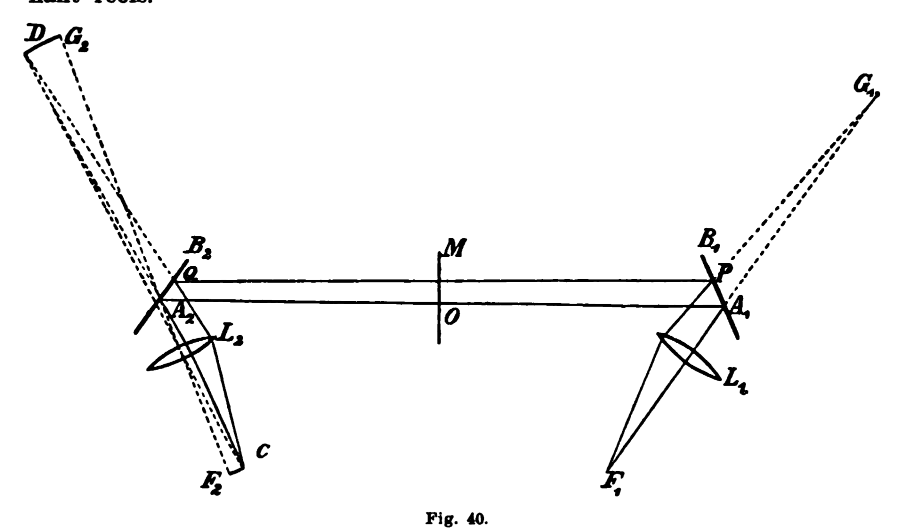


Fig. 40.

§ 5. *Application du principe de* Huygens. Considérons maintenant comme un cas de diffraction tout ce qui se passe dans les expériences. Pour simplifier, je considérerai le collimateur et la lunette de Newcomb, mais je regarderai comme plan le miroir M. Je ferai aussi abstraction de la diffraction qui se produit dans le collimateur et dans la lunette, et de celle qui pourrait accompagner la réflexion sur M. On pourra négliger cette dernière en vertu de la grande largeur de M, et on ne s'écartera guère de la vérité en faisant dépendre la diffraction qui existe réellement, non pas de l'ouverture des objectifs, mais de la largeur du miroir mobile.

Soient (Fig. 40) A_2 le centre du miroir tournant A_2B_2, L_2 l'objectif de la lunette, F_2 le fil de repère, G_2 le point conjugué de F_2 par rapport à L_2, A_1B_1 l'image du miroir tournant par rapport au miroir fixe M, L_1 l'image de la lentille du collimateur, F_1 celle de la fente, G_1 le point conjugué de F_1 par rapport à L_1. Je supposerai

que F_1, A_1, G_1 d'un côté et F_2, A_2, G_2 de l'autre soient en ligne droite, et que l'axe de rotation passe par le point A_2. Les phénomènes se passeront comme si, le miroir M étant transparent, F_1 était une fente réelle, dont les rayons seraient réfléchis par les *deux* miroirs tournants A_1B_1 et A_2B_2.

Soit maintenant C un point dans le voisinage de F_2, situé de telle manière que, si D est le point conjugué par rapport à L_2, les distances A_2D et A_2G_2 soient égales entre elles.

Nous allons considérer les vibrations qui arrivent en C. Si P et Q sont des points arbitrairement choisis de A_1B_1 et A_2B_2, l'un des chemins que la lumière peut suivre se compose d'un rayon F_1P, réfracté par la lentille L_1, de la ligne droite PQ, et du rayon QC, réfracté par la lentille L_2.

Nous comparerons ce chemin avec le chemin central $F_1A_1A_2C$ Pour qu'une vibration qui se propage suivant cette dernière ligne arrive en C à un moment déterminé t, il faut qu'elle soit partie de F_1 à un certain instant t_0; j'indiquerai par t_1 et t_2 les moments où elle aura rencontré les deux miroirs. Ces trois derniers instants ne seront plus les mêmes si on exige que, après avoir parcouru le chemin F_1PQC, la vibration arrive en C au même instant t; on peut alors représenter les trois temps par

$$t_0 + \tau, \quad t_1 + \tau_1, \quad t_2 + \tau_2.$$

Posons:

$$A_1G_1 = l_1, \quad A_2G_2 = l_2, \quad A_1O = A_2O = l,$$

$$A_1P = x_1, \quad A_2Q = x_2,$$

$$\angle F_1A_1O = 2\alpha, \quad \angle F_2A_2O = 2\beta, \quad \angle G_2A_2D = \xi,$$

et désignons par φ l'angle que fait avec A_1O (ou A_2O) la normale du miroir à l'instant t_1. Alors, comme $t_2 = t_1 + 2l$, cet angle aura les valeurs

$$\varphi + \omega\tau_1, \quad \text{et } \varphi + p + \omega\tau_2,$$

où $p = 2\omega l$, aux instants $t_1 + \tau_1$ et $t_2 + \tau_2$.

En considérant la longueur de G_1P, PQ et QD on trouve pour les inconnues τ, τ_1, τ_2 les trois équations suivantes:

$$2l_1(\tau - \tau_1) + (\tau - \tau_1)^2 = -2l_1x_1 \sin(2\alpha - \varphi - \omega\tau_1) + x_1^2,$$

$$\begin{aligned}4l(\tau_2 - \tau_1) + (\tau_2 - \tau_1)^2 = -4lx_1 \sin(\varphi + \omega\tau_1) - \\ -4lx_2 \sin(\varphi + p + \omega\tau_2) + \\ + x_1^2 - 2x_1x_2 \cos(2\varphi + p + \omega\tau_1 + \omega\tau_2) + x_2^2,\end{aligned}$$

$$2l_2\tau_2 + \tau_2^2 = -2l_2x_2 \sin(2\beta - \varphi - p - \xi - \omega\tau_2) + x_2^2.$$

Enfin, par un développement en série suivant les puissances crois-

santes de x_1, x_2 et ξ, dans lequel on néglige les termes d'un ordre supérieur au deuxième, on obtient la valeur

$$\tau = -2x_1 \sin(\alpha - \varphi)\cos\alpha - 2x_2 \sin(\beta - \varphi - p)\cos\beta +$$
$$+ x_2\xi \cos(2\beta - \varphi - p) + \frac{x_1^2\cos^2(2\alpha - \varphi)}{2l_1} + \frac{x_2^2\cos^2(2\beta - \varphi - p)}{2l_2} -$$
$$- \frac{\{x_1\cos\varphi - x_2\cos(\varphi + p)\}^2}{4l} +$$
$$+ 2\omega[x_1^2\cos(\alpha - \varphi)\cos\alpha\sin\varphi - 2x_1x_2\cos(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi - p)\times$$
$$\times \cos\alpha\cos\beta - x_2^2\cos(\beta - \varphi - p)\cos\beta\sin(2\beta - \varphi - p)]. \quad (4)$$

Supposons maintenant que les vibrations en un point de la fente soient représentées par

$$\varrho = a\cos nt;$$

alors on aura pour la vibration résultante au point C une expression de la forme

$$\varrho' = a\int_{-s}^{+s}\int_{-s}^{+s} q\cos n(t + \tau + c)\,dx_1\,dx_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dans laquelle s désigne la demi-largeur du miroir mobile, c une constante, et q un facteur qui représente l'affaiblissement de l'amplitude dans les trois réflexions sur le chemin qui correspond à la ligne F_1PQC de notre figure.

Je n'insisterai pas sur toutes les conséquences qu'on peut tirer des formules (4) et (5). On en déduit p. e. que, dans le cas $\omega = 0$, le lieu occupé par la deuxième image sera indépendant de la position du miroir tournant, pourvu que la première image coïncide avec le miroir fixe, ce qui s'exprime par $l_1 = l$. On retrouve aussi l'effet du changement de courbure des ondes, dont nous avons parlé au § 3.

§ 6. *Position du milieu de l'image observée.* Ce qui nous intéresse surtout, c'est la question de savoir si réellement, comme on l'a toujours admis, l'axe de la lunette doit former avec celui du collimateur un angle $4\omega l = 2p$, pour que le milieu de la deuxième image coïncide avec le fil de repère. L'angle aura cette valeur $2p$, si $\beta = \alpha + p$. Il s'agit donc de démontrer que, dans ce dernier cas, le maximum d'intensité se trouvera au point F_2, où $\xi = 0$; pour s'en convaincre il suffira évidemment de faire voir que la distribution de l'intensité lumineuse dans le plan F_2C est symétrique par rapport au point F_2; c'est-à-dire qu'elle est égale pour des valeurs égales de ξ, à signes opposés. C'est ce que nous allons prouver, en considérant d'abord comme constant le facteur q.

Dans le calcul du temps τ dont dépendent les différences de phase,

nous avons commencé par choisir un instant déterminé pour lequel nous voulions connaître le mouvement lumineux en C, et nous avons désigné par φ l'angle entre la normale du miroir et la ligne $A_1 A_2$ au moment où le rayon $F_1 A_1 A_2 C$ doit frapper le miroir en A, pour arriver en C au moment t fixé. Il est donc clair que cet angle φ variera avec le temps et que la quantité τ elle-même sera une fonction de t. Cependant, comparés avec la succession des vibrations, ces changements de φ et de τ sont excessivement lents; ils resteront imperceptibles pendant des milliers d'oscillations. Dans le calcul de (5) on pourra donc regarder le terme τ comme constant, à la condition cependant de lui attribuer une nouvelle valeur, si, après avoir déterminé ϱ' pour un certain moment t, on veut faire la même chose pour un moment postérieur.

Dans chaque révolution du miroir, il y a un certain intervalle de temps $\varDelta$, pendant lequel le point C reçoit de la lumière, et dans cet intervalle il y a un moment déterminé, que je nommerai t', et qui est le temps d'arrivée en C pour un rayon $F_1 A_1 A_2 C$ qui a atteint le point A_1 au moment où la normale du miroir coïncide avec la bisectrice de l'angle $A_2 A_1 F_1$. Pour ce moment t', on a $\varphi = \alpha$, et pour un moment voisin $t' + \theta$, $\varphi = \alpha + \omega\theta$.

Quant à l'intensité observée, elle dépendra de l'énergie totale que le point C reçoit dans l'intervalle $\varDelta$. Par conséquent, si a' est l'amplitude de la vibration résultante ϱ', calculée pour le moment $t = t' + \theta$, on pourra considérer cette intensité comme proportionnelle à l'expression

$$I = \int a'^2 d\theta,$$

dans laquelle l'intégration doit s'étendre à toutes les valeurs négatives et positives de θ, pour lesquelles la vibration ϱ' a une valeur sensible.

La valeur de $\omega\theta$ sera toujours de l'ordre de grandeur $\frac{s}{2l}$; donc, si nous continuons à négliger des termes qui contiennent des facteurs de l'ordre s^3 ou $s^2\xi$, nous pourrons remplacer $\varphi = \alpha + \omega\theta$ par l'angle α lui-même dans tous les termes du second ordre de la formule (4), et omettre les quantités en θ^2 dans ceux du premier ordre. Si on fait en même temps $\beta = \alpha + p$, on aura

$$\begin{aligned} \tau = 2\omega x_1 \theta \cos\alpha + 2\omega x_2 \theta \cos(\alpha + p) + x_2 \xi \cos(\alpha + p) + \\ + \frac{x_1^2 \cos^2\alpha}{2 l_1} + \frac{x_2^2 \cos^2(\alpha + p)}{2 l_2} - \frac{\{x_1 \cos\alpha - x_2 \cos(\alpha + p)\}^2}{4 l} + \\ + \omega[x_1^2 \sin 2\alpha - x_2^2 \sin 2(\alpha + p)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

Soient maintenant C et C' deux points de part et d'autre de F_2, correspondant aux valeurs ξ et $-\xi$; l'instant que nous venons d'indi-

quer par t' sera le même pour ces points. Calculons l'intensité lumineuse en C pour le moment $t'+\theta$, et en C' pour le moment $t'-\theta$. Nous aurons les deux intégrales

$$\varrho'_{C,t'+\theta} = aq\int_{-s}^{+s}\int_{-s}^{+s}\cos n(t'+\theta+\tau+c)\,dx_1\,dx_2\,, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\varrho'_{C',t'-\theta} = aq\int_{-s}^{+s}\int_{-s}^{+s}\cos n(t'-\theta+\tau'+c)\,dx_1\,dx_2\,, \quad . \quad . \quad (8)$$

où τ' est ce que devient τ, si on y remplace θ par $-\theta$, ξ par $-\xi$. Mais la valeur de l'intégrale (8) n'est pas changée par un renversement des signes de x_1 et x_2 dans la fonction à intégrer. Alors τ' devient égale à τ, parce que l'expression (6) est homogène et du second degré par rapport à x_1, x_2, θ, ξ, et la seule différence entre (7) et (8) sera qu'il y a $t'+\theta$ dans une des formules et $t'-\theta$ dans l'autre. Comme on sait, cela n'a aucune influence sur *l'amplitude* de la vibration résultante, d'où l'on voit que

$$a'_{C',t'-\theta} = a'_{C,t'+\theta}\,,$$

et qu'en fin de compte

$$I_{C'} = I_C\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

C'est bien l'égalité qu'il s'agissait de démontrer. Elle existe quels que soient les défauts de pointage, l'influence de la rotation sur la forme des ondes et les complications dues à la diffraction. Ces causes peuvent diminuer la netteté de l'image, mais le point central aura toujours la position que lui assigne la théorie élémentaire de l'expérience.

Cependant, il ne faut pas oublier que nous nous sommes permis quelques simplifications. D'abord nous avons omis, dans le développement de τ, les quantités du troisième ordre par rapport à x_1, x_2 et ξ. Ces termes sont comparables à l'une des expressions suivantes

$$\frac{s^3}{l^2}\,,\quad \frac{s^2\xi}{l}\,,\quad s\xi^2\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\frac{\omega s^3}{l}\,,\quad \omega^2 s^3\,,\quad \omega s^2\xi\,,$$

dont je ne considérerai que les trois premières, attendu que ωl est inférieur à l'unité.

Dans le calcul de ces valeurs il faut se rappeler l'unité de longueur qui a été employée dans nos équations. On prendra pour s la demi-largeur du miroir tournant, et pour ξ la demi-largeur angulaire de l'image élargie par la diffraction. Je trouve ainsi que les temps qui sont représentés par les grandeurs (10) sont tous inférieurs à la millième

partie de la durée d'une vibration; les différences de phase qui correspondent à ces temps ne peuvent donc avoir aucune influence appréciable sur les phénomènes observés.

Il me semble qu'il en est de même de la variabilité du facteur q dans la formule (5). En effet, cette variabilité provient de ce que les angles qu'ils font avec les normales des miroirs ne sont pas les mêmes pour les divers chemins, tels que $F_1 P Q C$, dont il a été question au § 5. La variation de ces angles d'un chemin à un autre est de l'ordre de grandeur $\frac{s}{l}$, et si, ce qui n'est guère probable, la variabilité du facteur q donnait lieu à un déplacement angulaire de l'image de cette même grandeur $\frac{s}{l}$, le résultat final de Newcomb n'en serait faux que d'une dix-millième partie.

§ 7. *Influence de l'air.* Dans le tourbillon d'air qui environne le miroir mobile et que les rayons doivent traverser quatre fois, de la périphérie au centre ou vice versa, la densité va en décroissant vers le centre; il peut donc y avoir réfraction dans le passage d'une couche à une autre.

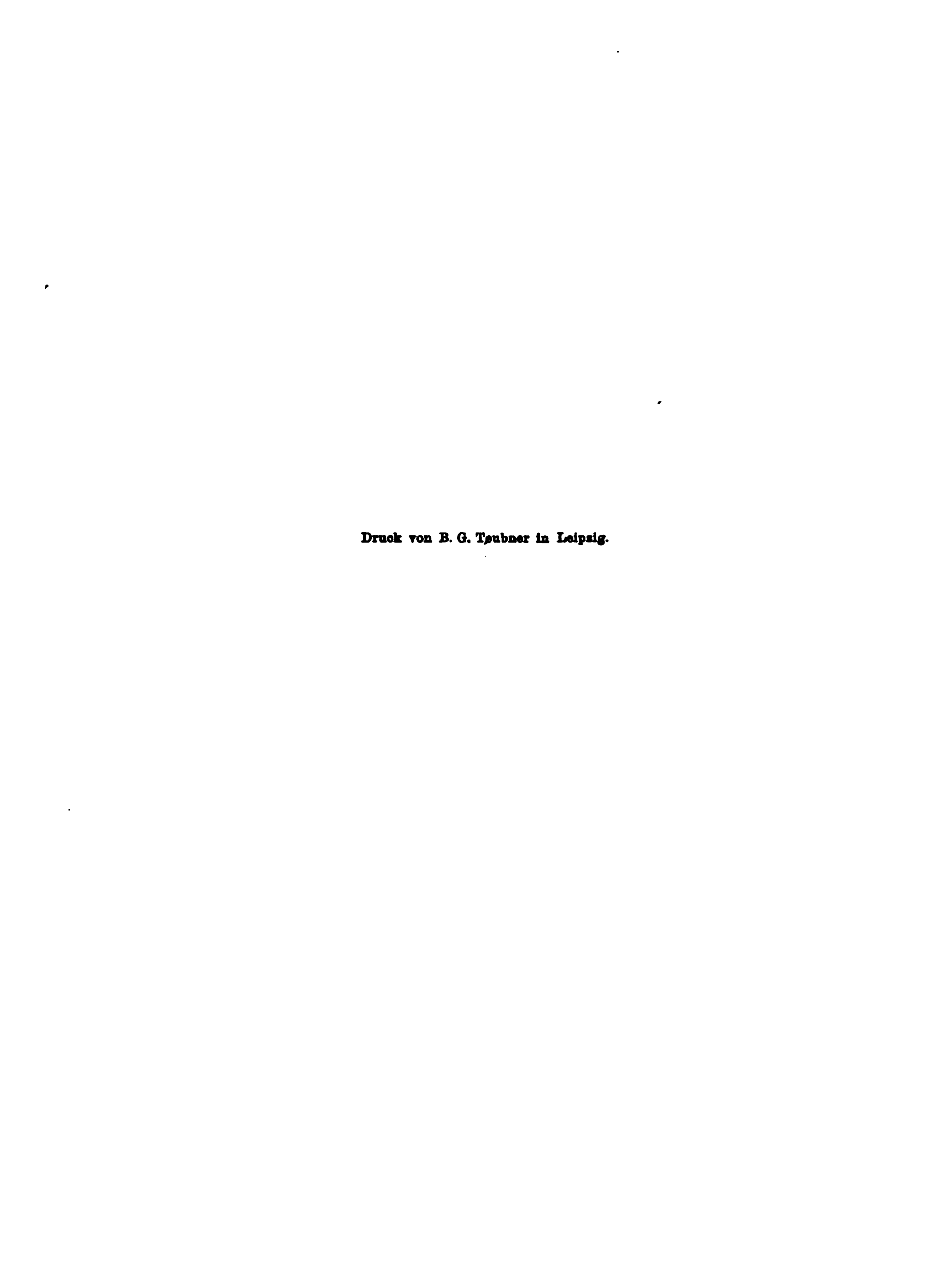
Abstraction faite pour un moment de l'entraînement des ondes par la matière en mouvement, on peut dire que si les couches d'égale densité suivent des surfaces de révolution ayant pour axes l'axe de rotation A (Fig. 40) du miroir, les rayons qui se dirigent vers le centre A, dans le plan horizontal de la figure, ne dévieront pas de la ligne droite. La forme des couches fût-elle différente, mais toujours symétrique par rapport à un plan vertical passant par A et perpendiculaire au miroir, le rayon qui sort du tourbillon ferait encore avec le miroir le même angle que le rayon qui entre, et ce serait comme si le miroir avait été un peu déplacé parallèlement à lui-même. Enfin, dans le cas où cette symétrie ferait défaut, les rayons de retour subiraient une déviation qui tendrait à compenser celle qu'ils ont reçue dans leur premier passage à travers le tourbillon; il y aurait compensation parfaite si les rayons retrouvaient la masse d'air raréfié dans la même position et le même état. Même dans ce dernier cas d'un tourbillon asymétrique, l'erreur résiduelle qui existera parce que le tourbillon a suivi le miroir dans sa rotation, me semble devoir être extrêmement petite. Pour s'en assurer, il suffit de faire le calcul pour un cas bien simple. Supposons qu' au centre du tourbillon la densité ait été réduite à la moitié de la densité atmosphérique — ce qui peut bien arriver — et que les couches d'air soient traversées sous une incidence de 5° (l'angle d'incidence sur le miroir ayant été d'environ 10°.) Alors, dans la propagation vers le miroir, il y aurait une déviation de 3″. Si la sixième

partie de cette déviation restait sans compensation, il en résulterait une erreur de 11 kilomètres dans le résultat de Newcomb.

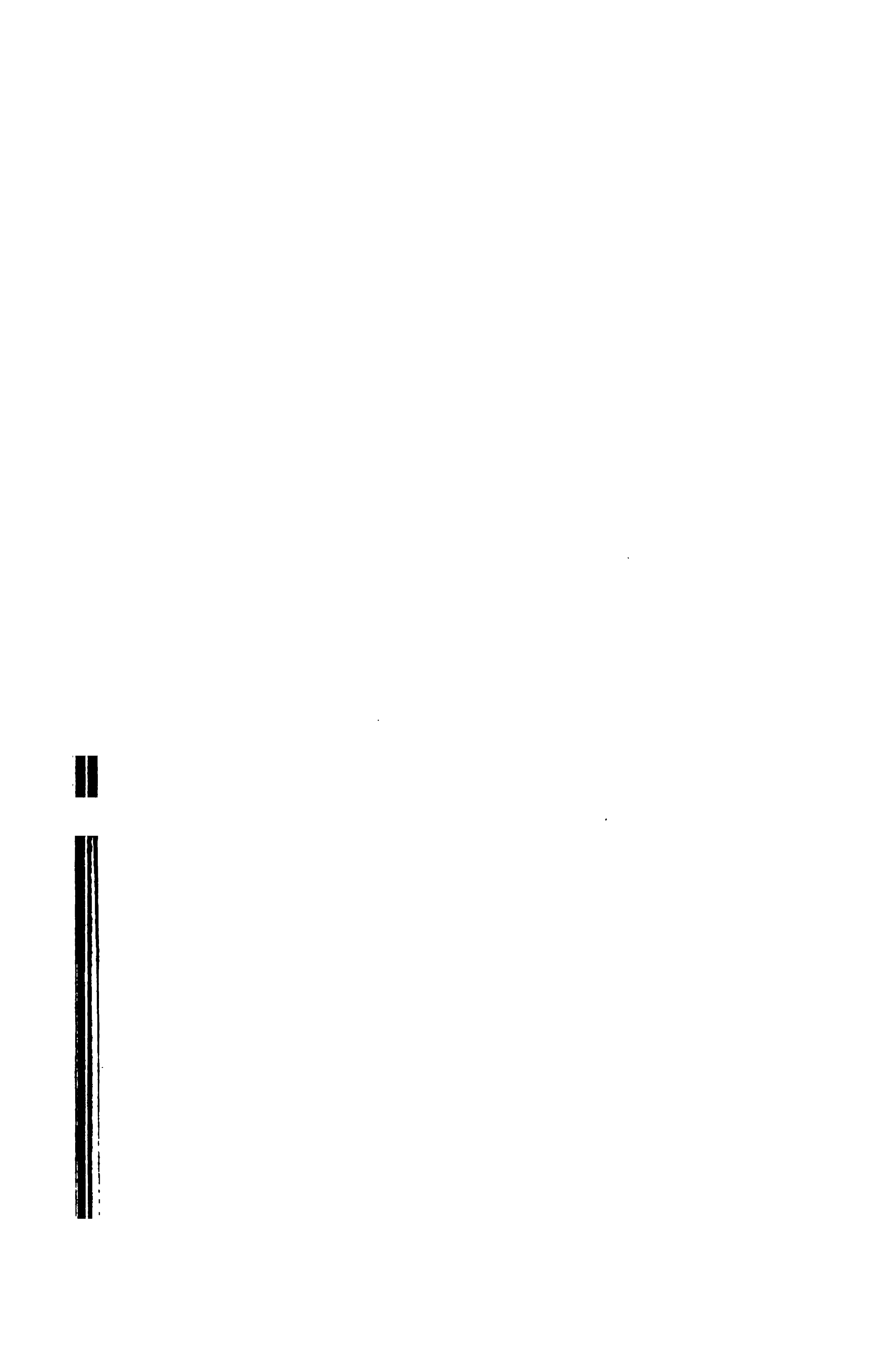
Il me reste à dire quelques mots de l'entraînement des ondes dans le tourbillon. Pour l'air le coefficient de Fresnel $1 - \frac{1}{\nu^2}$, où ν est l'indice de réfraction, est égal à 0,0006, et on exagère certainement si l'on admet que quelque part dans le tourbillon la vitesse de l'air ait été de 20 000 cm. par seconde. Alors la vitesse de l'entraînement des ondes aurait été de 12 cm. par seconde. Cette valeur est tellement petite par rapport à la vitesse de la lumière que les changements de direction qui en peuvent résulter doivent être absolument insensibles.

Register.

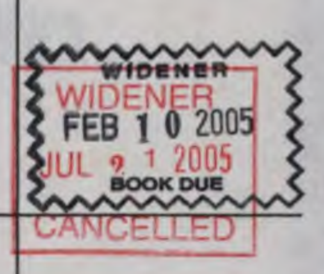
(Die Zahlen geben die Seiten an.)



Druck von B. G. Teubner in Leipzig.






WIDENER
WIDENER
FEB 1 0 2005
JUL 2 1 2005
BOOK DUE
CANCELLED

